Die Theorie der Gleichungen

Euler, Leonhard

Berlin, 1791

7. Fortsetzung der Bemerkungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen, vom Hrn. de la Grange. Aus dem dritten Bande der neuen Memoiren der Königl. Akad. der Wissenschaften zu Berlin.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53259

7. Fortsetzung der Bemerkungen über die algebraische Auflösung der Gleichungen.

Vom

Herrn de la Grange.

Aus dem dritten Bande der neuen Memoiren der Königl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin.

Dritter Abschnitt.

Von der Auflösung der Gleichungen von dem fünften, und von den höheren Graden.

Die Auflösung der Gleichungen, die von einem höhern als dem vierten Grade sind, gehöret unter die Aufgaben, mit welchen man noch nicht zum Ziele hat kommen können, obgleich kein Grund vorhanden ist, die Sache für unmöglich zu halten. Bis jetzt sind mir nur zwey Methoden bekannt, aus welchen man einige Hofnung eines glücklichen Erfolges schöpfen könnte. Die eine, von Tschirnhausen, welche er in den Leipziger Act. erud. v. J. 1683 bekannt gemacht: die andere, welche Euler und Bezout fast zu gleicher Zeit bekannt machten, der erstere in den neuen Petersburger Commentarien Tom. IX., der andere in den Memoiren der Akad. d. W. zu Paris, vom Jahr 1765. Diese Methoden gewähren den

Vor=

Vortheil einer allgemeinen und gleichförmigen Auflöſung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade: ein Vorzug, der ihnen eigen iſt, und der uns folglich ein günſtiges Vorurtheil für ihre Anwendbarkeit auf die höhern Grade machen kann; allein die Rechnungen, welche ſie bey den Gleichungen vom fünften und höhern Grade erfordern, ſind ſo weitläuftig und verwickelt, daß der unerſchrockenſte Rechner dadurch abgeſchreckt werden kann. Z. B. um die Tſchirnhauſenſche Methode auf eine Gleichung vom fünften Grade anzuwenden, muß man vier Gleichungen auflöſen, welche vier unbekannte Größen enthalten, und wovon die erſte, vom erſten Grade, die zweyte, vom zweyten, u. ſ. w. iſt: ſo daß die letzte Gleichung zu welcher man durch die Wegſchaffung dreyer unbekannten Größen gelangt, überhaupt zu einem Grade ſteigen wird, deſſen Exponent 1.2.3.4, d. i. der 24ſte Grad ſeyn wird. Und nun, die unermeßliche Arbeit bey Seite geſetzt, die man nöthig haben würde, um zu dieſer Gleichung zu gelangen, ſo iſt klar, daß wenn man ſie gefunden hätte, doch nicht viel gewonnen ſeyn würde, wofern man ſie nicht auf einen niedrigern als den fünften Grad, zurückführen könnte; eine Arbeit, die, wenn ſie möglich ſeyn ſollte, nur die Frucht einer noch weit größern Arbeit als die erſte, ſeyn könnte.

Auch nach Eulers Methode kommt man unvermeidlich auf eine reducirte Gleichung vom 24ſten Grade: denn ob es gleich ſcheinen könnte, daß dieſe Methode blos auf eine reducirte Gleichung vom vierten Grade führen würde, weil ſie die Gleichungen des dritten Grades, auf den zweyten, und die des vierten, auf den dritten zurückführet; ſo bemerkt doch Bezout mit Grund, daß es bloß eine zufällige Abkürzung iſt, durch welche bey dem vierten Grade, Eulers

Rech=

Rechnung auf den dritten gebracht wird, da man überhaupt zu dem Grad 2 . 3, d. i. zu dem 6ten Grad kommen müßte, und daß diese Abkürzung nur alsdenn statt finde, wenn der Exponent der Gleichung 4, eine zusammengesetzte Zahl ist. Wir haben in dem vorigen Abschnitte, den Grund hiervon a priori gezeigt, und zugleich erwiesen, daß Euler unvermeidlich auf eine Gleichung von dem 6sten Grade gekommen seyn würde, wenn er eine der unbekannten Größen, die in seinen Formeln vorkommen, durch Eliminirung der andern gesucht hätte. Bey einiger Aufmerksamkeit zeigt sich also, daß man bey Gleichungen vom fünften Grade, nach Eulers Methode, auf keine niedrigere reducirte Gleichung, als vom 24sten Grade kommen kann; und läßt überhaupt diese Gleichung eine Reductiou zu, so wird man diese nicht anders, als durch eine große Anzahl von Versuchen, und durch so mühsame Rechnungen, als man sich nur denken kann, zu Stande bringen können.

Eben diese Unbequemlichkeiten müssen auch bey der Methode des Hrn. Bezout statt finden, die von der Eulerschen nicht verschieden ist. Ja sie führt scheinbar zu noch höhern reducirten Gleichungen, deren Exponenten aber sämtlich Vielfache von dem Exponenten sind, der die Höhe der gegebenen Gleichung angiebt. So kommt man nach Bezouts Methode bey dem fünften Grade, auf eine reducirte Gleichung vom 120sten Grade, deren sämtliche Exponenten Vielfache von 5 sind, so daß sie im Grunde so gut als eine Gleichung vom 24sten Grade ist.

Dieser gelehrte Schriftsteller glaubt indessen, daß diese Gleichung vom 120sten Grad, als eine vom 24sten betrachtet, keine größern Schwierigkeiten verursachen dürfte, als

solche,

solche, die niedriger als vom fünften Grade sind. Seine Gründe sind folgende: 1) der Ausdruck für die Wurzeln einer Gleichung vom fünften Grade, kann keine andere Wurzelzeichen, als von der fünften, und von den niedrigern Ordnungen enthalten: 2) folglich können die Wurzeln unserer reducirten Gleichung von diesem Grade, auch keine andere Wurzelzeichen enthalten, d. i. Wurzeln der fünften, vierten Ordnung u. s. f. 3) Da die Wurzeln der reducirten Gleichung vom 120sten Grad, die fünften Wurzeln der Wurzeln einer Gleichung vom 24sten Grad seyn müssen, so sind eben dadurch die Wurzelzeichen der fünften Ordnung, die der Wurzelausdruck der Gleichung einschließt, schon entwickelt, so daß die Wurzeln der Gleichung vom 24sten Grad, nur noch die niedrigern Wurzelzeichen enthalten können, und ihre Auflösung sich also auf Gleichungen reduciren muß, die unter dem fünften Grade sind. Darf ich die Wahrheit gestehen, so scheint mir diese Schlußfolge ein wenig erzwungen zu seyn: denn ich gestehe, daß ich den Grund nicht deutlich einsehe, aus welchem die Gleichung vom 24sten Grade, von welcher die Rede ist, auf keine Wurzelzeichen der fünften Ordnung führen könne: wenigstens ist die unbedingte Unmöglichkeit nicht erwiesen: daher könnte es wohl möglich seyn, daß diese Gleichung vom 24sten Grade, alle Schwierigkeiten der aufzulösenden Gleichung vom fünften Grade mit sich führte, und so dürfte man vielleicht nach allen den verdrüßlichen Rechnungen, durch welche man zu jener Gleichung gelangt, von der Auflösung der gegebenen Gleichung weiter als anfänglich entfernt seyn.

Aus diesen Betrachtungen erhellet, daß es äußerst zweifelhaft sey, ob die Methoden, von welchen wir geredet haben, zu einer vollständigen Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade, und noch vielmehr der höheren Grade führen

ren können. Und diese Ungewißheit, verbunden mit der Weitläuftigkeit der Rechnungen welche diese Methoden erfordern, muß alle diejenigen abschrecken, welche in Versuchung kommen könnten von denselben zur Auflösung eines berühmten und wichtigen Problems der Algeber, Gebrauch zu machen. Auch sehen wir, daß selbst die Erfinder dieser Methoden sich begnüget haben, sie auf Gleichungen vom dritten und vierten Grade anzuwenden, niemand aber die Anwendung weiter zu treiben gewagt hat.

Es wäre daher sehr zu wünschen, daß man a priori über den Erfolg urtheilen könnte, den man sich bey Anwendung dieser Methoden auf Gleichungen von höhern als dem vierten Grade versprechen dürfte. Wir wollen daher versuchen, die Mittel hierzu anzugeben, durch eine Analyse, welche der ähnlich ist, deren wir uns bisher in Absicht der bekannten Methoden zur Auflösung der Gleichungen vom dritten und vierten Grade, bedient haben.

51.

Wir wollen also überhaupt eine Gleichung vom μten Grade betrachten:

$$x^\mu + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0 \ldots (a)$$

nach der Tschirnhausenschen Methode nehmen wir hierzu folgende Hülfsgleichung

$$x^\varrho + fx^{\varrho-1} + gx^{\varrho-2} + \text{ꝛc.} + y = 0 \ldots (b)$$

welche ϱ unbestimmte Größen f, g, ꝛc. und eine neue unbekannte y, enthält. Aus diesen beyden Gleichungen eliminiret man x, und erhält dadurch eine umgeformte Gleichung für y, welche mit der gegebenen von gleicher Höhe μ seyn, und folgende Form haben wird

$$y^\mu + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + Cy^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0 \ldots (c)$$

In dieſer Gleichung werden die Coefficienten A, B, C, ꝛc. rationale und ganze Funktionen, der unbeſtimmten Coefficienten f, g, ꝛc. ſeyn, und namentlich wird A eine Funktion von einer Dimenſion, B von zweyen u. ſ. w. ſeyn. (Art. 14.)

Da aber ę unbeſtimmte Größen vorhanden ſind, ſo erhält man ein Mittel es dahin zu bringen, daß in der umgeformten Gleichung für y, ę Glieder, welche man will verſchwinden, oder vielmehr ſolche Verhältniſſe gegen einander bekommen, als man für gut findet, deren Beſtimmung von ę Gleichungen abhängt. Hierdurch kann man die Gleichung für y auflösbar machen, oder es wenigſtens dahin bringen, daß ſie ſich auf einen niedrigern Grad bringen läſſet. Die Auflöſung der Gleichung für y giebt uns aber zugleich die Auflöſung der gegebenen Gleichung für x: denn wir haben oben (Nr. 11.) erwieſen, daß die Gleichung für y, die Bedingungen enthält, vermöge deren die beyden Gleichungen, aus welchen man x eliminiret hat, nothwendig eine gemeinſchaftliche Wurzel enthalten, ſo daß der Werth von x nur dieſe gemeinſchaftliche Wurzel der Gleichungen (a) und (b) ſeyn kann: dieſen findet man alſo, wenn man den größten gemeinſchaftlichen Diviſor beyder Gleichungen ſuchet, und denſelben = o ſetzet.

Dieſe Arbeit verrichtet man auf die gewöhnliche Weiſe, und ſetzt ſie ſo lange fort, bis man auf einen Reſt kommt, in welchen x bloß in der erſten Dimenſion vorkommt; dieſer Reſt wird der geſuchte Diviſor ſeyn: oder vielmehr, was mit dem vorigen auf eines hinausläuft, man eliminiret nach und nach aus beyden obigen Gleichungen die Poteſtäten von x, bis man auf eine Gleichung kommt, die blos die erſte Potenz von x enthält; und es iſt leicht zu beweiſen, daß dieſe Gleichung von folgender Form ſeyn wird,

$$F + Gy + Hy^2 + \text{ꝛc.} + Ky^\lambda$$
$$+ (L + My + Ny^2 + \text{ꝛc.} + Ry^\lambda)x = 0$$

Daher wird

$$x = -\frac{F + Gy + Hy^2 + \text{ꝛc.} + Ky^\lambda}{L + My + Ny^2 + \text{ꝛc.} + Ry^\lambda} \ldots (d)$$

in welchen Ausdrücken $\lambda = \frac{\mu}{2}$, wenn μ gerade, und $\lambda = \frac{\mu - 1}{2}$, wenn μ ungerade ist.

Auf diese Art erhält man also x durch eine rationale Funktion von y ausgedruckt; so daß, wenn alle μ Werthe von y bekannt sind, ihre successive Substitution, alle zugehörigen Werthe von x geben wird. Und diese sind die Wurzeln der gegebenen Gleichung.

52.

Diese Methode ist, wie man siehet, höchst einfach und allgemein; allein die Schwierigkeit liegt darin, die unbestimmten Größen f, g, h, ꝛc. so zu bestimmen, daß die umgeformte Gleichung für y auflösbar werde.

Die natürlichste und zugleich allgemeinste Voraussetzung die man zu diesem Endzweck machen könnte, würde darin bestehn, alle Coefficienten A, B, C, ꝛc. bis zum vorletzten Glied $= 0$ zu setzen, so daß die umgeformte Gleichung für y die Form $y^\mu + V = 0$ erhielte. Dann würde man jederzeit unmittelbar eine oder zwey Wurzeln dieser Gleichung haben, je nachdem μ ungerade oder gerade wäre, und die übrigen würden blos von solchen Gleichungen abhängen, die von den Graden $\frac{\mu - 1}{2}$ oder $\frac{\mu - 2}{2}$ seyn würden (Nr. 21.); ja durch

die

die Division der Cirkelperipherie könnte man auch alle Wurzeln unmittelbar erhalten (Nr. 23.)

Für diesen Fall wird man also $\varrho = \mu - 1$ nehmen müssen, um so viele unbestimmte Größen zu bekommen, als man braucht, um die nöthigen Gleichungen vollzählig zu machen, und im Allgemeinen wird man zuletzt auf eine Endgleichung von dem Grade $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$ kommen, wie Nr. 14. erwiesen worden.

Der Exponent μ sey eine zusammengesetzte Zahl, so daß $\mu = \nu\pi$. Setzt man nun $y^{\pi} = z$, und läßt alle diejenigen Glieder der Gleichung für y verschwinden, deren Exponent durch π nicht theilbar ist, so ist offenbar, daß es möglich seyn wird, diese Gleichung in eine für z, von dem niedrigern Grade ν zu verwandeln. Für diesen Fall wird man $\nu(\pi - 1)$ Glieder müssen verschwinden lassen, und daher muß man $\varrho = \nu(\pi - 1)$ setzen, um eben so viele unbestimmte Größen zu erhalten. Und aus dem was Nr. 14. erwiesen worden, läßt sich leicht schließen, daß die letzte Gleichung, auf welche man in diesem Falle kommen wird, von einem Grade seyn werde, der durch die Zahl

$$1.2.3 \ldots (\pi - 1)(\pi + 1)(\pi + 2) \ldots (2\pi - 1)(2\pi + 1)(2\pi + 2) \ldots (\nu\pi - 1)$$

vorgestellet wird, d. h. sie wird seyn von dem Grad

$$\frac{1 . 2 . 3 . 4 \ldots (\mu - 1)}{\pi . 2\pi . 3\pi \ldots (\nu - 1)\pi}$$

oder vielmehr von dem Grad

$$\frac{\nu(\nu + 1)(\nu + 2) \ldots (\mu - 1)}{\pi^{\nu - 1}}$$

Dies sind nun im Allgemeinen die Grade, auf welche die reducirten Gleichungen steigen können, welche man bey der Tschirnhausenschen Methode auflösen muß. Es kann aber treffen, daß diese reducirten Gleichungen so beschaffen sind, daß sie sich auf niedrigere Grade bringen lassen. Es wird aber so gut als unmöglich seyn, dies a posteriori d. i. aus der Form dieser reducirten Gleichungen selbst, zu beurtheilen; allein a priori kann man sich davon versichern, wenn man ihre Wurzeln betrachtet, und sie als Funktionen der Wurzeln der gegebenen, und der umgeformten Gleichung für y, ansiehet; so wie dies aus dem folgenden erhellen wird.

53.

Wir wollen allgemein die μ Wurzeln der gegebenen Gleichung

$$x^\mu + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + \text{ꝛc.} = 0$$

durch x', x'', x''', x'''', ꝛc. vorstellen, und eben so die μ Wurzeln der umgeformten Gleichung

$$y^\mu + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + \text{ꝛc.} + V = 0$$

durch y', y'', y''', y'''', ꝛc. Substituirt man nach und nach diese Werthe in der Hülfsgleichung

$$x^\varrho + fx^{\varrho-1} + gx^{\varrho-2} + hx^{\varrho-3} + \text{ꝛc.} + l + y = 0$$

so erhält man μ partikuläre Gleichungen, durch welche man die unbestimmten Coefficienten f, g, h, ꝛc. bestimmen kann; und da jede der Wurzeln y', y'', y''', ꝛc. gleichförmig mit jeder der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. zusammengestellt werden kann; so folgt, daß die unbekannten f, g, h, ꝛc. verschiedene Werthe werden erhalten können, die man sämtlich finden wird, wenn man die Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. mit den Wurzeln y', y'', y''', ꝛc. auf alle mögliche Arten combiniret. Dies hängt von der Anzahl und Form dieser verschiedenen Werthe einer und derselben unbekannten Größe ab; und läßt sich nach dem Grade und der Natur der Gleichung, durch welche dieselbe bestimmt werden soll, beurtheilen.

54. Wir

54.

Wir wollen nunmehr annehmen, daß alle Mittelglieder der umgeformten Gleichung für y verschwinden sollen, so daß sie sich auf die Form $y^{\mu} + V = o$ reducire. Zu diesem Ende wird man in der Hülfsgleichung $\varrho = \mu - 1$ setzen müssen, um $\mu - 1$ unbestimmte Größen zu erhalten (Nr. 52.) Setzen wir nun zur Abkürzung $u = \sqrt[\mu]{-V}$, und bezeichnen die Wurzeln der Gleichung $y^{\mu} - 1 = o$ durch $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$, rc. $\alpha^{\mu-1}$ (Nr. 24.); so giebt die Gleichung $y^{\mu} + V = o$ die Wurzeln $u, \alpha u, \alpha^2 u, \alpha^3 u$, rc. $\alpha^{\mu-1}u$. Wenn man nun diese Wurzeln für y', y'', y''', rc. setzt, und sie, so wie auch die Wurzeln x', x'', x''', rc. in der Hülfsgleichung substituiret, so erhält man μ Gleichungen

$$(e)\begin{cases} x'^{\mu-1} + fx'^{\mu-2} + gx^{\mu-3} + \text{rc.} + l + u = o, \\ x''^{\mu-1} + fx''^{\mu-2} + gx''^{\mu-3} + \text{rc.} + l + \alpha u = o, \\ x'''^{\mu-1} + fx''^{\mu-2} + gx''^{\mu-3} + \text{rc.} + l + \alpha^2 u = o, \end{cases}$$

rc.

durch welche man sowohl die Größe u als die $\mu - 1$ unbestimmten Größen f, g, rc. l wird bestimmen können.

Da diese unbekannten Größen in den obigen Gleichungen blos in dem ersten Grade vorhanden sind, so ist klar, daß das ganze System aller dieser Gleichungen, für jede dieser unbekannten Größen nicht mehr als einen bestimmten Werth geben wird. Nun nehmen wir an, man habe vermittelst der gewöhnlichen Eliminationsmethode, den Werth einer dieser unbekannten Größen f gefunden (man wird aber die nemlichen Schlüsse für jede der übrigen unbestimmten Größen g, h, rc. l machen können), so ist augenscheinlich, daß dieser

Werth, durch eine Funktion der μ Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. und der Wurzel α ausgedruckt seyn wird. Nimmt man nun in diesem Ausdrucke, mit den μ Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. alle mögliche Versetzungen vor, so wird man alle partikulären Werthe von f erhalten, und diese müssen die Wurzeln der Gleichung für f seyn.

Da nun die Anzahl der Versetzungen, welche unter μ Dingen, statt finden, überhaupt durch $1 . 2 . 3 \ldots \mu$ ausgedruckt wird, so folgt, daß man überhaupt $1 . 2 . 3 \ldots \mu$ partikuläre Werthe von f erhalten wird. Sollten sich aber unter denselben gleiche Werthe finden, so ist klar, daß man sie auf eine viel geringere Anzahl wird bringen können, wenn man die gleichen Werthe nicht unterscheidet. Wir werden aber zeigen daß es in der That nicht mehr, als $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$ verschiedene Werthe von f giebt.

55.

Zu dieser Absicht ist nicht nöthig den Ausdruck für f vermittelst der Gleichungen (e) wirklich zu suchen; es ist schon hinlänglich, die Veränderungen zu untersuchen, deren dies System von Gleichungen empfänglich ist, indem man die Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. unter einander verwechselt. Um diese Veränderungen zu entdecken, fange man mit der Voraussetzung an, daß x' seine Stelle behalte, d. h. daß die erste Gleichung ungeändert bleibe; die übrigen $\mu - 1$ Wurzeln x'', x''', x'''', ꝛc. aber versetze man nach und nach in den übrigen Gleichungen: auf diese Art wird man $1 . 2 . 3 \ldots (\mu - 1)$ Veränderungen erhalten. Weiter setze man x'' an die Stelle von x' und umgekehrt, oder welches auf eins hinausläuft, man setze in der ersten Gleichung αu für u, und in der zweyten u für αu, so wird man nun die nemlichen Ver-

setzun-

ſetzungen mit den $\mu - 1$ Wurzeln x'', x''', x'''', ꝛc. machen können; und dies giebt wieder $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\mu - 1)$ neue Veränderungen u. ſ. f. Auf dieſe Art wird man μmal $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\mu - 1)$ Veränderungen erhalten, ſo daß die Totalſumme $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu$ aller möglichen Veränderungen des Syſtems der Gleichungen (e) herauskommt.

Ich bemerke hiernächſt, daß, ſobald man die $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\mu - 1)$ Veränderungen, welche ſtatt finden, indem x ſeine Stelle behält, gefunden hat, man alle übrigen Veränderungen daraus ableiten kann, indem man nichts weiter thut, als ſucceſſiv in allen Gleichungen (e), für u, die Größen αu, $\alpha^2 u$, $\alpha^3 u$, ꝛc. $\alpha^{\mu - 1} u$, ſetzet; bey einiger Aufmerkſamkeit wird man ſich hiervon leicht überzeugen können, wenn man bemerkt, daß $\alpha^{\mu} = 1$; $\alpha^{\mu + 1} = \alpha$; $\alpha^{\mu + 2} = \alpha^2$; ꝛc.

Es iſt aber augenſcheinlich, daß alle dieſe Subſtitutionen von αu, $\alpha^2 u$, ꝛc. für u, in dem Werthe von f keine Veränderung machen können; denn ſobald u eliminiret iſt, ſo iſt es gleichgültig, was für einen Werth man dieſer Größe giebt, und die Reſultate der Elimination ſind nothwendiger Weiſe unabhängig von dem Werthe welchen u hat.

Eigentlich erhalten wir folglich nicht mehr als dieſe $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\mu - 1)$, aus der Verſetzung der $\mu - 1$ Wurzeln x'', x''', ꝛc. entſpringende Veränderungen, welche verſchiedene Werthe von f geben können: ſo daß die Gleichung für f, nicht höher als zu dem $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (\mu - 1)$ſten Grade ſteigen darf; und dies ſtimmt mit dem was oben (Nr. 52.) geſagt worden, überein.

Wir wollen ferner ſehen, ob nicht dieſe Gleichung noch einer Reduction fähig ſeyn ſollte. Wir müſſen hierbey die

Fälle unterscheiden, wo μ in der gegebenen Gleichung, eine einfache, oder eine zusammengesetzte Zahl ist.

56.

Wir wollen annehmen, daß μ irgend eine Primzahl sey. In dem Systeme der Gleichungen (e) wollen wir die erste bey Seite setzen, weil man x' als eine festgestellte Größe ansehen kann; wir untersuchen also nur was für Veränderungen in diesem Systeme entstehen, indem man die übrigen Wurzeln x'', x''' ꝛc. versetzet.

Man verfahre hierbey auf ähnliche Art, als unter der vorigen Nr. Man sehe nemlich zuerst x'' als festgestellt an, und suche die Veränderungen, welche aus den $1.2.3\ldots(\mu-2)$ Versetzungen der $\mu-2$ übrigen Wurzeln x''', x'''', ꝛc. entspringen; man setze nun x'' an die Stelle von x''' und umgekehrt, welches eben so viel ist als wenn man $\alpha^2 u$ für αu in der zweyten Gleichung, und αu für $\alpha^2 u$ in der dritten Gleichung schreibt; und suche wiederum die $1.2.3\ldots(\mu-2)$ Veränderungen, welche aus der Versetzung der übrigen Wurzeln x''', x'''', ꝛc. entspringen. Dann setze man x' an die Stelle von x'''' und umgekehrt, oder, welches wieder einerley ist, man schreibe $\alpha^3 u$ für αu in der zweyten, und αu für $\alpha^3 u$ in der vierten Gleichung, und suche nun wieder wie vorher die $1.2.3\ldots(\mu-2)$ Veränderungen, welche aus Versetzung der $\mu-2$ Wurzeln x''', x'''', ꝛc. entspringen u. s. f. Durch dieses Verfahren erhält man $\mu-1$mal, $1.2.3\ldots\mu-2$ Veränderungen, welches die Totalsumme $1.2.3\ldots\mu-1$ der gesuchten Veränderungen giebt.

Ich behaupte aber, daß, so bald man die $1.2.3\ldots\mu-2$ Veränderungen, welche herauskommen, indem x'' seine

Stelle behält, die übrigen Wurzeln x'', x'''', 2c. aber versetzt werden, gefunden hat, daß man, sage ich, hieraus unmittelbar alle Veränderungen, die aus der Verwechselung der $\mu - 1$ Wurzeln x'', x''', x'''', 2c. entspringen, finden kann, indem man successiv α^2, α^3, 2c. $\alpha^{\mu - 1}$ für α, in allen Gleichungen (e) schreibt; denn auf diese Weise verwandelt sich das Glied αu der zweyten Gleichung nach und nach in $\alpha^2 u$, $\alpha^3 u$, 2c.; und die Glieder $\alpha^2 u$, $\alpha^3 u$, 2c. der übrigen Gleichungen werden sich unter einander verwechseln, da μ eine Primzahl ist (man vergleiche was Nr. 24. bewiesen worden), und diese Verwechselungen laufen offenbar mit den Verwechselungen der Wurzeln x''', x'''', 2c. auf eines hinaus.

Wenn man demnach vermittelst der Gleichungen (e), f durch x', x'', x''', 2c. und α ausgedruckt hat, und man will die $1 . 2 . 3 \ldots \mu - 1$ Werthe von f erhalten, die aus der gegenseitigen Verwechselung der Wurzeln x'', x''', x'''' 2c. entspringen, und welche die Wurzeln der Gleichung für f seyn werden, die zu dem $1 . 2 . 3 \ldots \mu - 1$sten Grade (man sehe die vorige Nr.) steigen wird: so wird es hinreichend seyn, blos die $1 . 2 . 3 \ldots \mu - 2$ Werthe von f zu suchen, welche aus der gegenseitigen Verwechselung der Wurzeln x'', x''', x'''', 2c. entspringen, und in denselben hierauf α nach und nach in α^2, α^3, α^4, 2c. $\alpha^{\mu - 1}$ zu verwandeln: oder vielmehr, was auf eins hinausläuft, man kann gleich anfänglich in dem Ausdruck für f, α in α^2, α^3, α^4, 2c. $\alpha^{\mu - 1}$ verwandeln, und dann mit jedem dieser $\mu - 1$ Werthe von f, die $1 . 2 . 3 \ldots \mu - 2$ Veränderungen vornehmen, welche unter den $\mu - 2$ Wurzeln x'', x''', 2c. statt finden: auf diese Art wird man die $1 . 2 . 3 \ldots \mu - 1$ Wurzeln der Gleichung für f erhalten.

57.

Wir wollen uns nunmehr vorstellen, daß die $\mu - 1$ Werthe von f, welche man durch die successive Substitution von α^2, α^3, ꝛc. $\alpha^{\mu - 1}$ für α erhält, die Wurzeln folgender Gleichung vom $(\mu - 1)$sten Grade seyn

$$f^{\mu-1} + Ff^{\mu-2} + Gf^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0 \ldots (f)$$

und da $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$, ꝛc. die Wurzeln der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$ sind (nach der Voraussetzung); so ist klar, daß $\alpha, \alpha^2, \alpha^3$, ꝛc. die $\mu - 1$ Wurzeln der Gleichung $\frac{y^\mu - 1}{y - 1} = 0$, d. i.

$$y^{\mu-1} + y^{\mu-2} + y^{\mu-3} + \text{ꝛc.} + 1 = 0 \ldots (g)$$

seyn werden.

Setzt man nun in dem aus den Gleichungen (e) abgeleiteten Ausdruck für f überhaupt y an die Stelle von α, und eliminiret man alsdenn y vermittelst der Gleichung (g), so erhält man nothwendig die Gleichung (f); woraus man siehet, daß diese Gleichung kein α mehr enthalten wird, so daß die Coefficienten F, G, ꝛc. blos Funktionen von x', x'', x''', ꝛc. seyn werden.

Hat man aber die Gleichung (f) gefunden, so hat man nichts zu thun, als in den Coefficienten F, G, ꝛc. alle mögliche Versetzungen unter den $\mu - 2$ Wurzeln x'', x''', ꝛc. zu machen; so erhält man $1.2.3 \ldots \mu - 2$ Gleichungen für f, von denen jede vom $\mu - 1$ Grade seyn wird, und diese werden folglich die $1.2.3 \ldots \mu - 1$ Wurzeln der allgemeinen Gleichung für f enthalten.

Hieraus aber läßt sich leicht der Schluß machen, daß jeder der Coefficienten F, G, ꝛc. nur von einer Gleichung von

dem

dem ($\mu-2$)ten Grade abhängen kann. Und in der That, da diese Coefficienten Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', 2c. sind, so ist klar, daß jeder von ihnen z. B. F, durch eine Gleichung bestimmt werden muß, welche so viele Wurzeln hat, als dieser Coefficient verschiedene Werthe erhält, wenn man alle mögliche Versetzungen mit den Wurzeln x', x'', x''', 2c. vornimmt: wir haben aber weiter oben (Nr. 55.) gezeigt, daß die Vertauschung der Wurzel x' mit jeder andern, den Werth von f nicht ändert, daher werden diese Vertauschungen eben so wenig die Werthe von F, G 2c. ändern, welche Funktionen der Wurzeln von f sind: überdem haben wir gesehen (Nr. 56.), daß man anstatt die Wurzel x'' zu vertauschen, die Wurzel α, in α^2, α^3, 2c. verwandeln kann; so daß die Werthe von F, G, 2c., weil sie von α unabhängig sind, durch die Vertauschung von x'' keine Veränderung leiden werden. Es bleiben also blos die gegenseitigen Versetzungen der $\mu-2$ Wurzeln x''', x'''', 2c. übrig, welche verschiedene Werthe von F, desgleichen von G, H, 2c. geben werden. Folglich wird die Anzahl dieser verschiedenen Werthe blos $1.2.3 \ldots \mu-2$ seyn; und jeder Coefficient F, G, H, 2c. wird demnach durch eine Gleichung von eben diesem Grade gegeben werden.

58.

Die reducirte Gleichung für f, auf welche die Tschirnhausensche Methode führet, und welche, wie wir gesehen haben, im Allgemeinen von dem Grade $1.2.3 \ldots \mu-1$ seyn muß, wird sich demnach jederzeit, wenn μ eine Primzahl ist, in $1.2.3 \ldots \mu-2$ Gleichungen vom $\mu-1$sten Grade, von solcher Art, wie die obige Gleichung (f) war, zerfällen lassen, und dies vermittelst einer Gleichung vom $1.2.3 \ldots \mu-2$ten Grade; denn obgleich jeder der Coefficienten F, G, 2c. von einer Gleichung von diesem letzten Grade abhängt, so wird es doch hinreichend seyn, nur eine Gleichung für F, oder für G ꝛc. zu haben; denn die übrigen Coefficienten werden sich jederzeit durch rationale Funktionen von diesem ausdrucken lassen.

Betrachtet man wirklich die Gleichung (f) vom $\mu - 1$sten Grade, als einen Divisor der reducirten Gleichung für f, vom $1.2.3 \ldots \mu - 1$sten Grade, so wird man hierzu $\mu - 1$ Bedingungen finden, durch welche im Allgemeinen die $\mu - 2$ Coefficienten G, H, ꝛc. für F ohne eine Wurzelausziehung bestimmt werden können, und wenn man diese Werthe nach der Reihe in einer der Bedingungsgleichungen substituiret, so wird man die Gleichung für F selbst erhalten, welche den $1.2.3 \ldots \mu - 2$ten Grad nicht übersteigen kann. Ich sage daß man im Allgemeinen die Werthe von G, H, ꝛc. für F ohne Wurzelausziehung bestimmen kann; dies ist richtig, wenn man F keinen partikulären Werth giebt; will man aber statt F die Wurzeln der Gleichung für F substituiren, um die ihnen entsprechenden Werthe von G, H, ꝛc. zu erhalten, und es trift sich, daß die substituirte Wurzel doppelt oder dreyfach ꝛc. ist, so werden die Ausdrücke von G, H, ꝛc. nicht rational ausfallen, und diese Größen werden noch von der Auflösung einer Gleichung vom zweyten, oder dritten ꝛc. Grad abhängen: wie wir dieses weiter unten (Nr. 102.) zeigen werden.

Man kann übrigens die Gleichung für F unmittelbar finden, wenn man ihre Wurzeln als Funktionen von x', x'', x''', ꝛc. ansiehet; in den vorigen Abschnitten finden sich mehrere Beyspiele dieser Methode. Und sieht man diese Gleichung für F als bekannt an, so kann man vermittelst derselben die

Werthe

Werthe von G, H, ꝛc. directe beſtimmen, wie wir im vierten Abſchnitte Nr. 100. finden werden.

Es iſt nunmehr augenſcheinlich, daß die Gleichung für F jederzeit von einem höheren Grade ſeyn wird, als die gegebene Gleichung; blos den Fall $\mu = 3$ ausgenommen: denn nimmt man $\mu = 3$, ſo wird $1.2.3 \ldots \mu - 2 = 1$; iſt $\mu = 5$, ſo wird $1.2.3 \ldots \mu - 2 = 1.2.3 = 6$; iſt $\mu = 7$, ſo wird $1.2.3 \ldots \mu - 2 = 1.2.3.4.5 = 120$ u. ſ. f. Wofern ſich alſo dieſe Gleichung nicht auf einen noch niedrigern Grad bringen läſſet, ſo iſt die Tſchirnhauſenſche Auflöſung von keinem Gebrauche: dies ſcheint mir aber im Allgemeinen faſt unmöglich. Zwar iſt es richtig, daß, obgleich der $1.2.3 \ldots \mu - 2$te Grad der Gleichung, von der wir reden, höher iſt, als der Grad μ der gegebenen Gleichung, doch dieſe Gleichung keine größern Schwierigkeiten verurſachet, als die vom Grade μ; denn da die $1.2.3 \ldots \mu - 2$ Wurzeln derſelben, bekannte Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. ſind, ſo iſt klar, daß dieſelben nicht unabhängig von einander ſind, ſondern daß unter ihnen Verhältniſſe ſtatt finden werden, die durch gewiſſe Gleichungen ausgedruckt werden, deren Anzahl der Differenz der Exponenten $1.2.3 \ldots \mu - 2$ und μ gleich ſeyn wird; ſo daß, wenn μ Wurzeln bekannt wären, man vermittelſt derſelben auch die übrigen erhalten würde.

Daraus folgt, daß die Gleichung für F im Grunde nicht größere Schwierigkeiten als die des μten Grades verurſachen kann; aber aus eben dem Grunde erhellet, daß ſie auch jederzeit alle Schwierigkeiten dieſes Grades wirklich haben wird; ſo daß man ſich in die nemlichen Schwierigkeiten verwickelt findet, denen die allgemeine Auflöſung der gegebenen Gleichung unterworfen iſt.

59. Wir

59.

Wir wollen nunmehr annehmen, daß der Exponent μ in der gegebenen Gleichung eine zusammengesetzte Zahl sey. In diesem Falle leiden die Schlüsse Nr. 56 einige Abänderung. Denn wenn man in den Gliedern der geometrischen Reihe α, α^2, α^3, 2c. $\alpha^{\mu-1}$ ohne Unterschied für α, die Potenzen α^2, α^3, 2c. $\alpha^{\mu-1}$ setzen wollte, so würde man nicht in jedem Falle dieselben Glieder wieder finden, wie in dem Falle, wenn μ eine Primzahl ist; den Grund hiervon haben wir unter Nr. 24. gezeigt; auch haben wir dort gezeiget, daß blos durch die Substitution solcher Potenzen von α, deren Exponent eine relative Primzahl gegen μ ist, dieselben Glieder wieder hervorgebracht werden können; so daß man dasjenige, was Nr. 56. gezeigt worden, blos auf dergleichen Potenzen von α einschränken muß.

Wenn wir demnach überhaupt durch ν, π, ϱ, 2c. alle Zahlen anzeigen, welche kleiner als μ, und gegen μ relative Primzahlen sind, deren Anzahl wir $\lambda - 1$ setzen wollen, so wird man sich der Substitutionen von α^ν, α^π, α^ϱ für α, in dem Ausdrucke für f, anstatt der Vertauschung der Wurzel x', mit $x^{\nu+1}$, $x^{\pi+1}$, $x^{\varrho+1}$, 2c. bedienen können: nimmt man demnach an, daß die λ Werthe von f, welche aus der Substitution von α^ν, α^π, α^ϱ, 2c. für α entspringen, die Wurzeln folgender Gleichung seyn

$$f^\lambda + Ff^{\lambda-1} + Gf^{\lambda-2} + \text{2c.} = 0 \quad \ldots \text{(h)}$$

so wird diese Gleichung ein Divisor der reducirten Gleichung für f seyn, und die Coefficienten derselben F, G, 2c. werden jeder durch eine Gleichung von dem Grade $\frac{1.2.3\ldots\mu-1}{\lambda}$

gegeben

gegeben werden; so daß in diesem Falle, die nach der Tschirnhausenschen Methode gefundene reducirte Gleichung für f, in $\frac{1.2.3\ldots\mu-1}{\lambda}$ Gleichungen, jede vom Grade λ, auflösbar seyn wird, und dies mittelst einer Gleichung vom Grade $\frac{1.2.3\ldots\mu-1}{\lambda}$.

Um die Gleichung (h) a priori zu finden ist nichts nöthig, als in dem Ausdrucke für f, y anstatt α zu setzen, und hierauf y durch Hülfe derjenigen Gleichung zu eliminiren, deren Wurzeln α, α^{ν}, α^{π}, α^{ϱ}, ꝛc. sind. Wie diese Gleichung zu finden sey, soll das Folgende lehren.

60.

Wir wollen also überhaupt die Gleichung $y^{\mu} - 1 = 0$ betrachten, deren Wurzeln 1, α, α^2, α^3, ꝛc. $\alpha^{\mu-1}$ sind. Nehmen wir nun an, daß die Zahl μ in die einfachen Faktoren r, s, t, ꝛc. zerfället sey, von denen jeder in der Zahl μ einmal oder öfter enthalten sey; so ist leicht einzusehen, daß diejenigen Potestäten von α, welche man ausschließen muß, um blos die Potestäten α, α^{ν}, α^{π}, α^{ϱ}, ꝛc. deren Exponenten relative Primzahlen gegen μ sind, übrig zu behalten, es wird sage ich, leicht seyn einzusehen, daß dies diejenigen Potestäten seyn müssen, deren Exponenten Vielfache von r, s, t, ꝛc. sind; überdem ist vermöge dessen was Nr. 24. erwiesen worden, klar, daß eben diese Potestäten von α, die Wurzeln folgender Gleichungen seyn werden

$$y^{\frac{\mu}{r}} - 1 = 0;\ y^{\frac{\mu}{s}} - 1 = 0;\ y^{\frac{\mu}{t}} - 1 = 0 \text{ ꝛc.}$$

Setzt

Setzt man nun zur Abkürzung $\frac{\mu}{r} = \mu'$; $\frac{\mu}{s} = \mu''$; $\frac{\mu}{t} = \mu'''$ rc. und dividiret man successiv die Gleichung $y^{\mu} - 1 = 0$ durch die Gleichungen $y^{\mu'} - 1 = 0$, $y^{\mu''} - 1 = 0$, $y^{\mu'''} - 1 = 0$, rc. so erhält man folgende Gleichungen

$$y^{\mu - \mu'} + y^{\mu - 2\mu'} + y^{\mu - 3\mu'} + \text{rc.} + 1 = 0,$$
$$y^{\mu - \mu''} + y^{\mu - 2\mu''} + y^{\mu - 3\mu''} + \text{rc.} + 1 = 0,$$
$$y^{\mu - \mu'''} + y^{\mu - 2\mu''} + y^{\mu - 3\mu'''} + \text{rc.} + 1 = 0,$$
rc.

Die Wurzeln der ersten dieser Gleichungen, werden alle Potenzen von α bis $\alpha^{\mu - 1}$ seyn, mit Ausnahme derer, deren Exponenten Vielfache von r sind: die Wurzeln der zweyten sind wieder alle Potenzen von α, mit Ausnahme derer, deren Exponenten Vielfache von s sind: die Wurzeln der dritten rc. Suchet man nun den größten gemeinschaftlichen Divisor aller dieser Gleichungen, so läßt sich leicht der Schluß machen, daß dieser die gesuchte Gleichung seyn wird, deren Wurzeln die Potestäten α, α^{ν}, α^{π}, α^{ϱ}, rc. seyn werden. Diese Gleichung wird demnach von folgender Form seyn:

$$y^{\lambda} + \beta y^{\lambda - 1} + \gamma y^{\lambda - 2} + \text{rc.} + \gamma y^2 + \beta y + 1 = 0 \ldots (i)$$

Es sey z. B. $\mu = 4$; so ist $r = 2$; $\mu' = 2$ und man erhält blos die Gleichung

$$y^2 + 1 = 0$$

deren Wurzeln α und α^3 sind.

Es sey $\mu = 6$; also $r = 2$; $s = 3$; daher $\mu' = 3$, $\mu'' = 2$, so wird man folgende zwey Gleichungen erhalten

$$y^3 + 1 = 0$$
$$y^4 + y^2 + 1 = 0$$

ihr

ihr größter gemeinschaftlicher Divisor ist

$$y^2 - y + 1 = 0$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind α und α^5.

Es sey $\mu = 8$; so ist $r = 2$, also $\mu' = 4$, und man erhält die einzige Gleichung

$$y^4 + 1 = 0$$

deren Wurzeln $\alpha, \alpha^3, \alpha^5, \alpha^7$ sind.

Was den Exponenten λ betrift, so läßt sich derselbe a priori durch die Faktoren der Zahl μ bestimmen; denn es wird jederzeit seyn

$$\lambda = \frac{\mu}{r.s.t.\ldots.}(r-1)(s-1)(t-1)\ldots.$$

welches man leicht beweisen kann, wenn man untersuchet, wie viele relative Primzahlen gegen μ, sich unter allen den Zahlen finden, welche kleiner sind als μ. (Man vergleiche die neuen Petersburger Commentarien Tom. VIII.)

61.

Hat man nun auf diese Art die Gleichung (i) gefunden, so eliminire man vermittelst derselben y aus dem Ausdrucke für f, so wird man die Gleichung (h) erhalten, deren sämtliche Coefficienten F, G, rc. solche Funktionen der Wurzeln x', x'', rc. ohne α, seyn werden, welche nicht mehrere als $\frac{1.2.3\ldots\mu-1}{\lambda}$ Veränderungen, bey allen möglichen Versetzungen der Wurzeln x', x'', rc. annehmen werden: so daß jede dieser Funktionen blos durch eine Gleichung von dem Grade $\frac{1.2.3\ldots\mu-1}{\lambda}$ gegeben werden wird, wie wir dieses schon oben gesagt haben.

Uebri-

Uebrigens kann es sich treffen, daß diese Gleichungen für F, oder G, ꝛc. noch besondere Reductionen zulassen. Dies hängt ab von der Form der Funktionen von x', x'', ꝛc. durch welche die Größen F, G, ꝛc. ausgedruckt worden: wir werden uns aber auf diese Untersuchung nur in so fern einlassen, als man dadurch in den Stand gesetzt wird die Tschirnhausensche Auflösung, für den Fall wo μ eine zusammengesetzte Zahl ist, einfacher zu machen, indem man nur einige Mittelglieder der umgeformten Gleichung (Nr. 52.) verschwinden lässet.

62.

Wir wollen also a priori zu bestimmen suchen, was für Resultate in diesem Falle herauskommen müssen. Wir nehmen daher (wie unter der oben angeführten Nr.) an, daß $\mu = \nu\pi$, und daß alle diejenigen Glieder der umgeformten Gleichung für y, deren Exponenten durch π nicht theilbar sind, verschwinden sollen; so daß, $y^\pi = z$ gesetzt, die Gleichung (c) sich in folgende verwandelt

$$z^\nu + Dz^{\nu-1} + Kz^{\nu-2} + \text{ꝛc.} + V = 0,$$

diese Gleichung wird ν Wurzeln haben, die wir durch z', z'', z''', ꝛc. $z^{(\nu)}$ anzeigen wollen: und da aus der Gleichung $y^\pi = z$ folget $y = \sqrt[\pi]{z}$, oder vielmehr (wenn die π Wurzeln der Gleichung $y^\pi - 1 = 0$, durch $1, \alpha, \alpha^2$, ꝛc. $\alpha^{\pi-1}$ angezeiget werden); $y = \sqrt[\pi]{z}$, $\alpha\sqrt[\pi]{z}$, $\alpha^2\sqrt[\pi]{z}$, ꝛc. $\alpha^{\pi-1}\sqrt[\pi]{z}$: so wird man, indem man für z successiv die ν Wurzeln z', z'', z''', ꝛc. und zur Abkürzung

$$\zeta' = \sqrt[\pi]{z'};\quad \zeta'' = \sqrt[\pi]{z''};\quad \zeta''' = \sqrt[\pi]{z'''}, \text{ ꝛc.}$$

setzet, man wird, sage ich, folgende μ Werthe von y erhalten

ζ',

$$\zeta',\quad \alpha\zeta',\quad \alpha^2\zeta',\quad \alpha^3\zeta',\ \text{ꝛc.}\quad \alpha^{\pi-1}\zeta'$$
$$\zeta'',\quad \alpha\zeta'',\quad \alpha^2\zeta'',\quad \alpha^3\zeta'',\ \text{ꝛc.}\quad \alpha^{\pi-1}\zeta''$$
$$\zeta''',\quad \alpha\zeta''',\quad \alpha^2\zeta''',\quad \alpha^3\zeta''',\ \text{ꝛc.}\quad \alpha^{\pi-1}\zeta'''$$
ꝛc.
$$\zeta^{(\nu)},\quad \alpha\zeta^{(\nu)},\quad \alpha^2\zeta^{(\nu)},\quad \alpha^3\zeta^{(\nu)},\ \text{ꝛc.}\quad \alpha^{\pi-1}\zeta^{(\nu)}$$

welche mit den Wurzeln y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\mu)}$ einerley ſeyn werden.

Setzt man nun nach und nach in der Hülfsgleichung (b) Nr. 51., dieſe Werthe ſtatt y, und zugleich x', x'', x''', ꝛc. ſtatt x (Nr. 53.) ſo erhält man folgende μ Gleichungen

$$x'^{\varrho} + fx'^{\varrho-1} + gx'^{\varrho-2} + \text{ꝛc.} + 1 + \zeta' = 0$$
$$x''^{\varrho} + fx''^{\varrho-1} + gx''^{\varrho-2} + \text{ꝛc.} + 1 + \alpha\zeta' = 0$$
$$x'''^{\varrho} + fx'''^{\varrho-1} + gx'''^{\varrho-2} + \text{ꝛc.} + 1 + \alpha^2\zeta' = 0$$
ꝛc.
$$(x^{(\pi+1)})^{\varrho} + f(x^{(\pi+1)})^{\varrho-1} + g(x^{(\pi+1)})^{\varrho-2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ 1 + \zeta'' = 0$$
$$(x^{(\pi+2)})^{\varrho} + f(x^{(\pi+2)})^{\varrho-1} + g(x^{(\pi+2)})^{\varrho-2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ 1 + \alpha\zeta'' = 0$$
$$(x^{(\pi+3)})^{\varrho} + f(x^{(\pi+3)})^{\varrho-1} + g(x^{(\pi+3)})^{\varrho-2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ 1 + \alpha^2\zeta'' = 0$$
ꝛc.
$$(x^{(2\pi+1)})^{\varrho} + f(x^{(2\pi+1)})^{\varrho-1} + g(x^{(2\pi+1)})^{\varrho-2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ 1 + \zeta''' = 0$$
$$(x^{(2\pi+2)})^{\varrho} + f(x^{(2\pi+2)})^{\varrho-1} + g(x^{(2\pi+2)})^{\varrho-2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ 1 + \alpha\zeta''' = 0$$
$$(x^{(2\pi+3)})^{\varrho} + f(x^{(2\pi+3)})^{\varrho-1} + g(x^{(2\pi+2)})^{\varrho-2} + \text{ꝛc.}$$
$$+ 1 + \alpha^2\zeta''' = 0$$
ꝛc.

Da man aber in diesem Falle $\varrho = \nu(\pi - 1) = \mu - \nu$ (Nr. 52.) setzen muß, und da die Anzahl der unbestimmten Größen f, g, ꝛc. l auch $\mu - \nu$ ist, so ist klar, daß wenn man in den μ gefundenen Gleichungen, die ν Größen ζ', ζ'', ζ''', ꝛc. $\zeta^{(\nu)}$ eliminirt, $\mu - \nu$ Gleichungen übrig bleiben werden, welche zur Bestimmung der $\mu - \nu$ unbekannten Größen, f, g, ꝛc. l dienen werden.

Wir wollen uns nunmehr vorstellen, als habe man durch die gewöhnlichen Eliminationsregeln, einen Ausdruck für f gefunden, (und man wird eben dergleichen Schlüsse auch für jede andere der unbestimmten Größen g ꝛc. l machen können.) Suchet man nun alle verschiedene Werthe von f, welche aus der gegenseitigen Verwechselung der μ Wurzeln x′, x″, ꝛc. entspringen können, so wird man dadurch die Wurzeln der Gleichung für f erhalten, welche demnach von einem Grade seyn wird, dessen Exponent der Anzahl dieser verschiedenen Werthe gleich ist.

Die μ Wurzeln x′, x″, ꝛc. werden aber im Allgemeinen $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu$ Versetzungen zulassen. Man muß aber von dieser Anzahl diejenigen Versetzungen abrechnen, welche in dem Ausdrucke für f keine Aenderung machen können.

Ich bemerke daher zuerst, daß, wenn man die Wurzeln x′, x″, ꝛc. $x^{(\pi)}$ respective mit $x^{(\pi+1)}$, $x^{(\pi+2)}$, ꝛc. $x^{(2\pi)}$, oder mit $x^{(2\pi+1)}$, $x^{(2\pi+2)}$, ꝛc. $x^{(3\pi)}$, u. s. f. verwechselt, hieraus in den obigen Gleichungen die nemlichen Veränderungen entspringen werden, als wenn man ζ' mit ζ'' oder ζ''' u. s. f. verwechselt; so daß die Verwechselungen der Größen ζ', ζ'', ζ''', ꝛc. gleichgeltend seyn werden, mit den Verwechselungen der Wurzeln x′, $x^{(\pi+1)}$, $x^{(\pi+2)}$, ꝛc. wenn

man

man zugleich die analogen Verwechselungen der Wurzeln x'', $x^{(\pi+2)}$, $x^{(2\pi+2)}$, ꝛc., und eben so der Wurzeln x''', $x^{(\pi+3)}$, $x^{(2\pi+3)}$, ꝛc. damit verbindet.

Da man aber bey der Bestimmung der Coefficienten f, g, ꝛc. die Größen ζ', ζ'', ζ''', ꝛc. durch die Elimination wegschaffen muß, so wird es ganz gleichgültig seyn, auf was für eine Art man dieselben unter einander verwechselt habe: folglich wird aus ihrer Verwechselung keine Aenderung in den Werthen von f, g, ꝛc. entstehen. Nun ist die Anzahl dieser Größen ν, und sie lassen $1.2.3\ldots\nu$ Versetzungen zu, und eben so viele Verwechselungen der μ Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\mu)}$ werden demnach nichts Verschiedenes geben. Demnach wird sich in der Totalsumme $1.2.3\ldots\mu$ aller partikulären Werthe von f, jeder Werth $1.2.3\ldots\nu$ mahl finden, und so behalten wir blos $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu}$ verschiedene Veränderungen.

63.

Betrachtet man nun die gegenseitigen Verwechselungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\pi)}$, und vergleicht man zugleich die π ersten Gleichungen Nr. 62, welche diese Wurzeln enthalten, so wird man ganz ähnliche Schlüsse als Nr. 55, machen können, und man wird sich überzeugen, daß die Vertauschung der Wurzel x', mit den übrigen x'', x''', ꝛc. $x^{(\pi)}$ keine Aenderung in den Werthen von f, g, ꝛc. hervorbringen kann, weil diese Vertauschungen, nichts anders geben, als wenn man $\alpha\zeta'$, $\alpha^2\zeta'$, $\alpha^3\zeta'$ ꝛc. $\alpha^{\pi-1}\zeta'$ an die Stelle von ζ gesetzt hätte.

Demnach kann die Anzahl der verschiedenen Werthe von f, g, ꝛc. nicht grösser seyn, als $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu}$ dividiret durch π.

Man wird ganz ähnliche Schlüsse bey Betrachtung der π Wurzeln $x^{(\pi+1)}$, $x^{(\pi+2)}$, $x^{(\pi+3)}$, ꝛc. $x^{(2\pi)}$, desgleichen der Wurzeln $x^{(2\pi+1)}$, $x^{(2\pi+2)}$, $x^{(2\pi+3)}$, ꝛc. $x^{(3\pi)}$ u. s. f. machen können, und da die Combinationen dieser Wurzeln ganz unabhängig von einander sind, so folgt, daß man die Zahl $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu}$, durch π so vielmal wird dividiren müssen, als vielmal in jedem dieser Systeme von π Wurzeln, die Größen ζ', ζ'', ζ''', ꝛc. $\zeta^{(\nu)}$ vorkommen, d. h. ν mal.

Demnach kann die Anzahl der verschiedenen Werthe von f, g, ꝛc. nicht grösser seyn, als $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu\pi^{\nu}}$: die Gleichung für f kann demnach nicht höher steigen, als auf diesen Grad.

Dies stimmt mit demjenigen überein, was wir Nr. 52, gegen das Ende, gefunden haben. Es fällt in die Augen, daß die Zahl $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu\pi^{\nu}}$ einerley ist, mit $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots\mu}{\nu\pi^{\nu}}$ oder (weil $\mu = \nu\pi$) mit $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\mu-1)}{\pi^{\nu-1}}$.

64.

Die reducirte Gleichung für f, wird demnach im Allgemeinen von dem Grade $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\mu-1)}{\pi^{\nu-1}}$ seyn:

allein

allein man wird diese Gleichung jederzeit, durch ähnliche Betrachtungen, als Nr. 57 und 59, auf einen noch niedrigern Grad bringen können. Und ist π eine Primzahl, so ist es nicht schwer durch ähnliche Schlüsse als Nr. 56. zu beweisen, daß man für die Verwechselungen der Wurzeln x', $x^{(\pi+1)}$, $x^{(2\pi+1)}$, ꝛc. mit x'', $x^{(\pi+2)}$, $x^{(2\pi+2)}$, ꝛc. desgleichen mit x''', $x^{(\pi+3)}$, $x^{(2\pi+3)}$, ꝛc., die successive Vertauschung der Potenzen α^2, α^3, ꝛc. $\alpha^{\pi-1}$ gegen α, in dem Ausdruck für f, wird brauchen dürfen: so daß man, wenn in dem Ausdrucke für f, y für α gesetzt, und dann dies y durch die Gleichung $\frac{y^\pi - 1}{y - 1} = 0$ d. i. durch

$$y^{\pi-1} + y^{\pi-2} + y^{\pi-3} + \text{ꝛc.} + 1 = 0$$

eliminiret wird, daß man, sage ich alsdenn für f eine Gleichung von folgender Form erhalten wird

$$f^{\pi-1} + F.f^{\pi-2} + G.f^{\pi-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

und diese wird ein Divisor der reducirten Gleichung für f seyn; und von den Coefficienten F, G, ꝛc. wird jeder durch eine Gleichung von dem Grade $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\mu-1)}{(\pi-1)\pi^{\nu-1}}$ bestimmt werden. Hierdurch erhält man eben so viele Divisoren für die reducirte Gleichung, jeden vom Grade $\pi - 1$.

Wenn ν keine Primzahl ist, so muß man wie Nr. 60. eine Gleichung suchen, deren Wurzeln, diejenigen Potenzen von α sind, deren Exponenten relative Primzahlen gegen ν, sind, die Einheit mit einbegriffen. Bezeichnet man nun diese Gleichung auf folgende Art

$$y^\lambda + \mathfrak{A}y^{\lambda-1} + \text{ꝛc.} + \mathfrak{B}y + 1 = 0$$

so wird man vermittelst derselben y, aus dem Ausdrucke für f eliminiren können, und so wird man für f eine Gleichung von folgender Form erhalten

$$f^{\lambda} + F.f^{\lambda-1} + G.f^{\lambda-2} + \text{ꝛc.} = 0$$

in welcher jeder Coefficient F, G, ꝛc. blos von einer Gleichung vom Grade $\frac{\nu(\nu+1)(\nu+2)\ldots(\mu-1)}{\lambda\pi^{\nu-1}}$ abhängt; so daß man demnach eben so viele Werthe für F, G, ꝛc. und folglich eben so viele Gleichungen für f, jede vom Grade λ, erhält; und diese werden die Divisoren der reducirten Gleichung für f seyn.

Es sey z. B. $\mu = 6$, so wird man 1) $\nu = 3$, $\pi = 2$ setzen können, und die reducirte Gleichung für f, wird von dem Grade $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{2^2} = 15$; und weil $\pi - 1 = 1$, so wird sie sich nach der obigen Methode auf keinen niedrigern Grad bringen lassen.

2) Man setze $\nu = 2$ und $\pi = 3$, so wird man für den Grad der reducirten Gleichung für f, die Zahl $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}{3} = 40$ erhalten; und da $\pi - 1 = 2$, so wird man diese reducirte Gleichung in 20 Gleichungen vom 2ten Grade auflösen können, und dies mittest einer Gleichung vom 20sten Grade.

65.

Wir kehren nunmehr wieder zu den Formeln Nr. 51. zurück. Es ist klar, daß man die gegebene Gleichung (a), als das Resultat einer Elimination aus den beyden Gleichungen b und c ansehen kann. Sieht man nun die Coefficienten

cienten A, B, C, ꝛc. der Gleichung für y, als gegeben, die Coefficienten F, G, ꝛc. hingegen des Ausdrucks für x durch y, als unbestimmt an, so wird man durch Vergleichung der Glieder derjenigen Gleichung, die man durch die Elimination von y erhält, mit den Gliedern der gegebenen Gleichung, die letztern Coefficienten bestimmen können, vorausgesetzt, daß ihre Anzahl nicht kleiner als μ sey, welches man nicht zu befürchten hat, wenn man $\lambda = \frac{\mu}{2}$ oder $= \frac{\mu - 1}{2}$ setzet: und wenn man die Gleichung für y so angenommen hat, daß sie sich auflösen lässet, welches man auf unzählige Arten erhalten kann. Auf diese Art wird man eine vollständige Auflösung der gegebenen Gleichung erhalten; die Schwierigkeit wird aber in der Bestimmung der unbestimmten Coefficienten F, G, ꝛc. liegen.

Man wird indessen oft diese Bestimmung, so wie auch die Elimination von y erleichtern können, wenn man den durch die Gleichung (d) gegebenen Ausdruck für x, in einen andern verwandelt, wo das unbekannte y, blos im Zähler vorkommt, und dies kann man jederzeit dadurch erhalten, daß man den Zähler und Nenner des Bruches

$$\frac{F + Gy + Hy^2 + \text{ꝛc.} + Ky^\lambda}{L + My + Ny^2 + \text{ꝛc.} + Ry^\lambda}$$

mit einem schicklichen Polynom von y multipliciret. Dieses kann man auf folgende Art finden.

Man setze

$$z = L + My + Ny^2 + \text{ꝛc.} + Ry^\lambda$$

und da y durch die Gleichung

$$y^\mu + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + \text{ꝛc.} = 0$$

 bestimmt

bestimmt ist, so eliminire man y mittelst dieser Gleichung, welches eine Gleichung für z vom Grade μ geben wird, die sich folgendermaßen vorstellen lässet

$$z^{\mu} + \alpha z^{\mu-1} + \beta z^{\mu-2} + \gamma z^{\mu-3} + \text{ꝛc.} - \omega = 0$$

worin folglich die Coefficienten α, β, γ, ꝛc. ω bekannte Funktionen von A, B, C, ꝛc. und L, M, N, ꝛc. seyn werden.

Nun ist

$$z(z^{\mu-1} + \alpha z^{\mu-2} + \beta z^{\mu-3} + \text{ꝛc.}) = \omega$$

und hieraus siehet man, daß die Größe z gleich seyn wird ω, multipliciret in das Polynom

$$z^{\mu-1} + \alpha z^{\mu-2} + \beta z^{\mu-3} + \text{ꝛc.}$$

folglich unabhängig von y.

Setzt man nun in diesem Polynom für z seinen Werth durch y, so erhält man das gesuchte Polynom, in welches man, wenn man will, bloß niedrigere Potenzen als y^{μ} bringen kann, indem man vermittelst der Gleichung $y^{\mu} + Ay^{\mu-1} + \text{ꝛc.} = 0$ jederzeit bewerkstelligen kann, daß die Potenzen von y, welche höher als y^{μ} sind, in die Klasse der niedrigern übergehen.

Auf diese Art kann man die Gleichung (d) auf folgende Form bringen

$$x = a + by + cy^2 + \text{ꝛc.} + ky^{\mu-1} \ldots (k)$$

so daß man jederzeit die gegebene Gleichung

$$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + \text{ꝛc.} = 0 \ldots (a)$$

so betrachten kann, als wäre sie durch eine Elimination von y, vermittelst der Gleichung

$$y^{\mu} + Ay^{\mu-1} + By^{\mu-2} + \text{ꝛc.} + V = 0 \ldots (c)$$

und der Gleichung (k) entstanden. Man sehe hierauf die Coefficienten a, b, c, ꝛc. k, deren Anzahl μ ist, als unbestimmt an, an, und wenn man nun die aus der Elimination von y entspringende Gleichung Glied vor Glied, mit der gegebenen vergleichet, so erhält man μ Bedingungen, welche zu der Bestimmung der unbestimmten Größen a, b, c, 2c. dienen werden.

Reduciret man die Gleichung für y auf zwey Glieder $y^{\mu} \dotplus V = 0$, so wird die obige Methode, mit der in gegenwärtiger Abhandlung öfters erwähnten Methode von Euler und Bezout, auf eins hinauslaufen. Das Detail aber in welches wir uns so eben eingelassen haben, nähert sie der Tschirnhausenschen Methode, und zeigt ihre Aehnlichkeit und natürlichen Zusammenhang mit derselben.

66.

Da alles auf die Bestimmung der μ unbekannten Größen a, b, c, 2c. k, durch Vergleichung der Glieder der gegebenen, und der durch Elimination von y entstandenen Gleichung, ankommt, so bemerken wir in Ansehung der letzteren, daß sie nothwendig durch eine rationale und ganze Funktion, der Größen a, b, c, 2c. k und x ausgedruckt seyn wird, deren aus diesen Größen bestehende Glieder durchgehends von μ Dimensionen seyn werden, wie man leicht aus der Nr. 13. vorgetragenen Theorie der Elimination beurtheilen kann. Ordnet man demnach diese Gleichung nach x, so werden die sämtlichen Coefficienten derselben rationale, ganze und homogene Funktionen der Größen a, b, c, 2c. k seyn, deren Dimensionen respectiv 0, 1, 2, 3, 2c. für die Potenzen x^{μ}, $x^{\mu-1}$, $x^{\mu-2}$, $x^{\mu-3}$, 2c. seyn werden.

Das erste Glied x^{μ} wird demnach blos die Einheit zum Coefficienten haben. Das zweyte Glied wird zum Coefficienten eine Größe haben, von der Form $\alpha a + \beta b + \gamma c +$ ꝛc. wo α, β, γ, ꝛc. Zahlencoefficienten sind. Das dritte Glied wird zum Coefficienten eine Größe haben von der Form $\alpha a^2 + \beta ab + \gamma b^2 + \delta ac +$ ꝛc. u. s. f.

Setzet man nun den Coefficienten des zweyten Gliedes $= m$, den des dritten $= n$, u. s. f. so erhält man μ Gleichungen für die μ unbekannten Größen a, b, c, ꝛc. k; von welchen Gleichungen die erste blos vom ersten Grade, die zweyte vom zweyten, die dritte vom dritten, u. s. f. seyn wird. Werden nun diese unbekannten Größen, bis auf irgend eine derselben eliminiret, so wird man für diese im Allgemeinen eine Endgleichung von dem Grade $1 . 2 . 3 \ldots \mu$ erhalten. Dies widerspricht Eulers Meinung, stimmt aber mit dem überein, was Bezout durch Induction gefunden hat.

67.

Um diese Behauptung über den Grad der Gleichungen für a, oder b, oder c, u. s. f. noch mehr zu bestätigen, und zugleich zu entdecken, in welchen Fällen sich diese Gleichungen einfacher machen lassen, wollen wir a priori den Ausdruck für die Größen a, b, c, ꝛc. durch die Wurzeln der gegebenen Gleichung x', x'', x''', ꝛc. zu bestimmen suchen.

Wir setzen also, wie Nr. 54 $\sqrt[\mu]{-V} = u$. Wenn wir nun die μ Wurzeln der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$, mit $1, \alpha, \beta, \gamma$, ꝛc. bezeichnen; so sind $u, \alpha u, \beta u, \gamma u$, ꝛc. die μ Wurzeln der Gleichung $y^\mu + V = 0$. Setzt man nun diese Wurzeln nach und nach in die Gleichung (k) Nr. 65., statt y, und setzt man zugleich die Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. statt x, so erhält man folgende μ Gleichungen

$x' =$

$$
\begin{aligned}
x' &= a + bu + cu^2 + du^3 + \text{ꝛc.} + ku^{\mu-1}\\
x'' &= a + \alpha bu + \alpha^2 cu^2 + \alpha^3 du^3 + \text{ꝛc.} + \alpha^{\mu-1}ku^{\mu-1}\\
x''' &= a + \beta bu + \beta^2 cu^2 + \beta^3 du^3 + \text{ꝛc.} + \beta^{\mu-1}ku^{\mu-1}\\
x'''' &= a + \gamma bu + \gamma^2 cu^2 + \gamma^3 du^3 + \text{ꝛc.} + \gamma^{\mu-1}ku^{\mu-1}\\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

durch welche man die μ unbekannten Größen a, b, c, ꝛc. wird beſtimmen können.

Dieſe Beſtimmung hat keine Schwierigkeiten; denn da $1, \alpha, \beta, \gamma$, ꝛc. die Wurzeln der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$ ſind, in welcher alle Mittelglieder fehlen, ſo iſt bekanntlich

$$
\begin{aligned}
1 + \alpha + \beta + \gamma + \text{ꝛc.} &= 0\\
1 + \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \text{ꝛc.} &= 0\\
1 + \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \text{ꝛc.} &= 0\\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

d. h. wenn man die ſämmtlichen Wurzeln zu einer und derſelben Poteſtät erhebt, ſo wird ihre Summe $= 0$ ſeyn, wenn der Exponent der Potenz nicht durch μ theilbar iſt; was aber die Potenzen betrift, deren Exponenten Vielfache von μ ſind, ſo erhellet, aus eben der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$, daß $\alpha^\mu = 1$; $\alpha^{2\mu} = 1$; u. ſ. f. ſeyn werde.

Wenn man nun die obigen μ Gleichungen addiret, nachdem man ſie vorher mit den correſpondirenden Wurzeln $1, \alpha, \beta$, ꝛc., die man nach und nach zu der μten, $(\mu - 1)$ten, $(\mu - 2)$ten ꝛc. Potenz, bis zu der erſten incluſive erheben muß, Reihe vor Reihe, multipliciret hat, ſo erhält man

$$
\begin{aligned}
\mu a &= x' + x'' + x''' + x'''' + \text{ꝛc.}\\
\mu ub &= x' + \alpha^{\mu-1}x'' + \beta^{\mu-1}x''' + \gamma^{\mu-1}x'''' + \text{ꝛc.}
\end{aligned}
$$

$\mu u^2 c$

$$\mu u^2 c = x' + \alpha^{\mu-2} x'' + \beta^{\mu-2} x''' + \gamma^{\mu-2} x'''' + \text{rc.}$$

$$\mu u^3 d = x' + \alpha^{\mu-3} x'' + \beta^{\mu-3} x''' + \gamma^{\mu-3} x'''' + \text{rc.}$$

rc.

Man siehet hieraus, daß die Größe a, nur durch eine Gleichung von einer Dimension gegeben wird, indem sie unverändert denselben Werth behält, was man auch für Versetzungen mit den Wurzeln x', x'', rc. vornehmen mag; und da $x' + x'' + x''' + \text{rc.} = -m$, so ist wirklich $a = -\frac{m}{\mu}$.

Was die übrigen Größen ub, u^2c, u^3d, rc. betrift, so wird jede derselben im Allgemeinen durch eine Gleichung bestimmt werden, deren Höhe die Anzahl aller möglichen Verwechselungen der μ Wurzeln x', x'', x''', rc. gleich ist; und diese Anzahl ist bekanntlich $1.2.3\ldots\mu$: denn jede dieser Versetzungen wird einen eigenen Werth für die Größen ub, u^2c, u^3d, rc. geben. Diese Werthe aber können solche Verhältnisse unter einander haben, daß dennoch die Gleichung, deren Wurzeln sie sind auf einen niedrigern Grad gebracht werden kann. Dies wollen wir im folgenden untersuchen.

68.

In dieser Absicht bemerken wir zuerst, daß man der Größe u, weil sie unbestimmt bleibt, jeden willkührlichen Werth geben kann. Die einfachste Voraussetzung ist, wenn man mit Bezout $u = 1$ setzet, woraus $V = -u^\mu = -1$ folgt. Wir werden also diese Voraussetzung zum Grunde legen, und zugleich

$$k = \frac{a'}{\mu}; \quad h = \frac{a''}{\mu}; \text{ rc. } b = \frac{a^{(\mu-1)}}{\mu}$$

setzen,

setzen, wodurch die Formeln folgende einfachere Gestalt erhalten

$$\begin{array}{llllll}
a' & = x' + & \alpha x'' + & \beta x''' + & \gamma x'''' + \text{ꝛc.} \\
a'' & = x' + & \alpha^2 x'' + & \beta^2 x''' + & \gamma^2 x'''' + \text{ꝛc.} \\
a''' & = x' + & \alpha^3 x'' + & \beta^3 x''' + & \gamma^3 x'''' + \text{ꝛc.} \\
 & & \text{ꝛc.} & & \\
a^{(\mu-1)} & = x' + & \alpha^{\mu-1} x'' + & \beta^{\mu-1} x''' + & \gamma^{\mu-1} x'''' + \text{ꝛc.}
\end{array}$$

Wir wollen zuerst unsere Aufmerksamkeit auf den Ausdruck für die Größe a' richten. Da die Wurzeln der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$, welche wir durch $1, \alpha, \beta, \gamma$, ꝛc. vorgestellet haben, auch durch $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$, ꝛc. (Nr. 24.) ausgedruckt werden können, so haben wir $\beta = \alpha^2$; $\gamma = \alpha^3$, ꝛc. so daß nunmehr seyn wird

$$a' = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x'''' + \text{ꝛc.} + \alpha^{\mu-1} x^{(\mu)}$$

Die Werthe der übrigen Größen a'', a''', ꝛc. zu erhalten, ist nichts nöthig, als daß man in diesem Ausdrucke für a', statt α, die Potenzen α^2, α^3, ꝛc. setze. Hieraus, und aus dem, was oben Nr. 56. erwiesen worden, läßt sich sogleich schliessen, daß wenn der Exponent μ der gegebenen Gleichung eine Primzahl ist, die Größen a', a'', a''', ꝛc. Wurzeln einer und derselben Gleichung seyn werden; dies wird sich aber nicht so verhalten, wenn μ eine zusammengesetzte Zahl ist. Aus diesem Grunde werden wir in der Folge die Fälle, wenn μ eine einfache, oder zusammengesetzte Zahl ist, unterscheiden müssen.

69.

Wir wollen allgemein annehmen

$$t = x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x'''' + \text{ꝛc.} + \alpha^{\mu-1} x^{(\mu)},$$

und überlegen, wie die Gleichung für t beschaffen seyn müsse.

In

In dieser Absicht suche man alle partikularen Werthe von t, welche durch die $1.2.3\ldots\mu$ Versetzungen herauskommen, die unter den μ Wurzeln x', x'', ꝛc. möglich sind; und man befolge bey dieser Untersuchung eine ähnliche Methode als Nr. 55. Man betrachte also die Größe x' als feststehend, und lasse blos die übrigen $\mu - 1$ Größen ihre Stellen ändern, so werden die unter ihnen möglichen $1.2.3\ldots(\mu-1)$ Verwechselungen eben so viele partikulare Werthe von t geben, welche wir durch t', t'', t''', ꝛc. bezeichnen wollen. Nun lasse man in dem Ausdrucke eines jeden dieser Werthe x', seine Stelle ändern, indem man dasselbe nach und nach mit x'', x''', ꝛc. verwechselt, so wird man die $1.2.3\ldots\mu$ gesuchten Werthe erhalten, welche die Wurzeln der gegebenen Gleichung für t seyn müssen.

Man wird aber leicht bemerken, daß man um alle diese Werthe zu erhalten, nur jeden der Werthe t', t'', t''', ꝛc. nach und nach mit α, α^2, α^3, ꝛc. $\alpha^{\mu-1}$ multipliciren darf, so daß sich die Wurzeln der Gleichung für t, auf folgende Art ausdrücken lassen.

$$t',\ \alpha t',\ \alpha^2 t',\ \alpha^3 t'\ \text{ꝛc.}\ \alpha^{\mu-1} t'$$
$$t'',\ \alpha t'',\ \alpha^2 t'',\ \alpha^3 t'',\ \text{ꝛc.}\ \alpha^{\mu-1} t''$$
$$t''',\ \alpha t''',\ \alpha^2 t''',\ \alpha^3 t''',\ \text{ꝛc.}\ \alpha^{\mu-1} t'''$$
ꝛc.

Hieraus läßt sich aber leicht schließen, daß die Gleichung für t, nur solche Potenzen von t enthalten wird, welche Vielfache von μ sind.

Hieraus folget nun, daß wenn man $t^\mu = \vartheta$ setzet, so daß

$$\vartheta = (x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x'''' + \text{ꝛc.})^\mu$$

die

die Gleichung für ϑ vom Grade $1.2.3\ldots(\mu-1)$ seyn wird, und ihre Wurzeln werden die Werthe von ϑ seyn, welche blos aus den Versetzungen der $\mu-1$ Wurzeln x'', x''', rc. entspringen, ohne auf die Wurzel x' Rücksicht zu nehmen.

Dieser Schluß bleibt richtig, von welcher Art auch die Zahl μ seyn mag. Wir wollen nunmehr die beyden Fälle, wenn μ eine Primzahl ist, oder nicht, einzeln untersuchen.

70.

Wir nehmen also an, daß μ eine Primzahl sey, und bemerken, daß, um alle Werthe von ϑ zu finden, es hinlänglich seyn wird, blos die zu suchen, welche aus der Versetzung der $\mu-2$ Wurzeln x''', x'''', rc. entspringen, deren Anzahl also $=1.2.3\ldots(\mu-2)$ seyn wird, und dann in dem Ausdrucke eines jeden dieser Werthe α^2, α^3, rc. $\alpha^{\mu-1}$ für α zu setzen. Man kann sich hiervon leicht durch ähnliche Schlüsse als Nr. 56. überzeugen.

Nimmt man nun an, daß die $\mu-1$ Werthe von ϑ, welche aus der Substitution von α^2, α^3, rc. $\alpha^{\mu-1}$ für α, in dem obigen Ausdruck für ϑ entstehen, die Wurzeln folgender Gleichung, vom $(\mu-1)$ten Grade sind

$$\vartheta^{\mu-1} - T\vartheta^{\mu-2} + U\vartheta^{\mu-3} - X\vartheta^{\mu-4} + \text{rc.} = 0,$$

so folget (Nr. 57.) daß jeder der Coefficienten T, U, X, rc. durch eine Gleichung vom $1.2.3\ldots(\mu-2)$ten Grade gegeben seyn wird; so daß die Gleichung für ϑ vom $1.2.3\ldots(\mu-1)$ten Grade, sich in $1.2.3\ldots(\mu-2)$ Gleichungen, jede vom $(\mu-1)$ten Grade, wird zerfällen lassen, und zwar mittelst einer Gleichung vom $1.2.3\ldots(\mu-2)$ten Grade: denn wenn man einen der Coefficienten T, U, X, rc. gefunden hat,

so

so wird man leicht durch Auflösung einer Gleichung von diesem Grade, alle übrigen erhalten können.

71.

Da die $\mu - 1$ Wurzeln der Gleichung $\vartheta^{\mu-1} - T\vartheta^{\mu-2} + U\vartheta^{\mu-3} - X\vartheta^{\mu-4} +$ ꝛc. $= 0$ die Werthe von ϑ, d. h. von $(x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' +$ ꝛc.$)^\mu$ sind, welche man erhält, indem α nach und nach in α^2, α^3, ꝛc. $\alpha^{\mu-1}$ verwandelt wird, so folgt aus dem was Nr. 68. gesagt worden, daß die Wurzeln dieser Gleichung, genau die Werthe der μten Potenzen von den Größen a', a'', a''', ꝛc. ausdrucken werden.

Bezeichnet man nun diese Wurzeln durch ϑ', ϑ'', ϑ''', ꝛc. $\vartheta^{(\mu-1)}$, so ist

$$b = \frac{\sqrt[\mu]{\vartheta'}}{\mu}; \quad c = \frac{\sqrt[\mu]{\vartheta''}}{\mu}; \quad d = \frac{\sqrt[\mu]{\vartheta'''}}{\mu} \text{ ꝛc.}$$

Um nun die Gleichung, um welche es uns zu thun ist, ohne Schwierigkeit zu finden, muß man das Polynom

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x'''' + \text{ꝛc.}$$

zu der Potenz μ erheben; und wenn man bemerkt, daß $\alpha^\mu = 1$, $\alpha^{\mu-1} = \alpha$, ꝛc., so wird man für ϑ einen Ausdruck von folgender Form erhalten

$$\vartheta = \xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \text{ꝛc.} + \alpha^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$

wo ξ, ξ', ξ'', ꝛc. Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. ohne α, seyn werden. Man verwandelt α in y, und eliminiret alsdenn y mittelst der Gleichung g Nr. 57; will man hiebey nicht die gewöhnliche Art zu eliminiren brauchen, so kann man sich folgender bedienen.

72.

Da $\beta = \alpha^2$; $\gamma = \alpha^3$ (Nr. 68.) so hat man

$$\vartheta' = \xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \text{2c.} + \alpha^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$
$$\vartheta'' = \xi + \beta\xi' + \beta^2\xi'' + \beta^3\xi''' + \text{2c.} + \beta^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$
$$\vartheta''' = \xi + \gamma\xi' + \gamma^2\xi'' + \gamma^3\xi''' + \text{2c.} + \gamma^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$
$$\text{2c.}$$

und α, β, γ, 2c. nebst 1 sind die Wurzeln der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$.

Sind nun die Wurzeln der Gleichung für ϑ bekannt, so kann man vermittelst derselben die Werthe der Coefficienten T, U, X, 2c. bestimmen, denn es ist bekanntlich

$$T = \vartheta' + \vartheta'' + \vartheta''' + \text{2c.}$$
$$U = \vartheta'\vartheta'' + \vartheta'\vartheta''' + \text{2c.}$$
$$\text{2c.}$$

Man wird oft diese Bestimmung erleichtern können, wenn man die Summe der 1sten, 2ten, 3ten, 2c. bis μten Potenzen der Wurzeln ϑ', ϑ'', ϑ''', 2c. suchet; und in dieser Absicht wird es gut seyn, wenn man die Größe

$$\vartheta^0 = \xi + \xi' + \xi'' + \xi''' + \text{2c.} + \xi^{(\mu-1)}$$

in die Rechnung bringt; so daß die Größen ϑ^0, ϑ', ϑ'', 2c. den Wurzeln 1, α, β, 2c. der Gleichung $y^\mu - 1 = 0$ entsprechen.

Erhebt man aber das Polynom

$$\xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \text{2c.} + \alpha^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$

nach und nach zu der 2ten, 3ten, 2c. Potenz, und bezeichnet man mit $\xi 2$, $\xi 3$, $\xi 4$, 2c. diejenigen Glieder dieser Potenzen, welche, nachdem man 1 für α^μ, α für $\alpha^{\mu+1}$ u. s. f. gesetzt hat, gar kein α mehr enthalten, so läßt sich aus der eigenthümlichen Beschaffenheit der Größen 1, α, β, γ, ꝛc. (Nr. 67.) leicht beurtheilen, daß die Summen der 1sten, 2ten, 3ten, ꝛc. Potenzen, der Größen ϑ°, ϑ', ϑ'', ꝛc. sich auf $\mu\xi$, $\mu\xi 2$, $\mu\xi 3$, ꝛc. reduciren werden.

Es ist aber $\vartheta^{\circ} = \xi + \xi' + \xi'' + \xi''' +$ ꝛc. $\xi^{(\mu-1)} = (x' + x'' + x''' +$ ꝛc. $+ x^{(\mu+1)}) = (-m)^{\mu}$; zieht man nun von den Größen $\mu\xi$, $\mu\xi 2$, $\mu\xi 3$, ꝛc. respective die 1ste, 2te, 3te Potenz von $(-m)^{\mu}$ ab, so werden die Reste

$$\mu\xi - (-m)^{\mu}$$
$$\mu\xi 2 - (-m)^{2\mu}$$
$$\mu\xi 3 - (-m)^{3\mu}$$
ꝛc.

gleich seyn den Summen der $\mu - 1$ Wurzeln ϑ', ϑ'', ϑ''', ꝛc. ihrer Quadrate, ihrer Würfel u. s. f. so daß man vermöge der bekannten Formeln findet

$$T = \mu\xi - (-m)^{\mu}$$

$$U = \frac{T(\mu\xi - (-m)^{\mu})}{2} - \frac{\mu\xi 2 - (-m)^{2\mu}}{2}$$

$$X = \frac{U(\mu\xi - (-m)^{\mu})}{2} - \frac{T(\mu\xi 2 - (-m)^{2\mu})}{2}$$
$$+ \frac{\mu\xi 3 - (-m)^{3\mu}}{2}$$

ꝛc.

73.

Machet man nun in den Ausdrücken für T, U, X, ꝛc. mit den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. alle mögliche Verwechselungen, so wird man für jede dieser Größen, nicht mehr als $1.2.3\ldots(\mu-2)$ verschiedene Werthe finden, welche ein-

zig

zig und allein aus den Versetzungen der $\mu - 2$ Wurzeln x''', x'''', ꝛc. entspringen; so daß man eben so viele Gleichungen für ϑ von der Form

$$\vartheta^{\mu - 1} - T\vartheta^{\mu - 2} + U\vartheta^{\mu - 3} - \text{ꝛc.} = 0$$

erhält, welche sämtlich in einander multipliciret, eine Gleichung für ϑ von dem Grade $1.2.3\ldots(\mu - 1)$ geben werden, deren Coefficienten sämtlich durch rationale Funktionen der Coefficienten m, n, p, ꝛc. der gegebenen Gleichung, bestimmbar seyn werden.

Hat man nun auf solche Art diese Gleichung gefunden, und dividiret man dieselbe, durch eine solche Gleichung, als die eben angeführte, vom $(\mu - 1)$ten Grade, so erhält man $\mu - 1$ Bedingungsgleichungen zwischen den Größen T, U, X, ꝛc. durch welche man z. B. die Werthe von U und X ꝛc. für T bestimmen kann, und man wird auf diese Art zu einer Endgleichung für T kommen, welche nicht höher als auf den Grad $1.2.3\ldots(\mu - 2)$ steigen kann.

Da in der That die Größe T, nicht mehr als $1.2.3\ldots(\mu-2)$ verschiedene Werthe haben kann, so wird man, wenn diese Werthe T', T'', T''', ꝛc. $T^{(\nu)}$ heißen, und zur Abkürzung $\nu = 1.2.3\ldots(\mu - 2)$ gesetzt wird, für T eine Gleichung von folgender Form haben

$$T^{\nu} - \pi T^{\nu - 1} + \varrho T^{\nu - 2} - \sigma T^{\nu - 3} + \text{ꝛc.} = 0$$

deren Wurzeln T', T'', T''', ꝛc. sind; so daß man, wenn man will, die Werthe der Coefficienten π, ϱ, σ, ꝛc. aus den Werthen der Wurzeln T', T'', T''', ꝛc. a priori bestimmen kann.

Auf diese Art erhält man die Gleichung für T unmittelbar, ohne erst die Gleichung für ϑ von dem Grade $\nu(\mu-1)$ zu Hülfe zu nehmen; auch wird man eben so unabhängig von dieser letztern Gleichung die Werthe der übrigen Coefficienten U, X, rc. durch T finden können, wie wir dieses weiter unten in dem vierten Abschnitte zeigen werden.

Aus allem was wir bisher vorgetragen haben, folget, daß Eulers und Bezouts Methode nothwendig auf eine reducirte Gleichung von dem Grade $1.2.3\ldots(\mu - 1)$ führen muß, welche sich, wenn der Exponent μ eine Primzahl ist, in $1.2.3\ldots(\mu - 2)$ Faktoren von dem $(\mu - 1)$sten Grade, zerfällen lassen muß.

Dieses Resultat stimmt, wie man siehet, mit dem überein, was die Tschirnhausensche Methode geben würde; so daß man hier ähnliche Betrachtungen, als Nr. 58, anstellen kann.

74.

Um die vorgetragene Theorie durch ein Beyspiel zu erläutern, so sey eine Gleichung vom 5ten Grade gegeben

$$x^5 + mx^4 + nx^3 + px^2 + qx + r = 0$$

Ihre Wurzeln sollen x', x'', x''', x'''', x^v seyn.

Man setze nun

$$x = a + by + cy^2 + dy^3 + ey^4,$$

und betrachte die gegebene Gleichung als das Resultat einer Elimination, aus dieser letztern, und aus der zweygliedrigen Gleichung $y^5 + V = 0$, oder vielmehr (indem man wie Nr. 68, $V = -1$ setzet) $y^5 - 1 = 0$.

Euler und Bezout haben in ihren Abhandlungen über diesen Gegenstand eine Endgleichung gegeben, die durch die Elimination von y erhalten wird, in dem Falle, wenn $m = 0$ und $a = 0$; deren Vergleichung mit der gegebenen die vier Gleichungen liefert, welche nöthig sind, um die Coefficienten

ten b, c, d und e zu bestimmen. Indessen haben diese scharfsinnigen Männer das Resultat nicht angegeben, welches aus diesen vier Gleichungen, durch Eliminirung von irgend dreyen der vier unbekannten Größen, herauskommen muß; die Ursache liegt in der unübersehbaren Arbeit, welche diese Eliminirung erfordert. Die bisher vorgetragene Methode liefert uns Mittel, dieses Resultat a priori zu finden, womit wir sogleich einen Versuch machen wollen.

Wir haben also sogleich (Nr. 67.) $a = -\frac{m}{5}$ und ferner (Nr. 71.)

$$b = \frac{\sqrt[5]{\vartheta'}}{5};\; c = \frac{\sqrt[5]{\vartheta''}}{5};\; d = \frac{\sqrt[5]{\vartheta'''}}{5};\; e = \frac{\sqrt[5]{\vartheta''''}}{5}$$

und ϑ', ϑ'', ϑ''', ϑ'''' sind die vier Wurzeln der Gleichung

$$\vartheta^4 - T\vartheta^3 + U\vartheta^2 - X\vartheta + Y = 0$$

welche ein Divisor einer Gleichung vom 24sten Grade seyn wird, welche man für den Werth von ϑ findet.

Um nun den Werth der Coefficienten T, U, 2c. zu finden, muß man das Polynom

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x'''' + \alpha^4 x^{v}$$

zu der 5ten Potenz erheben, wodurch man, in Rücksicht des Werthes von α^5, (α^6 2c. Nr. 24.) ein anderes Polynom von folgender Form erhält

$$\xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \alpha^4\xi''''$$

in welchem

$$\begin{aligned}\xi = {} & {x'}^5 + {x''}^5 + {x'''}^5 + {x''''}^5 + {x^{v}}^5 + 120x'x''x'''x''''x^{v} \\ & + 20({x'}^3(x''x^{v} + x'''x'''') + {x''}^3(x'x''' + x''''x^{v}) \\ & \quad + {x'''}^3(x'x^{v} + x''x'''') + {x''''}^3(x'x'' + x'''x^{v}) \\ & \quad + {x^{v}}^3(x'x'''' + x''x''')) \\ & + 30(x'({x''}^2{x^{v}}^2 + {x'''}^2{x''''}^2) + x''({x'}^2{x'''}^2 + {x''''}^2{x^{v}}^2) \\ & \quad + x'''({x'}^2{x^{v}}^2 + {x''}^2{x''''}^2) + x''''({x'}^2{x''}^2 + {x'''}^2{x^{v}}^2) \\ & \quad + x^{v}({x'}^2{x''''}^2 + {x''}^2{x'''}^2))\end{aligned}$$

$$\mathfrak{z}' = 5(x'^4x'' + x''^4x''' + x'''^4x'''' + x''''^4x^{\mathrm{V}} + x^{\mathrm{V}4}x') + \text{\&c.}$$
&c.

Man erhält also sogleich

$$T = 5\mathfrak{z} + m^5.$$

Betrachtet man aber den Ausdruck für $\mathfrak{z}$, so bemerkt man, daß die Glieder

$$x'^5 + x''^5 + x'''^5 + x''''^5 + x^{\mathrm{V}5} + 120x'x''x'''x''''x^{\mathrm{V}}$$

unmittelbar durch die Coefficienten m, n, &c. der gegebenen Gleichung ausgedruckt werden können; und es ist nicht schwer zu finden, daß der Werth dieser Glieder

$$-m^5 + 5m^3n - 5m^2p + 5m(q - n^2) + 5np - 125r$$

seyn werde.

Setzet man nun, um die Rechnung einfacher zu machen

$$\begin{aligned} z = {} & 2(x'^3(x''x^{\mathrm{V}} + x'''x'''') + x''^3(x'x''' + x''''x^{\mathrm{V}}) \\ & + x'''^3(x''x'''' + x'x^{\mathrm{V}}) + x''''^3(x'''x^{\mathrm{V}} + x'x'') \\ & + x^{\mathrm{V}3}(x'x'''' + x''x''')) \\ & + 3(x'(x''^2x^{\mathrm{V}2} + x'''^2x''''^2) + x''(x'^2x'''^2 + x''''^2x^{\mathrm{V}2}) \\ & + x'''(x''^2x''''^2 + x'^2x^{\mathrm{V}2}) + x''''(x'''^2x^{\mathrm{V}2} + x'^2x''^2) \\ & + x^{\mathrm{V}}(x'^2x''''^2 + x''^2x'''^2)) \end{aligned}$$

so wird

$$T = 50z - 4m^5 + 25(m^3n - m^2p + m(q - n^2) + np - 25r)$$

und man wird finden, daß die Größe z nicht mehr als folgende sechs Werthe erhalten kann, welche wir durch z', z'', z''', z'''', z^{V}, z^{VI} bezeichnen wollen,

$$\begin{aligned} z' = {} & 2(x'^3(x''x^{\mathrm{V}} + x'''x'''') + x''^3(x'x''' + x''''x^{\mathrm{V}}) \\ & + x'''^3(x''x'''' + x'x^{\mathrm{V}}) + x''''^3(x'''x^{\mathrm{V}} + x'x'') \\ & + x^{\mathrm{V}3}(x'x'''' + x''x''')) \\ & + 3(x'(x''^2x^{\mathrm{V}2} + x'''^2x''''^2) + x''(x'^2x'''^2 + x''''^2x^{\mathrm{V}2}) \\ & + x'''(x''^2x''''^2 + x'^2x^{\mathrm{V}2}) + x''''(x'''^2x^{\mathrm{V}2} + x'^2x''^2) \\ & + x^{\mathrm{V}}(x'^2x''''^2 + x''^2x'''^2)), \end{aligned}$$

$z'' =$

$$\begin{aligned}
z'' = {} & 2(x'^3(x''x'''' + x'''x^V) + x''^3(x'x''' + x''''x^V) \\
& + x'''^3(x''x^V + x'x'''') + x^{V3}(x'''x'''' + x'x'') \\
& + x''''^3(x'x^V + x''x''')) \\
& + 3(x'(x''^2x'''^2 + x''''^2x^{V2}) + x''(x'^2x''^2 + x''''^2x^{V2}) \\
& + x'''(x''^2x^{V2} + x'^2x''''^2) + x^V(x'''^2x''''^2 + x'^2x''^2) \\
& + x''''(x'^2x^{V2} + x''^2x'''^2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z''' = {} & 2(x'^3(x''x^V + x'''x'''') + x''^3(x'x'''' + x'''x^V) \\
& + x''''^3(x''x''' + x'x^V) + x'''^3(x''''x^V + x'x'') \\
& + x^{V3}(x'x''' + x''x'''')) \\
& + 3(x'(x''^2x^{V2} + x'''^2x''''^2) + x''(x'^2x''''^2 + x'''^2x^{V2}) \\
& + x''''(x''^2x'''^2 + x'^2x^{V2}) + x'''(x''''^2x^{V2} + x'^2x''^2) \\
& + x^V(x'^2x'''^2 + x''^2x''''^2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z'''' = {} & 2(x'^3(x''x''' + x''''x^V) + x''^3(x'x'''' + x'''x^V) \\
& + x''''^3(x''x^V + x'x'') + x^{V3}(x'''x'''' + x'x'') \\
& + x'''^3(x'x^V + x''x'''')) \\
& + 3(x'(x''^2x'''^2 + x''''^2x^{V2}) + x''(x'^2x''''^2 + x'''^2x^{V2}) \\
& + x''''(x''x^{V2} + x'^2x'''^2) + x^V(x'''^2x''''^2 + x'^2x''^2) \\
& + x'''(x'^2x^{V2} + x''^2x''''^2)),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^V = {} & 2(x'^3(x''x''' + x''''x^V) + x''^3(x'x^V + x'''x'''') \\
& + x^{V3}(x''x'''' + x'x''') + x''''^3(x'''x^V + x'x'') \\
& + x'''^3(x'x'''' + x''x^V)) \\
& + 3(x'(x''^2x'''^2 + x''''^2x^{V2}) + x''(x'^2x^{V2} + x'''^2x''''^2) \\
& + x^V(x''^2x''''^3 + x'^2x'''^2) + x''''(x'''^2x^{V2} + x'^2x''^2) \\
& + x'''(x'^2x''''^2 + x''^2x^{V2})),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z^{VI} = {} & 2(x'^3(x''x'''' + x'''x^V) + x''^3(x'x^V + x'''x'''') \\
& + x^{V3}(x''x''' + x'x'''') + x'''^3(x''''x^V + x'x'') \\
& + x''''^3(x'x''' + x''x^V)) \\
& + 3(x'(x''^2x''''^2 + x'''^2x^{V2}) + x''(x'^2x^{V2} + x'''^2x''''^2) \\
& + x^V x''^2x'''^2 + x'^2x''''^2) + x'''(x''''^2x^{V2} + x'^2x''^2) \\
& + x''''(x'^2x'''^2 + x''^2x^{V2})).
\end{aligned}$$

Man mache in diesen Formeln mit den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. welche Verwechselungen man will, so wird sich zeigen, daß immer dieselben Formeln wieder herauskommen. Hieraus folgt aber, daß die sechs Größen z', z'', z''', ꝛc. nothwendig die Wurzeln einer Gleichung vom sechsten Grade seyn werden, welche also von folgender Form seyn wird

$$z^6 - Az^5 + Bz^4 - Cz^3 + Dz^2 - Ez + F = 0$$

deren Wurzeln also zu Folge der bekannten Regeln bestimmt werden können.

So hat man z. B. $A = z' + z'' + z''' + z'''' + z^v + z^{v'}$, das heißt

$$\begin{aligned}
A = \; & 4x'^3\,(x''x''' + x''x^{\prime v} + x''x^v + x'''x^{\prime v} + x'''x^v + x^{\prime v}x^v) \\
& + 4x''^3\,(x'x''' + x'x^{\prime v} + x'x^v + x''x^{\prime v} + x'''x^v + x^{\prime v}x^v) \\
& + 4x'''^3(x'x'' + x'x^{\prime v} + x'x^v + x''x^{\prime v} + x''x^v + x^{\prime v}x^v) \\
& + 4x^{\prime v 3}(x'x'' + x'x''' + x'x^v + x''x''' + x''x^v + x'''x^v) \\
& + 4x^{v3}\,(x'x'' + x'x''' + x'x^{\prime v} + x''x''' + x''x^{\prime v} + x'''x^v) \\
& + 6x'\,((x''x''')^2 + (x''x^{\prime v})^2 + (x''x^v)^2 + (x'''x^{\prime v})^2 \\
& \qquad + (x'''x^v)^2 + (x^{\prime v}x^v)^2). \\
& + 6x''\,((x'x''')^2 + (x'x^{\prime v})^2 + (x'x^v)^2 + (x'''x^{\prime v})^2 \\
& \qquad + (x'''x^v)^2 + (x^{\prime v}x^v)^2) \\
& + 6x'''\,((x'x'')^2 + (x'x^{\prime v})^2 + (x'x^v)^2 + (x''x^{\prime v})^2 \\
& \qquad + (x''x^v)^2 + (x^{\prime v}x^v)^2) \\
& + 6x''''((x'x'')^2 + (x'x''')^2 + (x'x^v)^2 + (x''x''')^2 \\
& \qquad + (x''x^v)^2 + (x'''x^v)^2) \\
& + 6x^v\,((x'x'')^2 + (x'x''')^2 + (x'x^{\prime v})^2 + (x''x''')^2 \\
& \qquad + (x''x^{\prime v})^2 + (x'''x^{\prime v})^2)
\end{aligned}$$

Es ist aber in der gegebenen Gleichung

$$\begin{aligned}
-m &= x' + x'' + x''' + x'''' + x^v + x^{v'}, \\
n &= x'x'' + x'x''' + x'x^{\prime v} + x'x^v + x''x''' + x''x^{\prime v} \\
& \quad + x''x^v + x'''x^{\prime v} + x'''x^v + x^{\prime v}x^v;
\end{aligned}$$

daher erhalten die fünf ersten Glieder des Ausdrucks für A folgenden Werth

$$
\begin{aligned}
& 4n(x'^3 + x''^3 + x'''^3 + x''''^3 + x^{v3}) \\
& + 4m(x'^4 + x''^4 + x'''^4 + x''''^4 + x^{v4}) \\
& + 4(x'^5 + x''^5 + x'''^5 + x''''^5 + x^{v5}) \\
= {} & 4n(-m^3 + 3mn - 3p) \\
& + 4m(m^4 - 4m^2n + 4mp - 4q + 2n^2) \\
& + 4(-m^5 + 5m^3n - 5m^2p + 5m(q - n^2) - 5r + 5np).
\end{aligned}
$$

Den Werth der fünf letzten Glieder der Größe A zu finden, muß man zuerst den Werth folgender Größe suchen

$$
\begin{aligned}
& (x'x'')^2 + (x'x''')^2 + (x'x^{iv})^2 + (x'x^v)^2 + (x''x''')^2 \\
& + (x''x^{iv})^2 + (x''x^v)^2 + (x'''x^{iv})^2 + (x'''x^v)^2 + (x^{iv}x^v)^2
\end{aligned}
$$

welche wir zur Abkürzung l nennen wollen. Quadriret man nun den Werth von n, so erhält man

$$
\begin{aligned}
n^2 = {} & l + 2n(x'^2 + x''^2 + x'''^2 + x^{iv2} + x^{v2}) \\
& + 2m(x'^3 + x''^3 + x'''^3 + x^{iv3} + x^{v3}) \\
& + 2(x'^4 + x''^4 + x'''^4 + x^{iv4} + x^{v4}) \\
= {} & l + 2n(m^2 - 2n) + 2m(-m^3 + 3mn - 3p) \\
& + 2(m^4 - 4m^2n + 4mp - 4q + 2n^2),
\end{aligned}
$$

daher

$$
\begin{aligned}
l = {} & n^2 - 2n(m^2 - 2n) - 2m(-m^3 + 3mn - 3p) \\
& - 2(m^4 - 4m^2n + 4mp - 4q + 2n^2).
\end{aligned}
$$

Nunmehr ist es nicht schwer zu finden, daß der Werth der fünf letzten Glieder in dem Ausdrucke für A, seyn werde

$$
\begin{aligned}
& 6l(x' + x'' + x''' + x^{iv} + x^v) \\
& - 6(m^2 - 2n)(x'^3 + x''^3 + x'''^3 + x^{iv3} + x^{v3}) \\
& + 6(x'^5 + x''^5 + x'''^5 + x^{iv5} + x^{v5}) \\
= {} & -6lm - 6(m^2 - 2n)(-m^3 + 3mn - 3p) \\
& + 6(-m^5 + 5m^3n - 5m^2p + 5m(q - n^2) - 5r + 5np).
\end{aligned}
$$

Vereiniget man alle diese Größen, so erhält man endlich

$$
\begin{aligned}
A = {} & -6mn(3n - 2m^2) + 2(8n + 3m^2)(-m^3 + 3mn - 3p) \\
& + 16m(m^4 - 4m^2n + 4mp - 4q + 2n^2) \\
& + 10(-m^5 + 5m^3n - 5m^2p + 5m(q - n^2) - 5r + 5np)
\end{aligned}
$$

Auf eine ähnliche Art wird man den Werth jedes andern Coefficienten B, C, ꝛc. der Gleichung z finden können, und man wird dabey die Rechnung sehr abkürzen können, wenn man die Regeln anwendet, welche Cramer gegen das Ende seiner Introduction à l'analyse des lignes courbes gegeben hat, um die Summe von den Produkten der Wurzeln jeder Gleichung zu berechnen, wenn man diese Wurzeln zweye und zweye, oder dreye und dreye ꝛc. verbindet, und jede zu irgend einer gegebenen Potenz erhebt. Wir wollen uns aber in die Ausführung dieser Rechnung nicht einlassen, die, außer der großen Weitläuftigkeit derselben dennoch keinen Aufschluß über die Auflösung der Gleichungen vom 5ten Grade geben würde; denn da die reducirte Gleichung für z vom sechsten Grade ist, so wird sie nicht auflösbar seyn, woferne sie sich nicht auf einen niedrigern Grad als den fünften bringen lässet. Dies scheint mir aber nach der Form der Wurzeln z', z'', ꝛc. dieser Gleichung, beynahe unmöglich.

75.

Wir haben von Nr. 70. bis jetzt vorausgesetzt, daß der Exponent μ der gegebenen Gleichung eine Primzahl sey; wir wollen nunmehr den Fall, wenn μ eine zusammengesetzte Zahl ist, untersuchen.

In diesem Falle ist es durch ähnliche Schlüsse als Nr. 59, leicht zu beweisen, daß die Sätze der eben angeführten und folgenden Nrn, nur in so ferne Statt finden werden, in so ferne man für α, blos die Potenzen α^{ν}, α^{π}, α^{ϱ}, ꝛc. substituiret, deren Exponenten ν, π, ϱ, ꝛc. relative Primzahlen gegen μ sind. Hieraus folgt

1) daß, wenn man die Anzahl der eben genannten Coefficienten ν, π, ϱ, ꝛc. durch $\lambda - 1$ bezeichnet, die Gleichung

für

für ϑ, welche allgemein von dem Grade $1.2.3\ldots(\mu-1)$ war, in $\frac{1.2.3\ldots(\mu-1)}{\lambda}$ Gleichungen, jede von dem Grade λ auflösbar seyn wird; ihre Form wird seyn

$$\vartheta^{\lambda} - T\vartheta^{\lambda-1} + U\vartheta^{\lambda-2} - X\vartheta^{\lambda-3} + \text{rc.} = 0$$

und die Coefficienten T, U, X, rc. werden jeder durch eine Gleichung von dem Grade $\frac{1.2.3\ldots(\mu-1)}{\lambda}$ gegeben werden.

2) Wenn man die λ Wurzeln dieser Gleichung für ϑ, durch ϑ', ϑ'', ϑ''', rc. bezeichnet, so werden die Größen

$$\frac{\sqrt[\mu]{\vartheta'}}{\mu},\quad \frac{\sqrt[\mu]{\vartheta''}}{\mu},\quad \frac{\sqrt[\mu]{\vartheta'''}}{\mu}\ \text{rc.}$$

die Werthe derjenigen Coefficienten k, g, h, rc. c, b ausdrücken, deren Stelle, wenn man von k anfängt, durch die Zahlen 1, ν, π, ϱ, rc. welche gegen μ relative Primzahlen sind, angezeigt wird; so daß alle diese Coefficienten durch eine einzige Gleichung bestimmt werden.

3) Um die Coefficienten T, U, X, rc. nach der Nr. 71. vorgetragenen Methode zu finden, wird man zu der Eliminirung von y, nicht die Gleichung (g) Nr. 57. sondern die Gleichung (i) brauchen müssen, welche man nach der Nr. 60. beschriebenen Methode findet, und wovon die Wurzeln α, α^{ν}, α^{π}, α^{ϱ}, rc. sind. Will man demnach die gesuchten Coefficienten nach Nr. 72. bestimmen, so muß man zuerst vermittelst der Gleichung (i), die Summe der Wurzeln α, α^{ν}, α^{π}, α^{ϱ}, rc., ihrer Quadrate, ihrer Würfel u. s. f. suchen, welche wir mit S', S'', S''', rc. bezeichnen wollen. Erhebt man nun nach und nach das Polynom

ζ +

$$\xi + \alpha\xi' + \alpha^2\xi'' + \alpha^3\xi''' + \text{ꝛc.} + \alpha^{\mu-1}\xi^{(\mu-1)}$$

zu der 2ten, 3ten Potenz ꝛc., und bezeichnet man diese Potenzen durch

$$\xi^2 + \alpha\xi'^2 + \alpha^2\xi''^2 + \alpha^3\xi'''^2 + \text{ꝛc.}$$
$$\xi^3 + \alpha\xi'^3 + \alpha^2\xi''^3 + \alpha^3\xi'''^3 + \text{ꝛc.}$$
$$\text{ꝛc.}$$

so ergeben sich folgende Größen

$$\lambda\xi + S'\xi' + S''\xi'' + S'''\xi''' + \text{ꝛc.}$$
$$\lambda\xi^2 + S'\xi'^2 + S''\xi''^2 + S'''\xi'''^2 + \text{ꝛc.}$$
$$\lambda\xi^3 + S'\xi'^3 + S'\xi''^3 + S'''\xi'''^3 + \text{ꝛc.}$$
$$\text{ꝛc.}$$

für die Summen der 1sten, 2ten, 3ten, ꝛc. Potenzen, von den Wurzeln ϑ', ϑ'', ϑ''', ꝛc. Und hierdurch findet man endlich nach den bekannten Regeln

$$T = \lambda\xi + S'\xi' + S''\xi'' + S'''\xi''' + \text{ꝛc.}$$
$$U = \tfrac{1}{2}T(\lambda\xi + S'\xi' + S''\xi'' + \text{ꝛc.})$$
$$- \tfrac{1}{2}(\lambda\xi^2 + S'\xi'^2 + S''\xi''^2 + \text{ꝛc.})$$
$$X = \tfrac{1}{3}U(\lambda\xi + S'\xi' + S''\xi'' + \text{ꝛc.})$$
$$- \tfrac{1}{3}T(\lambda\xi^2 + S'\xi'^2 + S''\xi''^2 + \text{ꝛc.})$$
$$+ \tfrac{1}{3}(S\xi^3 + S'\xi'^3 + S''\xi''^3 + \text{ꝛc.})$$
$$Y = \text{ꝛc.}$$

76.

Um nun auch die Werthe der übrigen Coefficienten zu finden, deren Stellen in der Reihe k, h, g, ꝛc. c, b durch solche Zahlen angezeigt wird, welche gegen μ commensurabel sind, so wollen wir allgemein annehmen, daß $\mu = \nu\pi$ sey, und daß man unter den gesuchten Coefficienten diejenigen bestimmen wollte, deren Stellen durch ein Vielfaches von ν angezeiget werden. Bezeichnet man nun zur Abkürzung diese Coefficienten mit

$$\frac{a^{(\nu)}}{\mu}, \quad \frac{a^{(2\nu)}}{\mu}, \quad \frac{a^{(3\nu)}}{\mu} \text{ 2c.}$$

und setzet $\alpha^{\nu} = \omega$, so wird man aus dem was Nr. 68. gesagt worden, leicht übersehen, daß

$$a^{(\nu)} = x' + \omega x'' + \omega^2 x''' + \omega^3 x'''' + \text{ 2c. } + \omega^{\mu - 1} x^{(\mu)}$$

seyn werde; und um die übrigen Größen $a^{(2\nu)}$, $a^{(3\nu)}$, 2c. zu erhalten, wird nichts nöthig seyn, als ω nach und nach mit ω^2, ω^3, 2c. zu vertauschen.

Um diese Rechnung, mit der Nr. 69. ähnlich zu machen, sey

$$t = x' + \omega x'' + \omega^2 x''' + \omega^3 x'''' + \text{ 2c. } + \omega^{\mu - 1} x^{(\mu)}$$

und man untersuche nun von welcher Beschaffenheit eine Gleichung für t seyn werde.

In dieser Absicht bemerke man zuerst; da $\omega = \alpha^{\nu}$, so wird $\omega^{\pi} = \alpha^{\pi\nu} = \alpha^{\mu} = 1$ seyn, und daher $\omega^{\pi + 1} = \omega$, $\omega^{\pi + 2} = \omega^2$ 2c. Und überhaupt, da $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$, 2c. $\alpha^{\mu - 1}$ die Wurzeln der Gleichung $y^{\mu} - 1 = 0$ sind, so werden die Potenzen $1, \omega, \omega^2, \omega^3$, 2c. $\omega^{\pi - 1}$ die Wurzeln der Gleichung $y^{\pi} - 1 = 0$ seyn (Nr. 24.)

Versetzt man demnach diejenigen Potenzen von ω, welche höher als $\omega^{\pi - 1}$ sind, in die Klasse der niedrigern Potenzen, so wird die Gleichung für t folgende Form erhalten

$$t = z' + \omega z'' + \omega^2 z''' + \omega^3 z'''' + \text{ 2c. } + \omega^{\pi - 1} z^{(\pi)}$$

vorausgesetzt daß

$z' =$

$$z' = x' + x^{(\pi+1)} + x^{(2\pi+1)} + \text{ꝛc.} + x^{(\mu-\pi+1)}$$
$$z'' = x'' + x^{(\pi+2)} + x^{(2\pi+2)} + \text{ꝛc.} + x^{(\mu-\pi+2)}$$
$$z''' = x''' + x^{(\pi+3)} + x^{(2\pi+3)} + \text{ꝛc.} + x^{(\mu-\pi+3)}$$
$$\text{ꝛc.}$$
$$z^{(\pi)} = x^{(\pi)} + x^{(2\pi)} + x^{(3\pi)} + \text{ꝛc.} + x^{(\mu)}.$$

77.

Betrachtet man nun die Gleichung für t in ihrer völligen Allgemeinheit, so ist klar, daß sie von dem Grade $1.2.3\ldots\mu$ seyn muß, weil eben so viele Verwechselungen unter den μ Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. möglich sind, von denen jede einen eigenen Werth für t giebt. Finden sich aber unter diesen Werthen, solche die gleich sind, so braucht man sie nicht zu unterscheiden, und kann dadurch die Gleichung auf einen niedrigern Grad bringen; dies wird aber genau derjenige seyn, welcher in gegenwärtigen Fall Statt findet.

Es ist aber augenscheinlich, daß die Größe z' unverändert bleiben wird, was man auch für Verwechselungen mit den ν Wurzeln x', $x^{(\pi+1)}$, $x^{(2\pi+1)}$, ꝛc. machen mag. Da nun ν Dinge $1.2.3\ldots\nu$ Verwechselungen zulassen, so folget, daß unter den $1.2.3\ldots\mu$ Werthen von t, sich jeder $1.2.3\ldots\nu$ mahl finden wird, so daß sich unter allen diesen Werthen wirklich nicht mehr als $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\nu}$ von einander unterschiedene finden werden.

Betrachtet man ferner die Größe z'', so läßt sich auf eben dieselbe Art erweisen, daß man jeden dieser letzteren Werthe $1.2.3\ldots\nu$ mahl wiederholet finden wird; und hierdurch

durch beschränkt sich die Anzahl der verschiedenen Werthe auf $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(1.2.3\ldots\nu)^2}$.

Setzet man diese Schlüsse auch bey den übrigen Größen z''', z'''', ꝛc. $z^{(\pi)}$ fort, so ergiebt sich zuletzt, daß die Anzahl der verschiedenen Werthe von t nicht größer als $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(1.2.3\ldots\nu)^\pi}$ seyn kann; so daß die Gleichung für t den Grad $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(1.2.3\ldots\nu)^\pi}$ nicht übersteigen kann.

78.

Vergleichet man nun, dies vorausgesetzt, den obigen Ausdruck für t, mit dem Nr. 69, so wird man leicht bemerken, daß hier in Absicht der Verwechselungen der Größen z', z'', z''', ꝛc. ähnliche Bemerkungen statt finden; woraus sich folgende Schlüsse ergeben.

1) Wenn π eine Primzahl ist, so kann die Gleichung für t bloß solche Potenzen von t enthalten, welche Vielfache von π sind. Setzt man also $t^\pi = \vartheta$, so erhält man für ϑ eine Gleichung von dem Grad $\frac{1.2.3\ldots\mu}{\pi(1.2.3\ldots\nu)^\pi}$.

2) Diese Gleichung wird jederzeit auflösbar seyn in $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(\pi-1)\pi(1.2.3\ldots\nu)^\pi}$ Gleichungen von der Form

$$\vartheta^{\pi-1} - T\vartheta^{\pi-2} + U\vartheta^{\pi-3} - X\vartheta^{\pi-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

in welcher die Coefficienten T, U, X, ꝛc. blos von einer Gleichung von dem Grad $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(\pi-1)\pi(1.2.3\ldots\nu)^{\pi}}$ abhängen werden.

3) Bezeichnet man nun die $\pi - 1$ Wurzeln der obigen Gleichung durch ϑ', ϑ'', ϑ''', 2c., so werden die Größen

$$\frac{\sqrt[\pi]{\vartheta'}}{\mu},\ \frac{\sqrt[\pi]{\vartheta''}}{\mu},\ \frac{\sqrt[\pi]{\vartheta'''}}{\mu}\ \text{2c.}\ \frac{\sqrt[\pi]{\vartheta^{(\pi-1)}}}{\mu}$$

die Werthe derjenigen Coefficienten k, h, g, 2c. c, b, ausdrücken, welche in dieser Reihe, die 1ste, (2ν)te, (3ν)te 2c. bis $(\mu-\nu)$te Stelle einnehmen, oder, welches mit den vorigen auf eines hinausläuft (weil μ die Anzahl aller Coefficienten a, b, c, 2c. k, ist), die Werthe derjenigen Coefficienten welche in der Reihe a, b, c, 2c. k, eben dieselben Stellen einnehmen.

4) Um die Werthe der Coefficienten T, U, X, 2c. zu bestimmen, wird man sich völlig der Methoden Nr. 71 und 72 bedienen können, wenn man nur überall den Exponenten π, anstatt μ brauchet.

5) Wenn π keine Primzahl ist, so leiden die bisherigen Schlüsse Abänderungen, welche durch die Natur der Zahl π bestimmt werden. Man wird dieselben leicht durch ähnliche Betrachtungen als Nr. 75. finden können.

79.

Es erhellet also, aus den vorgetragenen Schlüssen, daß wenn der Exponent der gegebenen Gleichung μ eine zusammengesetzte Zahl ist, die Coefficienten b, c, d, 2c. nicht Wurzeln einer einzigen Gleichung seyn können, so wie dies der Fall war, wenn μ eine Primzahl ist. Es werden vielmehr diese

diese Coefficienten von verschiedenen Gleichungen abhängen, je nachdem ihre Stellen in der Reihe a, b, c, d. 2c. durch Zahlen angezeigt werden, deren größtes gemeinschaftliches Maaß mit μ verschieden ist.

Indessen wird es nicht nöthig seyn, alle diese verschiedene Gleichungen zu suchen und aufzulösen; denn die Coefficienten von welchen wir reden, hängen gegenseitig einer von dem andern ab, so daß man, so bald einer dieser Werthe gefunden ist, leicht die übrigen daraus ableiten kann. In der That, wenn man annimmt, daß y aus der Gleichung (k) Nr. 65, vermittelst der Gleichung $y^{\mu} - 1 = 0$ eliminiret sey, und wenn man nun die hieraus entspringende Gleichung Glied vor Glied, mit der gegebenen vergleichet, so erhält man so viele Gleichungen als man unbestimmte Coefficienten a, b, c, 2c. hat, durch welche man jeden dieser Coefficienten wird bestimmen können. Nimmt man aber den ersten Coefficienten a aus, welcher durch eine Gleichung gegeben wird, in welcher sich nichts von den übrigen unbekannten Größen befindet, so werden alle übrigen unbekannten Coefficienten b, c, d, 2c. in diesen Gleichungen unter einander vermischt seyn; so daß man nach der gewöhnlichen Eliminationsmethode, den Werth jeder dieser unbekannten Größen, durch jede andere wird bestimmen können. Man wird daher hier ähnliche Betrachtungen als Nr. 58. anstellen können.

80.

Bezout trägt, um den Gebrauch seiner Methode, wenn μ eine zusammengesetzte Zahl ist, leichter und einfacher zu machen, noch eine zweyte Methode vor, welche einigermaßen allgemeiner zu seyn scheint, als die erste, welche aber dennoch im Grunde mit der ersten auf eines hinausläuft, wie wir so gleich zeigen werden.

Wenn der Exponent μ der gegebenen Gleichung ein Produkt $\nu\pi$, zweyer Zahlen ν und π ist, so nimmt man zu Folge dieser Methode zwey Gleichungen von folgender Form an

$$x^\nu - (a + by + cy^2 + dy^3 + \text{ꝛc.} + ky^{\pi-1})x^{\nu-1} \ldots (\mathrm{I})$$
$$+ (a' + b'y + c'y^2 + d'y^3 + \text{ꝛc.} + k'y^{\pi-1})x^{\nu-2}$$
$$- (a'' + b''y + c''y^2 + d''y^3 + \text{ꝛc.} + k''y^{\pi-1})x^{\nu-3}$$
$$\text{ꝛc.}$$
$$\pm (a^{(\nu-1)} + b^{(\nu-1)}y + c^{(\nu-1)}y^2 + d^{(\nu-1)}y^3 + \text{ꝛc.}$$
$$+ k^{(\nu-1)}y^{\pi-1}) = 0$$

und $y^\pi - 1 = 0$.

Eliminiret man nun y, so erhält man eine Endgleichung für x, von dem Grade $\nu\pi$, welche man Glied vor Glied mit der gegebenen vergleichen muß. Hierdurch erhält man $\nu\pi$ Gleichungen zwischen den Coefficienten $a, b, c,$ ꝛc. $a', b', c',$ ꝛc. deren Anzahl gleichfalls $\nu\pi$ ist, so daß man durch dieselben jeden dieser Coefficienten bestimmen kann.

Da aber die Gleichung $y^\pi - 1 = 0$, π Werthe von y giebt, so erhält man durch die successive Substitution dieser Werthe, eben so viele Gleichungen für x, jede von dem Grade ν, hieraus lassen sich $\pi\nu$ Werthe von x ableiten, welche die Wurzeln der gegebenen Gleichung seyn werden.

Aus der Nr. 13. vorgetragenen Theorie der Elimination ist deutlich, daß diejenige Gleichung, welche man aus den beyden obigen durch die Eliminirung von y erhält, nichts anders seyn werde, als das Produkt aller Gleichungen (I),

welche

welche man erhält, wenn man in dieser Gleichung, statt y, die π Wurzeln der Gleichung $y^\pi - 1 = 0$ setzet. Das Wesentliche dieser Methode bestehet also in der Auflösung der gegebenen Gleichung von dem Grade $\nu\pi$, in π Gleichungen vom νten Grade, und zwar vermittelst einer Gleichung des πten Grades, von der Form $y^\pi - 1 = 0$

Alle Schwierigkeit bestehet hier in der Bestimmung der unbekannten Coefficienten a, b, c, ꝛc. a', b', c', ꝛc. Daher wird es nützlich seyn, die Natur der Gleichungen, durch welche diese Größen bestimmt werden müssen, a priori zu untersuchen.

81.

Wir wollen also annehmen, daß die gegebene Gleichung von dem Grade $\mu = \nu\pi$, deren Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. seyn sollen, das Produkt von folgenden π Gleichungen sey,

$$x^\nu - z' x^{\nu-1} + u' x^{\nu-2} - v' x^{\nu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$x^\nu - z'' x^{\nu-1} + u'' x^{\nu-2} - v'' x^{\nu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$x^\nu - z''' x^{\nu-1} + u''' x^{\nu-2} - v''' x^{\nu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$
$$\text{ꝛc.}$$
$$x^\nu - z^{(\pi)} x^{\nu-1} + u^{(\pi)} x^{\nu-2} - v^{(\pi)} x^{\nu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

so wird jede dieser Gleichungen ν Wurzeln der gegebenen Gleichung enthalten. Theilet man nun die sämtlichen μ Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\mu)}$ in π Systeme, jedes von ν Wurzeln, z. B. auf folgende Art

$$x',\quad x^{(\pi+1)},\quad x^{(2\pi+1)} + \text{ꝛc.} + x^{(\mu-\pi+1)}$$
$$x'',\quad x^{(\pi+2)},\quad x^{(2\pi+2)} + \text{ꝛc.} + x^{(\mu-\pi+2)}$$
$$x''',\quad x^{(\pi+3)},\quad x^{(2\pi+3)} + \text{ꝛc.} + x^{(\mu-\pi+3)}$$
$$\text{ꝛc.}$$

$$x^{(\pi)},\ x^{(2\pi)},\ \ x^{(3\pi)}\ + \text{ꝛc.} + x^{(\mu)};$$

so wird vermöge der Natur der Gleichungen $z' =$ der Summe, $u' =$ der Summe aller Produkte von je zweyen, $v' =$ der Summe aller Produkte von je dreyen ꝛc. der Wurzeln x', $x^{(\pi+1)}$, $x^{(2\pi+1)}$ ꝛc. $x^{(\mu-\pi+1)}$ seyn; eben so wird $z'' =$ der Summe, $u'' =$ der Summe aller Produkte von je zweyen, $v'' =$ der Summe aller Produkte von je dreyen ꝛc. der Wurzeln x'', $x^{(\pi+2)}$, $x^{(2\pi+2)}$, ꝛc. $x^{(\mu-\pi+2)}$ seyn, u. s. f.

Bezeichnet man aber die π Wurzeln der Gleichung $y^\pi - 1 = 0$, mit $1, \omega, \varphi, \psi,$ ꝛc. so erhält man (nach der vorigen Nr.)

$$\begin{array}{l}
a + b + c + d + \text{ꝛc.} + k = z' \\
a + b\omega + c\omega^2 + d\omega^3 + \text{ꝛc.} + k\omega^{\pi-1} = z'' \\
a + b\varphi + c\varphi^2 + d\varphi^3 + \text{ꝛc.} + k\varphi^{\pi-1} = z''' \\
\qquad\qquad \text{ꝛc.}
\end{array}$$

desgleichen

$$\begin{array}{l}
a' + b' + c' + d' + \text{ꝛc.} + k' = u' \\
a' + b'\omega + c'\omega^2 + d'\omega^3 + \text{ꝛc.} + k'\omega^{\pi-1} = u'' \\
a' + b'\varphi + c'\varphi^2 + d'\varphi^3 + \text{ꝛc.} + k'\varphi^{\pi-1} = u''' \\
\qquad\qquad \text{ꝛc.} \\
\qquad\qquad \text{u. s. f.}
\end{array}$$

Da nun vermöge der Natur der Gleichung $y^\pi - 1 = 0$ in welcher alle Mittelglieder fehlen

$$\begin{array}{l}
1 + \omega + \varphi + \psi + \text{ꝛc.} = 0 \\
1 + \omega^2 + \varphi^2 + \psi^2 + \text{ꝛc.} = 0 \\
1 + \omega^3 + \varphi^3 + \psi^3 + \text{ꝛc.} = 0 \\
\qquad\qquad \text{ꝛc.}
\end{array}$$

so wird man die Größen a, b, c, ꝛc. k, a', b', ꝛc. k', a'', ꝛc. auf ähnliche Art als Nr. 67. bestimmen können, und auf diese Art erhält man

$$\pi a = z' + z'' + z''' + \text{ꝛc.} + z^{(\pi)}$$
$$\pi b = z' + \omega^{\pi - 1} z'' + \varphi^{\pi - 1} z''' + \text{ꝛc.}$$
$$\pi c = z' + \omega^{\pi - 2} z'' + \varphi^{\pi - 2} z''' + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

ferner

$$\pi a' = u' + u'' + u''' + \text{ꝛc.} + u^{(\pi)}$$
$$\pi b' = u' + \omega^{\pi - 1} u'' + \varphi^{\pi - 1} u''' + \text{ꝛc.}$$
$$\pi c' = u' + \omega^{\pi - 2} u'' + \varphi^{\pi - 2} u''' + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

u. s. f.

82.

Wir wollen nunmehr die Werthe der Größen a, b, c, ꝛc. k untersuchen. Hier fällt es sogleich in die Augen, daß πa der Summe aller Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\mu)}$ gleich ist; so daß $\pi a = -m$, folglich $a = -\frac{m}{\pi}$.

Setzt man ferner ω^2, ω^3, ꝛc. anstatt φ, ψ, ꝛc., so daß die Wurzeln der Gleichung $y^\pi - 1 = 0$ durch $1, \omega, \omega^2, \omega^3$, ꝛc. $\omega^\pi - 1$ vorgestellet werden (Nr. 24.); so erhält man

$$\pi k = z' + \omega z'' + \omega^2 z''' + \omega^3 z'''' + \text{ꝛc.} + \omega^{\pi - 1} z^{(\pi)}$$

und um die Größen πh, πg, ꝛc. zu erhalten, wird nichts nöthig seyn, als in diesem Ausdrucke, die Wurzel ω, nach und nach mit ω^2, ω^3, ꝛc. zu verwechseln.

Es ist aber dieser Ausdruck für πk, mit dem Ausdrucke für $a^{(\nu)}$ oder t Nr. 76, völlig einerley; folglich werden die

Ausdrücke für ϖh, ϖg, ꝛc. mit den Ausdrücken für $a^{(2\nu)}$, $a^{(3\nu)}$ ꝛc. unter eben der Nr., einerley seyn: hieraus folget aber ohne Schwierigkeit, daß die Coefficienten a, b, c, d, ꝛc. der Gleichung (l) Nr 80 multipliciret durch ϖ, respective gleich seyn werden denenjenigen Coefficienten a, b, c, ꝛc. der Gleichung (k) Nr. 65, welche in der Reihe a, b, c, ꝛc. die 1ste, νte, 2νte, 3νte, ꝛc $(\mu - \nu)$te Stelle einnehmen, wenn jeder mit μ multipliciret wird.

Man wird also auf die Coefficienten a, b, c, ꝛc. von der obigen Form, eben die Schlüsse anwenden können, welche wir Nr. 76. f. f. gemacht haben.

83.

Was die übrigen Coefficienten a', b', c', ꝛc. a'', b'', c'', ꝛc. von der Formel (l) betrift, so kann man sie, wenn man will, von den vorigen, oder blos von einem unter ihnen abhängig machen, welches durch ähnliche Betrachtungen als Nr. 79. erreichet wird, auch wird man nach den Formeln Nr. 81, den Grad, und die Form der Gleichung von welcher jeder dieser Coefficienten unmittelbar abhängen muß, a priori bestimmen können.

In dieser Absicht ist es schon hinreichend zu bemerken, daß die Größen u', u'', u''', ꝛc. mit den entsprechenden Größen z', z'', z''', ꝛc. darin analog sind, daß sie Funktionen der nemlichen Wurzeln sind, welche die Eigenschaft haben, daß sie unverändert bleiben, was für Verwechselungen man auch mit jenen Wurzeln vornehmen mag; eben so verhält es sich auch mit den Größen v', v'', v''', ꝛc.; hieraus folgt aber, daß auf die Coefficienten b', c', d', ꝛc. b'', c'', d'', ꝛc. ähnliche

liche Betrachtungen und Schlüſſe angewendet werden können, als bey den Coefficienten b, c, d, ꝛc. ſtatt finden.

Was aber die Coefficienten a', a'', ꝛc betrift, ſo muß man dieſe beſonders unterſuchen. Man wird alſo zuerſt durch ähnliche Schlüſſe als Nr. 77. beweiſen können, daß jede dieſer Größen nicht mehr als $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(1.2.3\ldots\nu)^{\varpi}}$ verſchiedene Werthe haben kann; alsdenn wird man bemerken, daß dieſe Größen, durch Verwechſelungen der Größen u', u'', u''' ꝛc. $u^{(\varpi)}$, oder v', v'', v''', ꝛc. $v^{(\varpi)}$, oder ꝛc. keine Veränderung leiden; daher muß man noch die Zahl $\frac{1.2.3\ldots\mu}{(1.2.3\ldots\nu)^{\varpi}}$ durch $1.2.3\ldots\varpi$ dividiren, um die Anzahl der verſchiedenen Werthe jedes Coefficienten a', a'', ꝛc. zu erhalten; und hieraus folget, daß jeder dieſer Coefficienten durch eine partikuläre Gleichung von dem Grade $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\varpi(1.2.3\ldots\nu)^{\varpi}}$ beſtimmt ſeyn wird.

84.

Wir wollen annehmen, daß die gegebene Gleichung von einem geraden Grade ſey, und $\varpi = 2$ ſetzen, ſo daß $\mu = 2\nu$ wird. In dieſem Fall verwandelt ſich die Gleichung $y^{\varpi} - 1 = 0$ in $y^2 - 1 = 0$, deren beyde Wurzeln $y = 1$, und $y = -1$ ſind. Es muß alſo zufolge der vorgetragenen Methode, die gegebene Gleichung

$$x^{2\nu} + mx^{2\nu-1} + nx^{2\nu-2} + px^{2\nu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

ein Produkt aus folgenden beyden Gleichungen ſeyn,

$$x^{\nu} - (a + b)x^{\nu-1} + (a' + b')x^{\nu-2} - (a'' + b'')x^{\nu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$x^{\nu} - (a - b)x^{\nu-1} + (a' - b')x^{\nu-2} - (a'' - b'')x^{\nu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

Alsdenn hat man $a = -\frac{\mu}{2}$, und $b = \frac{z' - z''}{2}$; in welchem Ausdruck

$$z' = x' + x''' + x^{V} + \text{ꝛc.} + x^{2\nu-1}$$

$$z'' = x'' + x^{IV} + x^{VI} + \text{ꝛc.} + x^{2\nu}$$

und man wird finden, daß die Gleichung für b von dem Grad $\frac{1.2.3\ldots2\nu}{(1.2.3\ldots\nu)^2}$, d. i. $\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\ldots2\nu}{1.2.3\ldots\nu}$ seyn, und lauter gerade Coefficienten haben wird.

Nimmt man nun an, daß die gegebene Gleichung folgenden Divisor vom νten Grade habe

$$x^{\nu} + m'x^{\nu-1} + n'x^{\nu-2} + p'x^{\nu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

so wird man für m' eine Gleichung von dem Grad

$$\frac{(\nu+1)(\nu+2)(\nu+3)\ldots(2\nu)}{1.2.3\ldots\nu}$$

finden, und dies stimmt mit dem überein was man aus andern Gründen weiß, indem diese Zahl die Anzahl der möglichen Combinationen ausdrückt, welche unter 2ν Dingen möglich sind, wenn man je ν Dinge verbindet.

Und da man, wenn $-m' = a + b = \frac{m}{2} + b$ gesetzt wird, für b eine Gleichung erhalten muß, welche blos gerade Potenzen enthält, so folget, daß die Gleichung für m' von solcher Beschaffenheit seyn wird, daß wenn man darin das zweyte Glied auf Null bringt, zugleich in abwechselnder Ordnung

nung die folgenden Glieder mit verschwinden werden, wie wir dieses schon bey den Gleichungen vom vierten Grade Nr. 35. gesehen haben.

85.

Wenn die gegebene Gleichung vom sechsten Grade so daß $\nu = 3$, und man setzet $4b^2 = \vartheta$, so wird man eine Gleichung von dem Grad $\frac{4.5.6}{2.1.2.3} = 10$ erhalten.

Bezout glaubt, daß sich diese Gleichung in zwey Gleichungen werde auflösen lassen, und dies mittelst einer Gleichung vom zweyten Grade; woran ich aber sehr zweifle. In der That werden sich die Wurzeln der Gleichung für ϑ durch folgende zehn Größen vorstellen lassen, welche alle Werthe von $(z' - z'')^2$ enthalten, welche aus Verwechselung der sechs Wurzeln x', x'', x''', rc. entspringen können:

$$(x' + x'' + x''' - x^{IV} - x^{V} - x^{VI})^2$$
$$(x' + x'' + x^{IV} - x''' - x^{V} - x^{VI})^2$$
$$(x' + x'' + x^{V} - x^{IV} - x''' - x^{VI})^2$$
$$(x' + x'' + x^{VI} - x^{IV} - x^{V} - x''')^2$$
$$(x' + x^{IV} + x''' - x'' - x^{V} - x^{VI})^2$$
$$(x' + x^{V} + x''' - x^{IV} - x'' - x^{VI})^2$$
$$(x' + x^{VI} + x''' - x^{IV} - x^{V} - x'')^2$$
$$(x' + x^{IV} + x^{V} - x'' - x''' - x^{VI})^2$$
$$(x' + x^{IV} + x^{VI} - x'' - x''' - x^{V})^2$$
$$(x' + x^{V} + x^{VI} - x'' - x''' - x^{IV})^2.$$

Nimmt man aber an, daß die beyden Faktoren unserer Gleichung, auf folgende Art vorgestellt werden

$$\vartheta^5 - f\vartheta^4 + g\vartheta^3 - h\vartheta^2 + i\vartheta - k = 0$$
$$\vartheta^5 - f'\vartheta^4 + g'\vartheta^3 - h'\vartheta^2 + i'\vartheta - k' = 0$$

so muß f gleich seyn der Summe von fünf der obigen Größen, f' aber, der Summe der übrigen fünfe: und damit diese Coefficienten keine höheren Wurzelzeichen als von dem zweyten Grade enthalten, so müssen sie die Wurzeln einer Gleichung vom zweyten Grade, von folgender Form seyn

$$y^2 - My + N = 0$$

wo M und N rationale Funktionen der Coefficienten m, n, p, ꝛc. der gegebenen Gleichung seyn müssen; nun ist $M = f + f'$, und $N = ff'$; so daß sowohl die Summe als das Produkt der beyden Größen f und f' rationale Funktionen von m, n, p, ꝛc., und folglich solche Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. seyn müssen, deren Werth ungeändert bleibt, wie man auch die Wurzeln versetzen mag. Diese Bedingung aber kann nun zwar sehr wohl in Absicht der Summe $f + f'$ statt finden, denn diese ist die Summe aller zehn obigen Größen; aber mit dem Produkt ff' hat es eine andere Bewandniß: denn man kann sich leicht überzeugen, daß wenn man die Summe der obigen zehn Wurzeln, auf irgend eine Art in zwey Partialsummen, jede von fünf Wurzeln theilet, das Produkt dieser zwey Summen, auf keinen Fall die Eigenschaft haben wird, daß es ungeändert bliebe, was man auch für Verwechselungen, mit den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. machte.

Man könnte aber einwenden, daß es vielleicht nicht nothwendig sey, daß die beyden Größen f und f' Wurzeln einer einzigen Gleichung vom zweyten Grade seyn müßten, sondern daß die eine von einer, die andere von einer andern Gleichung abhängen könnte: allein folgendes wird hinreichend seyn diesen Einwurf zu entkräften. Nimmt man an daß f durch folgende Gleichung vom zweyten Grade bestimmt sey $f^2 - Mf + N = 0$, so wird von den beyden Wurzeln dieser Gleichung, nothwendig jede der Summe

von

von fünfen der obigen Größen gleich seyn; und wenn man diese Summen addiret, so werden sie eine Größe M geben müssen, welche die Eigenschaft hat, daß sie bey allen möglichen Verwechselungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. unverändert bleibt; und dieses würde nicht statt finden, wofern nicht wenigstens die beyden Summen von welchen wir reden alle zehn obigen Größen enthielten: wenn demnach die eine, die Summe von fünfen der obigen Größen ist, so muß die andere die Summe der fünf übrigen seyn.

Vierter Abschnitt.

Beschluß der bisherigen Bemerkungen, nebst einigen allgemeinen Anmerkungen über die Umformung der Gleichungen, und über ihre Reduction auf einen niedrigern Grad.

86.

Aus der bisher vorgetragenen Analyse der vornehmsten bekannten Methoden zur Auflösung der Gleichungen, wird man ersehen haben, daß sie sich sämtlich auf ein einziges allgemeines Princip reduciren, nemlich auf die Erfindung solcher Funktionen von den Wurzeln der gegebenen Gleichung, daß 1) die Gleichung, oder die Gleichungen durch welche sie gegeben werden, d. h. deren Wurzeln sie sind (oder die Gleichungen welche wir überhaupt die reducirten nennen) von einem niedrigern Grad als die gegebene Gleichung, oder doch in andere Gleichungen von einem niedrigern Grade auflösbar seyn. 2) Daß man vermittelst derselben die Werthe der gesuchten Wurzeln leicht finden könne.

Die Kunst, die Gleichungen aufzulösen, bestehet demnach in der Erfindung solcher Funktionen der Wurzeln, welche die eben erwähnten Eigenschaften haben. Aber ist es wohl möglich, für Gleichungen von jedem Grade, d. h. für jede willkührliche Anzahl von Wurzeln, jederzeit dergleichen Funktionen zu finden? Es scheint äußerst schwer über diese Frage im Allgemeinen abzusprechen.

Was diejenigen Gleichungen betrift, welche den vierten Grad nicht übersteigen, so können vielleicht die einfachsten Funktionen, die zu ihrer Auflösung führen, durch folgende allgemeine Formel vorgestellt werden

$$x' + yx'' + y^2x''' + \text{ꝛc.} + y^{\mu-1}x^{(\mu)}$$

in welcher x', x'', x''', ꝛc $x^{(\mu)}$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung sind, die wir von dem Grade μ annehmen; y aber ist irgend eine Wurzel der Gleichung

$$y^{\mu} - 1 = 0$$

nur nicht die Einheit: d. h. y ist irgend eine Wurzel der Gleichung

$$y^{\mu-1} + y^{\mu-2} + y^{\mu-3} + \text{ꝛc.} + 1 = 0$$

dies alles folgt aus dem was wir in den beyden ersten Abschnitten, bey der Auflösung der Gleichungen von dem 3ten und 4ten Grade vorgetragen haben.

Was die Gleichungen vom zweyten Grade betrift, die wir bisher bey Seite gesetzt haben, so ist es augenscheinlich, daß sie sich eben dem Princip unterordnen; denn setzt man $\mu = 2$, so erhält man die Funktion $x' + yx''$, und die Gleichung $y + 1 = 0$, giebt $y = -1$, dadurch verwandelt sich die obige Fuktion in $x' - x''$, d. i. in die Differenz der Wurzeln. Es bestehet aber die Kunst Gleichungen vom zweyten Grade aufzulösen blos darin, daß man das zweyte Glied auf

Null

Null bringe, und auf diese Art eine reducirte Gleichung erhalte, welche nichts als das Quadrat der unbekannten Größe enthalte, und daher durch die bloße Ausziehung einer Quadratwurzel auflösbar sey. Da nun die Wegschaffung des zweyten Gliedes in jeder Gleichung erfordert, daß man die Wurzeln, um den mit dem entgegengesetzten Zeichen geschriebenen und durch den Exponenten der Gleichung dividirten Coefficienten dieses Gliedes, d. h. um die Summe aller Wurzeln, dividiret durch ihre Anzahl, vermindere; so folgt, daß die reducirte Gleichung für den zweyten Grad zu Wurzeln haben wird, die Differenz der Wurzeln der gegebenen Gleichung, dividiret durch 2; oder vielmehr diese Differenz selbst; vorausgesetzt daß man die Wurzeln der reducirten Gleichung in dem Verhältniß 1 : 2 vergrößere, welches in der Natur dieser Gleichung nichts ändert.

Es scheinet daher als könnte man durch Induction schließen, daß jede Gleichung von jedem Grade, vermittelst einer reducirten Gleichung auflösbar sey, deren Wurzeln durch eben die Formel

$$x' + yx'' + y^2x''' + y^3x^{IV} + \text{etc.}$$

vorgestellt werden.

Allein nach dem was wir in dem vorigen Abschnitte bey Gelegenheit der Methoden von Euler und Bezout, welche geradezu auf einerley reducirte Gleichungen führen, gezeigt haben, wird man, wie es scheint, sich überzeugen können, daß dieser Schluß vom fünften Grade an, nicht mehr zutrift; und es folgt hieraus, daß die algebraische Auflösung der höheren Gleichungen, wofern sie nicht unmöglich ist, von gewissen Funktionen der Wurzeln abhängen müsse, die von den obigen verschieden sind.

87.

Da wir bis jetzt diese Gattung von Funktionen blos a posteriori, nach den bekannten Auflösungsmethoden der Gleichungen gesuchet haben: so ist es nöthig nunmehr zu untersuchen, wie man es anfangen müßte, dieselben a priori zu finden, ohne etwas anders vorauszusetzen, als das was unmittelbar aus der Natur der Gleichungen folget: und dies ist der Gegenstand mit welchem ich mich hauptsächlich in diesem Abschnitt beschäftigen werde.

Ich werde zuerst directe und allgemeine Regeln angeben, um den Grad und die Natur derjenigen Gleichung zu bestimmen, von welcher irgend eine gegebene Funktion der Wurzeln einer gegebenen Gleichung abhängen muß. Zwar haben sich schon geschickte Geometer mit dieser Materie beschäftiget; ich glaube aber, daß sie sich vielleicht auf eine mehr directe und allgemeine Art behandeln lässet, besonders bey dem Gesichtspunkt, den wir in Rücksicht der allgemeinen Auflösung der Gleichungen gewählt haben.

Ich werde ferner zeigen, welche Bedingungen zur Auflösbarkeit einer Gleichung nothwendig sind, wenn man nichts weiter voraussetzt als die Möglichkeit solche Gleichungen aufzulösen, welche niedriger sind, als die gegebene: und bey dieser Gelegenheit, werde ich die eigentlichen Gründe, und so zu sagen, die Metaphysik von der Auflösung der Gleichungen des dritten und vierten Grades zeigen.

Endlich werde ich kürzlich von der Reduction derer Gleichungen handeln, welche sich in andere einfachere auflösen lassen, weil unter ihren Wurzeln ein besonderes Verhältniß statt findet; und ich werde in einigen Beyspielen zeigen, wie

man

man diese Verhältnisse entdecken, und dadurch die vorgeleg-ten Gleichungen auf niedrigere Grade bringen kann.

88.

Wir werden hier keine andere als rationale Funktionen in Betrachtung ziehen, und wir wollen dieselben allgemein mit dem Zeichen f bezeichnen.

So soll f : (x) irgend eine rationale Funktion von x be-zeichnen; f : (x)(y) irgend eine rationale Funktion von x und y; f : (x) (y) (z) eine eben solche Funktion von x, y, z, und dergl. mehr.

Wenn in einer gegebenen Funktion f : (x)(y), die Größe y = x, so daß daraus eine bloße Funktion von x entspringt, so wollen wir, anstatt diese Funktion durch f : (x)(x) zu be-zeichnen, sie zur Abkürzung durch f : $(x)^2$ andeuten: eben so, wenn in der gegebenen Funktion f : (x)(y)(z), die Größe y = x gesetzt wird, so werden wir die daraus entstehende Funktion von x und z, durch f : $(x)^2(z)$ anzeigen, und wäre zugleich x = y = z, so erhält man blos eine Funktion von x, und wir bezeichnen dieselbe durch f : $(x)^3$.

Hätte man ferner eine Funktion von x und y, welche z. B. so beschaffen wäre, daß sie unverändert bliebe, wenn x und y verwechselt werden, d. h. eine Funktion f : (x)(y) von solcher Beschaffenheit daß f : (x)(y) = f : (y)(x), so wollen wir diese blos durch f : (x, y) anzeigen. Eben so wird f : (x, y, z) eine solche Funktion von x, y und z anzeigen, welche unverändert bleibt, wie man auch x, y und z ver-wechseln mag. So wird ferner f : (x, y)(z) eine solche ra-tionale Funktion von x, y und z anzeigen, welche unverän-

dert

dert bleibt, wenn man x und y verwechselt, z aber in seinen Stellen unverändert lässet, u. dgl. m.

Hätte man aber eine Funktion von x, y, z und u von solcher Beschaffenheit, daß sie unverändert bleibt, wenn man zu gleicher Zeit x mit z, und y mit u verwechselt, so werden wir dieselbe durch $f:((x)(y), (z)(u))$; wenn aber diese Funktion auch alsdenn unverändert bleibt, wenn man blos x mit y, oder z mit u verwechselt, so werden wir sie mit $f:((x, y), (z, u))$ bezeichnen.

Endlich, wenn man mehrere Funktionen von einerley Größen hat, so wollen wir diejenigen gleichartige Funktionen nennen, welche sich zugleich ändern, oder ungeändert bleiben, wenn man einerley Verwechselungen unter den Größen machet, aus welchen sie zusammengesetzt sind, so daß man sie auf ähnliche Art bezeichnen kann. Wenn man also die Zeichen f und φ braucht, um verschiedene Funktionen zu bezeichnen, so werden die Funktionen $f:(x)(y)$ und $\varphi:(x)(y)$, desgleichen die Funktionen $f:(x, y)$ und (x, y), gleichartig seyn.

89.

Wir wollen wie im vorigen Abschnitt annehmen, daß die gegebene Gleichung allgemein, durch

$$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

vorgestellt werde, und daß ihre Wurzeln, deren Anzahl μ seyn muß, x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\mu)}$ seyn.

Vermöge der Natur der Gleichungen ist also

$$-m = x' + x'' + x''' + x'''' + \text{ꝛc.}$$

$$n = x'x'' + x'x''' + x''x''' + x'x^{IV} + x''x^{IV} + x'''x^{IV} + \text{ꝛc.}$$

$$-p = x'x''x''' + x'x''x^{IV} + x'x'''x^{IV} + x''x'''x^{V} + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Es

Es fällt in die Augen, daß dieſe Funktionen von x', x'', x''', x^{IV}, ꝛc. durch welche die Größe $-m$, n, $-p$, ꝛc. ausgedrückt werden, alle nöthwendig von der Form

$$f:(x', x'', x''', x^{IV}, \text{ꝛc.})$$

ſind, und ſie werden demnach alle gleichartig ſeyn, welches eine Haupteigenſchaft der Gleichungen iſt.

90.

Dieſes vorausgeſetzt, ſo wollen wir, um mit dem einfachſten Fall anzufangen, annehmen, daß die gegebene Gleichung vom zweyten Grade ſey, und daß man die Gleichung verlange, durch welche die Funktion $f:(x')(x'')$ beſtimmt werden wird.

Ich ſetze $t = f:(x')(x'')$ ſo daß t die unbekannte Größe der geſuchten Gleichung iſt; und da x' und x'' beyde durch eine und dieſelbe Gleichung $x^2 + mx + n = 0$ beſtimmt werden, ſo ſchreibe ich um mehrerer Allgemeinheit willen x ſtatt x', und y ſtatt y''. Auf dieſe Art erhalte ich die Gleichung

$$t - f:(x)(y) = 0$$

aus welcher man x und y, durch die beyden Gleichungen

$$x^2 + mx + n = 0$$
$$y^2 + my + n = 0$$

wegſchaffen muß.

Es ſey $t - f:(x)(y) = X$. Man wird alſo zuerſt x, aus der Gleichung $X = 0$ mittelſt der Gleichung $x^2 + mx + n = 0$ wegſchaffen müſſen. Hierdurch erhält man eine Gleichung, welche ich mit $Y = 0$ bezeichnen werde, und in welcher Y eine rationale Funktion der Größen t, m, n und y ſeyn wird. Alsdenn ſchaft man aus dieſer letztern Gleichung y weg, vermittelſt der andern Gleichung $y^2 + my + n = 0$, so erhält man die Endgleichung $T = 0$, worin T eine rationale Funktion von t, m und n seyn wird.

Nun sind x' und x'' die Wurzeln der Gleichung $x^2 + mx + n = 0$. Wenn man daher die Werthe von X, welche aus der Substitution von x' und x'' statt x entspringen, X', X'' nennt, so ist (vermöge dessen was Nr. 13. im ersten Abschnitte erwiesen worden $Y = X'X''$. Nun sind x' und x'' auch die Wurzeln der Gleichung $y^2 + my + n = 0$; nennt man also die Werthe von Y welche aus der Substitution von x' und x'' statt x entspringen Y' und Y'', so ist eben so $T = Y'Y''$.

Es ist aber

$$X' = t - f : (x')(y)$$
$$X'' = t - f : (x'')(y)$$

folglich

$$Y = (t - f : (x')(y)) \times (t - f : (x'')(y)),$$

daher

$$Y' = (t - f : (x')(x')) \times (t - f : (x'')\,x'))$$
$$Y'' = (t - f : (x')(x'')) \times (t - f : (x'')(x''))$$

man erhält also

$$T = (t - f : (x')(x'')) \times (t - f : (x'')(x'))$$
$$\times (t - f : (x')^2) \quad \times (t - f : (x'')^2).$$

Betrachtet man aber die Funktion $f : (x)^2$ und setzet $t - f : (x)^2 = z$; so wird man, wenn x aus der Gleichung $z = 0$, durch die Gleichung $x^2 + mx + n = 0$ eliminiret wird, eine Gleichung $\vartheta = 0$ erhalten, worin ϑ eine rationale Funktion von t, und von m, n, seyn wird. Bezeichnet man nun durch z' und z'' die Werthe von z, welche aus der Substitution von x' und x'', statt x entspringen, so hat man $\vartheta = z'z''$.

Es

Es ist aber

$$\xi' = t - f : (x')^2$$
$$\xi'' = t - f : (x'')^2$$

folglich

$$\vartheta = (1 - f : (x')^2) \times (1 - f : (x'')^2).$$

Setzen wir nun

$$\Theta = (t - f : (x')(x'')) \times (t - f : (x'')(x'))$$

so wird $T = \Theta\vartheta$; und folglich $\Theta = \frac{T}{\vartheta}$: da nun T und ϑ rationale Funktionen von t, m und n sind, so wird offenbar auch Θ eine rationale Funktion von t, m und n seyn.

Demnach wird die Gleichung $T = 0$, in die beyden $\vartheta = 0$, und $\Theta = 0$ zerfället werden können; und da die erste von ihnen den Werth von $f : (x)^2$ giebt, so folgt, daß die Bestimmung der gegebenen Funktion $f : (x')(x'')$ blos von der zweyten Gleichung $\Theta = 0$ abhängen wird.

Um also die Gleichung $\Theta = 0$, welche unser Problem auflöset, zu finden, ist weiter nichts nöthig, als aus den Gleichungen

$$t - f : (x)(y) = 0$$
$$t - f : (x)^2 = 0$$

die unbekannten Größen x und y zu eliminiren, vermittelst der Gleichungen

$$x^2 + mx + n = 0$$
$$y^2 + my + n = 0$$

und wenn man die hieraus entspringenden Gleichungen durch $T = 0$ und $\vartheta = 0$ bezeichnet, so erhält man $\Theta = \frac{T}{\vartheta}$.

91.

Aus dem Ausdruck für Θ ersiehet man, daß die Gleichung $\Theta = 0$, welche zur Bestimmung der Funktion $f:(x')(x'')$ dienet, vom zweyten Grade ist, und daß ihre Wurzeln $f:(x')(x'')$ und $f:(x'')(x')$ sind. Und in der That, da die Wurzeln x', x'', durch eine einzige Gleichung $x^2 + mx + n = 0$ bestimmt sind, so ist offenbar, daß die beyden Funktionen $f:(x')(x'')$ und $f:(x'')(x')$ die blos darin verschieden sind, daß die Wurzeln x', x'' in ihnen verwechselt sind, Wurzeln einer einzigen Gleichung seyn müssen.

Wäre die Funktion $f:(x')(x'')$ von der Form $f:(x', x'')$, so daß $f:(x')(x'') = f:(x'')(x')$ wäre (Nr. 88.), so hätte man $\Theta = (t - f:(x', x''))^2$; folglich würde sich die Gleichung $\Theta = 0$, blos in $t - f:(x', x'') = 0$ verwandeln, und hieraus ergiebt sich daß für diesen Fall die gesuchte Funktion blos durch eine Gleichung vom ersten Grade bestimmt seyn wird; sie wird also durch einen rationalen Ausdruck von m und n gegeben werden.

92.

Es sey nunmehr die Gleichung zu finden, durch welche die Funktion $f:(x')(x'')(x''')$ bestimmt werden muß, vorausgesetzt, daß x', x'', x''' die Wurzeln der cubischen Gleichung $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ sind.

Man nehme wie im vorigen t für die unbekannte Größe der gesuchten Gleichung, und setze x, y, z für die Wurzeln x', x'', x''', so hat man die Gleichung

$$t - f:(x)(y)(z) = 0$$

aus welcher man x, y und z durch die drey Gleichungen

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$
$$y^3 + my^2 + ny + p = 0$$
$$z^3 + mz^2 + nz + p = 0$$

eliminiren muß.

Es sey $t - f:(x)(y)(z) = X$. Eliminiret man nun zuerst x aus der Gleichung $X = 0$, vermittelst der Gleichung für x, so erhält man eine zweyte Gleichung, welche ich durch $Y = 0$ vorstelle, und worin Y eine rationale Funktion von t, y, z und von den Coefficienten m, n, p seyn wird. Eliminiret man nun y aus der Gleichung $Y = 0$, vermittelst der Gleichung für y, so erhält man eine dritte Gleichung welche ich durch $Z = 0$ vorstelle, und worin Z eine rationale Funktion von t, z, und von den Coefficienten m, n, p seyn wird. Eliminiret man endlich z aus dieser Gleichung $Z = 0$, vermittelst der Gleichung für z, so erhält man die letzte Gleichung, welche man durch $T = 0$ vorstellen kann, und worin T eine rationale Funktion von t, m, n, p seyn wird.

Es sind aber x', x'', x''' die Wurzeln der Gleichung für x. Wenn man demnach durch X', X'', X''' die Werthe von X bezeichnet, welche aus der Substitution dieser Wurzeln für x entspringen, so ist nach Nr. 13. $Y = X'X''X'''$. Es sind aber x', x'', x''' auch die Wurzeln der Gleichung für y. Wenn man demnach durch Y', Y'', Y''' die Werthe von y bezeichnet, welche aus der Substitution von x', x'', x''' für y entspringen, so ist aus eben dem Grunde $Z = Y'Y''Y'''$. Endlich sind x', x'', x''' auch die Wurzeln der Gleichung für z, und wenn man also die Werthe von z, welche aus der Substitution dieser Werthe für z entspringen, Z', Z'', Z''' nennt; so erhält man $T = Z'Z''Z'''$.

Es ist aber offenbar, daß

$$X' = t - f : (x')(y)(z)$$
$$X'' = t - f : (x'')(y)(z)$$
$$X''' = t - f : (x''')(y)(z).$$

Daher ist

$$Y = (t - f : (x')(y)(z))(t - f : (x'')(y)(z))(t - f : (x''')(y)(z)).$$

Folglich erhält man

$$\begin{aligned} Y' = {} & (t - f : (x')(x')(z)) \times (t - f : (x'')(x')(z)) \\ & \times (t - f : (x''')(x')(z)) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} Y'' = {} & (t - f : (x')(x'')(z)) \times (t - f : (x'')(x'')(z)) \\ & \times (t - f : (x''')(x'')(z)) \end{aligned}$$
$$\begin{aligned} Y''' = {} & (t - f : (x')(x''')(z)) \times (t - f : (x'')(x''')(z)) \\ & \times (t - f : (x''')(x''')(z)). \end{aligned}$$

Daher

$$\begin{aligned} Z = {} & (t - f : (x')(x'')(z)) \times (t - f : (x')(x''')(z)) \\ & \times (t - f : (x'')(x''')(z)) \times (t - f : (x'')(x')(z)) \\ & \times (t - f : (x''')(x')(z)) \times (t - f : (x''')(x'')(z)) \\ & \times (t - f : (x')^2 (z)) \times (t - f : (x'')^2 (z)) \\ & \times (t - f : (x''')^2 (z)). \end{aligned}$$

Demnach

$$\begin{aligned} Z' = {} & (t - f : (x')(x'')(x') \times (t - f : (x')(x''')(x')) \\ & \times (t - f : (x'')(x''')(x') \times (t - f : (x'')(x')^2) \\ & \times (t - f : (x''')(x')^2) \times (t - f : (x''')(x'')(x')) \\ & \times (t - f : (x')^3) \times (t - f : (x'')^2 (x')) \\ & \times (t - f : (x''')^2 (x')). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Z'' = {} & (t - f : (x')(x'')^2) \times (t - f : (x')(x''')(x'')) \\ & \times (t - f : (x'')(x''')(x'')) \times (t - f : (x'')(x')(x'')) \\ & \times (t - f : (x''')(x')(x'')) \times (t - f : (x''')(x'')^2) \\ & \times (t - f : (x')^2 (x'')) \times (t - f : (x'')^3) \\ & \times (t - f : (x''')^2 (x'')). \end{aligned}$$

$Z''' =$

$$\begin{aligned}
Z''' = {} & (t - f : (x')(x'')(x''')) \times (t - f : (x')(x''')^2) \\
& \times (t - f : (x'')(x''')^2) \times (t - f : (x'')(x')(x''')) \\
& \times (t - f : (x''')(x')(x''')) \times (t - f : (x''')(x'')(x''')) \\
& \times (t - f : (x')^2 (x''') \times (t - f : (x'')^2 (x''')) \\
& \times (t - f : (x''')^3).
\end{aligned}$$

Endlich wenn man diese drey Größen multipliciret, zur Abkürzung aber setzet

$$\begin{aligned}
\Theta = {} & (t - f : (x')(x'')(x''')) \times (t - f : (x'')(x')(x''')) \\
& \times (t - f : (x''')(x'')(x')) \times (t - f : (x')(x''')(x'')) \\
& \times (t - f : (x''')(x')(x'')) \times (t - f : (x'')(x''')(x'))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta = {} & (t - f : (x')^3) \times (t - f : (x'')^3) \\
& \times (t - f : (x''')^3),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta 1 = {} & (t - f : (x')^2 (x'')) \times (t - f : (x'')^2 (x')) \\
& \times (t - f : (x''')^2 (x'')) \times (t - f : (x')^2 (x''')) \\
& \times (t - f : (x''')^2 (x')) \times (t - f : (x'')^2 (x'''))
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta 2 = {} & (t - f : (x')(x'')^2) \times (t - f : (x'')(x')^2) \\
& \times (t - f : (x''')(x'')^2) \times (t - f : (x')(x''')^2) \\
& \times (t - f : (x''')(x')^2) \times (t - f : (x'')(x''')^2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta 3 = {} & (t - f : (x')(x'')(x')) \times (t - f : (x'')(x')(x'')) \\
& \times (t - f : (x''')(x'')(x''')) \times (t - f : (x')(x''')(x')) \\
& \times (t - f : (x''')(x')(x''')) \times (t - f : (x'')(x''')(x''))
\end{aligned}$$

so erhält man $T = \Theta \vartheta \vartheta 1 \vartheta 2 \vartheta 3$.

Nun bemerke ich, daß, wenn man $t - f : (x)^3 = 0$ setzet, und x durch Hülfe der Gleichung für x, $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$ eliminiret, man wie unter der vorigen Nr. die Endgleichung $\vartheta = 0$ finden wird, so daß ϑ nothwendig eine rationale Funktion von t, und von den Coefficienten m, n, p seyn wird.

Aus eben den Gründen wird, wenn $t - f : (x^2)(y) = 0$ gesetzt, und dann x und y eines nach dem andern durch die

Gleichungen für x und y, nemlich $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, und $y^3 + my^2 + ny + p = 0$, eliminiret wird, die Endgleichung, welche man erhält $\vartheta\vartheta_1 = 0$ seyn; worin also die Größe $\vartheta\vartheta_1$ eine rationale Funktion von t, m, n, p seyn wird; und da ϑ eine eben solche Funktion war, so folgt, daß auch ϑ_1 eine rationale Funktion von t, m, n, p seyn werde.

Setzt man auf eben die Art $t - f:(x)(y)^2 = 0$ und eliminiret x und y durch die nemlichen Gleichungen, so ist die Endgleichung, welche man findet $\vartheta\vartheta_2 = 0$, worin also die Größe $\vartheta\vartheta_2$, und folglich auch die Größe ϑ_2 eine rationale Funktion von t, m, n, p seyn wird.

Setzt man endlich $t - f:(x)(y)(z) = 0$, und eliminiret man eben so x und y, so findet man die Endgleichung $\vartheta\vartheta_3 = 0$; so daß die Größe $\vartheta\vartheta_3$, und folglich auch ϑ_3 eine rationale Funktion von t, m, n, p seyn wird.

Da also jede der Größen ϑ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 eine rationale Funktion von t, und von den Coefficienten m, n, p ist, so folgt, daß die Gleichung $T = 0$, oder $\Theta\vartheta\vartheta_1\vartheta_2\vartheta_3 = 0$ in folgende Gleichungen auflösbar seyn wird $\vartheta = 0$; $\vartheta_1 = 0$; $\vartheta_2 = 0$; $\vartheta_3 = 0$; $\Theta = 0$: demnach muß auch Θ eine rationale Funktion von t, m, n, p seyn.

Es ist aber leicht zu übersehen, daß die Gleichungen $\vartheta = 0$, $\vartheta_1 = 0$, $\vartheta_2 = 0$, $\vartheta_3 = 0$ mit unserer Aufgabe gar nicht in Verbindung stehen, d. h. daß sie zu der Bestimmung der Funktion $f:(x')(x'')(x''')$ nichts beytragen; denn aus den Ausdrücken für ϑ, ϑ_1, ϑ_2, ϑ_3 fällt es in die Augen, daß sie als Funktionen von x', x'', x''', von einer ganz andern Form sind, als die gegebene Funktion. Es bleibt also blos die Gleichung $\Theta = 0$ übrig, welche folglich alle Wur-

zeln

zeln enthalten wird, die wir zur Auflösung unsers Problems brauchen.

93.

Um nun diese Gleichung $\Theta = 0$ zu finden, so ist blos nöthig, aus den fünf Gleichungen

$$t - f : (x)(y)(z) = 0$$
$$t - f : (x^2)(y) = 0$$
$$t - f : (x)(y)^2 = 0$$
$$t - f : (x)(y)(x) = 0$$
$$t - f : (x)^3 = 0$$

die unbekannten Größen x, y, z vermittelst der Gleichungen

$$x^3 + mx^2 + nx + p = 0$$
$$y^3 + my^2 + ny + p = 0$$
$$z^3 + mz^2 + nz + p = 0$$

zu eliminiren; und wenn man die hieraus entspringenden Endgleichungen mit $T = 0$, $T1 = 0$, $T2 = 0$, $T3 = 0$, und $\vartheta = 0$ bezeichnet, so erhält man $T1 = \vartheta\vartheta1$, $T2 = \vartheta\vartheta2$, $T3 = \vartheta\vartheta3$, und $T = \Theta\vartheta\vartheta1\vartheta2\vartheta3$, folglich

$$\Theta = \frac{T\vartheta^2}{T1\,T2\,T3}.$$

Uebrigens wird diese Methode in der Anwendung äusserst weitläuftig und verdrießlich seyn, und dies immer mehr, je höher die gegebene Gleichung ist. Ich habe sie auch blos deswegen vorgetragen, weil sie zeigt, wie man die Natur der Gleichung $\Theta = 0$ auf eine ganz directe und von allen fremden Betrachtungen unabhängige Art, untersuchen könne.

94.

Aus dem oben Nr. 92. für Θ gegebenen Ausdruck ist es augenscheinlich, daß die reducirte Gleichung $\Theta = 0$ vom

6ten Grade seyn, und folgende Funktionen zu Wurzeln haben wird,

$$f:(x')(x'')(x'''),\quad f:(x'')(x')(x'''),\quad f:(x''')(x'')(x'),$$
$$f:(x')(x''')(x''),\quad f:(x''')(x')(x''),\quad f:(x'')(x''')(x'),$$

welche alle gleichartig sind, und auseinander durch die bloße Verwechselung der Größen x', x'', x''' entspringen. Und da diese Größen sämtlich auf gleiche Art durch die Gleichung $x^3 + mx^2 + nx + p = 0$, deren Wurzeln sie vorstellen, bestimmt sind; so fällt unmittelbar in die Augen, daß jede Gleichung, die den Werth irgend einer Funktion dieser Größen ausdrückt, zugleich auf gleiche Art alle übrige Funktionen geben müsse, die aus allen möglichen Verwechselungen dieser Größen entspringen. Dieser Satz ist offenbar so evident, daß er keines weiteren Beweises bedarf; aber nicht ganz so evident ist es, wie ich glaube, daß die Gleichung von der wir reden, nicht auch noch andere Wurzeln enthalten könnte, als die welche aus den Verwechselungen der Wurzeln der gegebenen Gleichung entspringen; dies heißt, daß, wenn man diese Gleichung als ein Produkt aus den einfachen Faktoren $t - f:(x')(x'')(x''')$, $t - f:(x'')(x')(x''')$ ꝛc. betrachtet, jeder ihrer Coefficienten jederzeit durch eine rationale Funktion der Coefficienten m, n, ꝛc. der gegebenen Gleichung ausgedrückt werden könne. Hierüber läßt aber unsere Demonstration keinen Zweifel; denn wir haben gesehn, daß die Größe Θ welche diesem Produkte gleich ist, nothwendig eine rationale Funktion von t, m, n, ꝛc. seyn müsse.

95.

Wäre die gegebene Gleichung von einem höheren Grade, so daß sie vier oder mehr Wurzeln x', x'', x''', x^{IV}, ꝛc. hätte, so wird man die Gleichung $\Theta = 0$, durch welche die Funktion $f:(x')(x'')(x''')(x'''')\ldots\ldots$, bestimmt wird, eben so

finden

finden können, und man siehet, daß die Größe Θ, ein Produkt von so vielen einfachen Faktoren folgender Form

$$t - f : (x')(x'')(x''')(x'''') \ldots$$
$$t - f : (x'')(x')(x''')(x'''') \ldots$$
$$t - f : (x''')(x'')(x')(x'''') \ldots$$
$$t - f : (x'')(x''')(x')(x'''') \ldots$$

rc.

seyn werde, als viele Versetzungen unter den Wurzeln x', x'', x''', x'''', rc. möglich sind. Ist demnach die gegebene Gleichung von dem Grade μ, so wird die Anzahl der einfachen Faktoren von Θ, also auch die Anzahl der Wurzeln der Gleichung $\Theta = 0$, gleich seyn $1.2.3 \ldots \mu$; denn dies ist die Anzahl der unter μ Dingen möglichen Versetzungen, und die Wurzeln dieser Gleichung werden die verschiedenen Funktionen seyn, in welche sich die gegebene Funktion $f : (x')(x'')(x''') \ldots$ durch die Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''' verwandeln kann.

96.

Um aber alle diese Funktionen nach der Reihe, und ohne eine auszulassen, zu finden, verwechsle man zuerst in der gegebenen Funktion x'' mit x', und umgekehrt, so erhält man zwey Funktionen: dann verwechsele man nach und nach in diesen beyden Funktionen x'' mit x', und mit x''; so erhält man sechs Funktionen: dann verwechsele man in diesen sechs Funktionen nach und nach x'''', mit x', mit x'', mit x'''; so erhält man vier und zwanzig Funktionen: und so nach der Reihe weiter, bis alle Wurzeln x', x'', x''', rc. erschöpft sind.

Man sieht hieraus ganz deutlich, daß die Anzahl der verschiedenen Funktionen, nach den Produkten der natürli-

chen

chen Zahlenreihe $1, 1.2, 1.2.3, 1.2.3.4,$ 2c. $1.2.3.4.5 \ldots \mu$ wachsen wird.

Hat man alle diese Funktionen, so hat man die Wurzeln der Gleichung $\Theta = 0$; und stellt man dieselbe durch

$$t^{\pi} - Mt^{\pi - 1} + Nt^{\pi - 2} - Pt^{\pi - 3} + \text{2c.} = 0$$

vor, so ist $\pi = 1.2.3 \ldots \mu$; und der Coefficient M wird gleich seyn, der Summe aller gefundenen Funktionen, der Coefficient N, der Summe aller Produkte von je zwey Funktionen; der Coefficient P, die Summe aller Produkte von je drey solcher Funktionen; u. s. f.

Und da wir oben bewiesen haben, daß der Ausdruck für Θ nothwendig eine rationale Funktion von t, und von den Coefficienten m, n, p, 2c. der gegebenen Gleichung, seyn muß, so folgt, daß die Größen M, N, P, 2c. eben so nothwendig rationale Funktionen von m, n, p, 2c. seyn werden, welche man directe finden kann, wie wir dieses im vorigen Abschnitte wirklich gethan haben. Man vergleiche hierüber, außer dem schon angeführten Werk von Cramer, noch Warings Meditationes algebraicae, ein Werk, welches die vortreflichsten Untersuchungen über die Gleichungen enthält.

97.

Obgleich die Gleichung $\Theta = 0$ im allgemeinen von dem Grade $1.2.3 \ldots \mu = \pi$ (welches die Zahl aller möglichen Versetzungen der μ Wurzeln x', x'', x''', 2c. ist), seyn muß, so kann es sich doch treffen, daß die gegebene Funktion von solcher Beschaffenheit ist, daß sie durch eine gewisse, oder durch gewisse Verwechselungen dieser Art, keine Aenderung leidet, und dann muß sich unsere Gleichung nothwendig auf einen niedrigern Grad bringen lassen.

Denn

Denn wenn wir z. B. annehmen, daß die Funktion $f:(x')(x'')(x''')(x'''')\ldots$ von solcher Beschaffenheit sey, daß ihr Werth, durch Verwandelung der Wurzeln x' in x'', x'' in x''', x''' in x', nicht verändert wird, so daß

$$f:(x')(x'')(x''')(x'''')\ldots = f:(x'')(x''')(x')(x'''')\ldots$$

so ist augenscheinlich, daß die Gleichung $\Theta = 0$ zwey gleiche Wurzeln haben wird; ich werde aber beweisen, daß bey dieser Voraussetzung, auch unter den übrigen Wurzeln immer je zweye gleich seyn werden. Man betrachte irgend eine andere Wurzel derselben Gleichung, welche z. B. durch die Funktion $f:(x'''')(x''')(x')(x'')\ldots$ vorgestellt werden mag: da nun diese Funktion aus der Funktion $f:(x')(x'')(x''')(x'''')\ldots$ entstehet, indem man x' in x'''', x'' in x''', x''' in x', und x'''' in x'' verwandelt, so folgt, daß sie unverändert denselben Werth behalten werde, wenn man darin x'''' in x''', x''' in x', und x' in x'''' verwandelt, so daß

$$f:(x'''')(x''')(x')(x'')\ldots = f:(x''')(x')(x'''')(x'')\ldots$$

seyn wird. Demnach wird in diesem Falle die Größe Θ einem Quadrate ϑ^2 gleich seyn, und die Gleichung $\Theta = 0$ wird sich also auf $\vartheta = 0$ reduciren, deren Dimension $\frac{\pi}{2}$ seyn wird.

Auf eben die Art läßt sich erweisen, daß wenn die Funktion $f:(x')(x'')(x''')(x'''')\ldots$ von solcher Beschaffenheit ist, daß durch zwey, oder drey, oder mehr unterschiedene Verwechselungen der Wurzeln x', x'', x''', x'''', ꝛc. ihr Werth nicht geändert wird, daß sich alsdenn unter den Wurzeln der Gleichung $\Theta = 0$, je drey, oder je vier, ꝛc. gleiche Wurzeln finden werden; so daß die Größe Θ, einem Cubus ϑ^3 oder einem Biquadrat ϑ^4, ꝛc. gleich seyn wird: demnach

wird

wird sich die Gleichung $\Theta = 0$, auf $\vartheta = 0$ reduciren, deren Höhe $= \frac{\pi}{3}$, oder $= \frac{\pi}{4}$ rc. seyn wird.

98.

Ist demnach die gegebene Funktion von der Form

$$(x', x'')(x''')(x'''') \ldots$$

welche durch die Verwechselung von x', uud x'' nicht geändert wird, Nr. 88, so werden unter allen Wurzeln der Gleichung $\Theta = 0$, immer zwey und zwey gleich seyn, so daß diese Gleichung auf den Grad $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \mu}{2}$ herabgesetzt wird.

Wenn eben so die Funktion

$$(x', x'', x''')(x'''')(x^{v}) \ldots$$

ungeändert bleibt, was man auch für Versetzungen mit den drey Wurzeln x', x'', x''' machen mag; so folget, daß unter den Wurzeln der Gleichung $\Theta = 0$, immer $1.2.3$ und $1.2.3$ Wurzeln gleich seyn werden, demnach kann sie auf den Grad $\frac{1.2.3 \ldots \mu}{1.2.3}$ herabgesetzt werden.

Die Funktion

$$(x', x'')(x''', x'''')(x^{v}) \ldots$$

welche bey den Verwechselungen von x', und x'', so wie auch von x''' und x'''', ungeändert bleibt, wird auf eine Gleichung $\Theta = 0$ führen, unter deren Wurzeln immer $1.2.1.2$ und $1.2.1.2$ gleiche sind; sie wird sich also auf den Grad $\frac{1.2.3 \ldots \mu}{1.2.1.2}$ herabsetzen lassen.

Ganz

Ganz allgemein, wird die Funktion

$$(x', x'', x''' \ldots x^{(\alpha)})(x^{(\alpha+1)}, x^{(\alpha+2)}, x^{(\alpha+3)} \ldots x^{(\alpha+\beta)})(x^{(\alpha+\beta+1)} \ldots) \ldots$$

auf eine Gleichung $\Theta = 0$ führen, worin die Größe Θ eine Potenz von dem Exponenten

$$1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta . 1.2.3 \ldots$$

seyn wird; so daß sich diese Gleichung auf den Grad

$$\frac{1.2.3.4 \ldots \mu}{1.2.3 \ldots \alpha . 1.2.3 \ldots \beta . 1.2.3 \ldots}$$

wird reduciren laſſen.

Man ſiehet hieraus, daß jede Funktion von der Form

$$f : (x', x'', x''', \ldots x^{(\mu)}),$$

welche die Eigenſchaft hat, daß ſie bey allen möglichen Verwechſelungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\mu)}$ unverändert bleibt, blos von einer Gleichung von dem Grade $\frac{1.2.3 \ldots \mu}{1.2.3 \ldots \mu} = 1$ abhängen wird; ſo daß ſie ſich algebraiſch und rational durch die Coefficienten m, n, p, ꝛc. der gegebenen Gleichung muß beſtimmen laſſen. Ein Lehrſatz, den wir ſchon in den vorigen Abſchnitten, als durch ſich ſelbſt evident zum Grunde gelegt haben, deſſen ſtrenger Beweis aber von den hier entwickelten Sätzen abhängt.

Auch läßt ſich aus den vorgetragenen Sätzen der Schluß machen, daß wenn man irgend eine Funktion, welche von den μ Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. nur λ Wurzeln enthält, ſo daß man ſie durch

$$f : (x')(x'')(x''') \ldots (x^{\lambda})$$

vorſtellen kann, daß, ſage ich, dieſe Funktion blos auf eine Gleichung von dem Grade $\frac{1.2.3 \ldots \mu}{1.2.3 \ldots \mu - \lambda}$ führen wird;

denn

denn es ist klar, daß man diese Funktion so ansehen kann, als wäre sie von der Form

$$f:(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)})(x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, \ldots x^{(\mu)}),$$

vorausgesetzt, was jederzeit frey stehet, daß die Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, 2c. $x^{(\mu)}$, jede mit einem Coefficienten $=0$ multipliciret, oder zu der Potenz von dem Exponent $=0$ erhoben seyn.

Demnach wird die Funktion

$$f:(x', x'')(x''', x'''', x^{v} \ldots x^{(\lambda)})$$

zu einer Gleichung, von dem Grad $\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.1.2.3\ldots\mu-\lambda}$ führen; und eben so in ähnlichen Fällen.

Und die Funktion

$$f:(x', x'', x''', \ldots x^{(\lambda)})$$

wird zu einer Gleichung von dem Grad

$$\frac{1.2.3\ldots\mu}{1.2.3\ldots\lambda.1.2.3\ldots\mu-\lambda} = \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda+1)}{1.2.3\ldots\lambda}$$

führen.

Wollte man demnach allgemein die Gleichung von dem Grade μ, auf folgende Gleichung von dem niedrigern Grad λ reduciren

$$x^{\lambda} + ax^{\lambda-1} + bx^{\lambda-2} + \text{2c.} = 0$$

welche alle Wurzeln mit der gegebenen gemein hat, d. h. deren Wurzeln x', x'', x''', 2c. $x(\lambda)$ sind, so wird man unvermeidlich auf eine Gleichung von dem Grad

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda+1)}{1.2.3\ldots\lambda}$$

kommen,

kommen, um jeden Coefficienten a, b, c, ꝛc. zu beſtimmen: denn dieſe Coefficienten werden nothwendig von der Form

$$f:(x', x'', x''' \ldots\ldots x^{(\lambda)})$$

ſeyn, wie dies Nr. 89. gezeigt worden. Dies iſt ein ſchon längſt bekannter Satz, der aber, wie es mir ſcheinet, noch nie ſcharf erwieſen worden.

Da nun, wenn $\lambda < \mu$, die Zahl

$$\frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)\ldots(\mu-\lambda+1)}{1.2.3\ldots\lambda}$$

niemals $< \mu$ ſeyn kann, ſo folgt, daß man ſich aus dieſer Art von Reduction für die allgemeine Auflöſung der Gleichungen nichts verſprechen kann.

99.

Aus allen dem was wir ſo eben erwieſen haben, folgt demnach allgemein: 1) daß alle gleichartigen Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. einer Gleichung, nothwendig durch Gleichungen von einem Grad gegeben werden. 2) Daß dieſer Grad jederzeit gleich iſt der Zahl $1.2.3\ldots\mu$ (wenn μ den Grad die gegebene Gleichung bezeichnet) oder einem ſubmultiplum derſelben. 3) Um die einfachſte Gleichung $\vartheta = 0$ durch welche irgend eine Funktion von x', x'', x''', ꝛc. beſtimmt werden muß, unmittelbar zu finden, iſt weiter nichts nöthig, als die verſchiedenen Werthe zu ſuchen, welche dieſe Funktion durch die Verwechſelungen der Größen x', x'', x''', ꝛc. annehmen kann; dieſe Werthe ſind alsdenn die Wurzeln der geſuchten Gleichung, und man wird vermittelſt derſelben die Coefficienten der geſuchten Gleichung, vermöge der bekannten, und in dieſer Abhandlung öfters gebrauchten Methoden, beſtimmen können.

100.

Sobald man aber, entweder durch Auflösung der Gleichung $\vartheta = 0$, oder auf andere Art, den Werth einer gegebenen Funktion von x', x'', x''', ꝛc. gefunden hat, so behaupte ich, daß man auch im Stande seyn werde den Werth irgend einer andern Funktion eben derselben Wurzeln zu finden, und zwar, allgemein genommen, durch eine blos lineäre Gleichung, gewisse besondere Fälle ausgenommen, welche eine Gleichung vom zweyten oder dritten Grad erfordern. Dies Problem scheint mir in der Theorie der Gleichungen eines der wichtigsten zu seyn, und die Auflösung desselben, welche wir sogleich vortragen werden, wird ein neues Licht über diesen Theil der Algeber verbreiten.

Wir werden anfänglich, um die Untersuchung einfacher zu machen, annehmen, daß die beyden vorgelegten Funktionen, davon die eine einen bekannten, die andere einen unbekannten Werth hat, gleichartig sind, in dem Sinne, wie wir diesen Ausdruck Nr. 88. erklärt haben. Wir werden allgemein, die erste mit t, die andere mit y bezeichnen. Ferner sollen die Zeichen t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ die verschiedenen Werthe von t vorstellen, welche aus allen möglichen Verwechselungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. entspringen; und eben so sollen y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$ die verschiedenen Werthe der Funktion y anzeigen, welche aus eben denselben Verwechselungen entspringen; denn da wir voraussetzen, daß die Funktionen x und y gleichartig sind, so folgt, daß die Anzahl der verschiedenen Werthe, die sie durch alle mögliche Verwechselungen von x', x'', x''', ꝛc. erhalten, bey beyden gleich sey, und daß diese Werthe, aus den nemlichen Verwechselungen in beyden Funktionen entspringen werden.

Die

Die Größen t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ werden demnach die Wurzeln der Gleichung für t, und eben so y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$ die Wurzeln der Gleichung für y seyn, und beyde Gleichungen werden folglich von dem Grad π seyn. Beyde Gleichungen könnte man nun nach den oben vorgetragenen Methoden finden; allein es wird blos nöthig seyn die Gleichung für t zu suchen, welche wir allgemein durch

$$1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \text{ꝛc.} + Kt^\pi = 0$$

bezeichnen wollen, oder ganz einfach durch $\vartheta = 0$, vorausgesetzt daß

$$\vartheta = 1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \text{ꝛc.} + Kt^\pi$$

Die Coefficienten dieser Gleichung A, B, C, ꝛc. werden bekannte Funktionen der Coefficienten m, n, p, ꝛc. der gegebenen Gleichung seyn, deren Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. sind.

Wenn man nun nach diesen Voraussetzungen, allgemein die Funktion $t^\lambda y$ betrachtet, so fällt in die Augen, daß die verschiedenen Werthe dieser Funktion, welche aus allen möglichen Verwechselungen der Wurzeln x', x'', x''', entspringen, folgende seyn werden, $t'^\lambda y'$, $t''^\lambda y''$, $t'''^\lambda y'''$, ꝛc. $(t^{(\pi)})^\lambda y^{(\pi)}$; und nimmt man nun die Summe aller dieser Werthe, so erhält man die Funktion

$$t'^\lambda y' + t''^\lambda y'' + t'''^\lambda y''' + \text{ꝛc.} + (t^{(\pi)})^\lambda y^{(\pi)}$$

welche die Eigenschaft hat, daß sie unverändert bleibt, was man auch für Verwechselungen unter den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. machen mag; sie wird sich folglich algebraisch und rational durch die Coefficienten m, n, p, ꝛc. ausdrucken lassen (Nr. 98.)

Suchet man nun die Werthe dieser Funktion, für die Exponenten $\lambda = 0, 1, 2, 3,$ ꝛc. $\pi - 1$, und bezeichnet diese

Größen durch M, $M1$, $M2$, $M3$, ꝛc. $M(\pi-1)$, so erhält man folgende π Gleichungen

$$y' + y'' + y''' + \text{ꝛc.} + y^{(\pi)} = M$$
$$t'y' + t''y'' + t'''y''' + \text{ꝛc.} + t^{(\pi)}y^{(\pi)} = M1$$
$$t'^2y' + t''^2y'' + t'''^2y''' + \text{ꝛc.} + (t^{(\pi)})^2y^{(\pi)} = M2$$
$$t'^3y' + t''^3y'' + t'''^3y''' + \text{ꝛc.} + (t^{(\pi)})^3y^{(\pi)} = M3$$
$$\text{ꝛc.}$$
$$t'^{\pi-1}y' + t''^{\pi-1}y'' + t'''^{\pi-1}y''' + \text{ꝛc.} + (t^{(\pi)})^{\pi-1}y^{(\pi)} = M(\pi-1)$$

wo M, $M1$, $M2$, ꝛc. $M(\pi-1)$, bekannte durch m, n, p, ꝛc. ausgedrückte Größen seyn werden.

Aus diesen π Gleichungen muß man nun, vermittelst der Elimination die Werthe der π unbekannten Größen y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$ ableiten. Wollte man sich aber hierbey der gewöhnlichen Methode bedienen, so würde man in sehr verwickelte Ausdrücke gerathen, welche außerdem noch die Unbequemlichkeit haben, daß sie alle Größen t', t'', t''', ꝛc. zugleich enthalten würden. Wir müssen demnach eine andere Methode anwenden, und es scheint mir folgende die ganz eigentlich hieher gehörige zu seyn.

Ich nehme eine Anzahl von $\pi - 1$ unbestimmten Größen an, welche ich durch $N1$, $N2$, $N3$, ꝛc. $N(\pi-1)$ bezeichne, mit diesen Größen multiplicire ich respective die obigen Gleichungen, die erste ausgenommen; dann addire ich sie sämmtlich und erhalte folgende einzige Gleichung

$$M + M1N1 + M2N2 + M3N3 + \text{ꝛc.} + M(\pi-1)N(\pi-1)$$
$$= (1 + N1t' + N2t'^2 + N3t'^3 + \text{ꝛc.} + N(\pi-1)t'^{\pi-1})y'$$
$$+ (1 + N1t'' + N2t''^2 + N3t''^3 + \text{ꝛc.} + N(\pi-1)t''^{\pi-1})y''$$
$$+ (1 +$$

$$+ (1 + N1t''' + N2t'''^2 + N3t'''^3 + \text{ꝛc.} + N(\pi-1)t'''^{\pi-1})y'''$$

$$\text{ꝛc.}$$

$$+ (1 + N1t^{(\pi)} + N2(t^{(\pi)})^2 + N3(t^{(\pi)})^3 + \text{ꝛc.}$$
$$+ N(\pi-1)(t^{(\pi)})^{\pi-1})y^{(\pi)}$$

Setzen wir nun allgemein

$$T = 1 + N1t + N2t^2 + N3t^3 + \text{ꝛc.} + N(\pi-1)t^{\pi-1}$$

und bezeichnen durch T', T'', T''', ꝛc. $T^{(\pi)}$ die partikulären Werthe von T, welche man erhält, wenn man nach und nach $t = t'$, t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ ſetzet, ſo iſt offenbar, daß ſich die obige Gleichung auf folgende einfache Form reduciren wird

$$T'y' + T''y'' + T'''y''' + \text{ꝛc.} + T^{(\pi)}y^{(\pi)}$$
$$= M + M1N1 + M2N2 + M3N3 + \text{ꝛc.} + M(\pi-1)N(\pi-1).$$

Um nun den Werth irgend einer der unbekannten Größen y', y'', y''', ꝛc. z. B. $y^{(\varrho)}$ zu finden, ſo iſt offenbar nichts weiter nöthig, als daß man die Coefficienten aller unbekannten Größen, dieſe $(y^{(\varrho)})$ ausgenommen, $= 0$ mache, alsdenn ergiebt ſich

$$y^{(\varrho)} = \frac{M + M1N1 + M2N2 + \text{ꝛc.} + M(\pi-1)N(\pi-1)}{T^{(\varrho)}}$$

und vermittelſt der Gleichungen $T' = 0$, $T'' = 0$, $T''' = 0$, ꝛc. $T^{(\pi)} = 0$, (nur nicht $T^{(\varrho)} = 0$) wird man die $\pi - 1$ unbeſtimmten Größen $N1$, $N2$, $N3$, ꝛc. $N(\pi-1)$ beſtimmen können.

Bedenkt man nun daß alle dieſe partikulären Gleichungen zugleich ſtatt finden, ſo iſt offenbar, daß die Gleichung $T = 0$ die Größen t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$, blos $t^{(\varrho)}$ ausgenommen, zu Wurzeln haben muß. Multipliciret man demnach das Polynom T, dessen völlig bekanntes Glied der Einheit gleich ist, mit dem Faktor $1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}}$, so erhält man das Polynom $T(1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}})$, welches, Null gleich gesetzt, die sämtlichen Größen t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ zu Wurzeln haben wird. Allein diese Wurzeln gehören auch der Gleichung $\vartheta = 0$ zu, da nun das völlig bekannte Glied, sowohl in dem Polynom $T(1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}})$, als in dem Polynom ϑ, der Einheit gleich ist, so folgt, daß $T(1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}}) = \vartheta$, oder vielmehr

$$1 + (N1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}})t + (N2 - \frac{N1}{t^{(\varrho)}})t^2 + (N3 - \frac{N2}{t^{(\varrho)}})t^3$$
$$+ \text{ꝛc.} = 1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \text{ꝛc.}$$

Da nun diese Gleichung identisch seyn muß, so folgt, daß

$$N1 - \frac{1}{t^{(\varrho)}} = A,\ N2 - \frac{N1}{t^{(\varrho)}} = B,\ N3 - \frac{N2}{t^{(\varrho)}} = C,$$
ꝛc.

daher ist

$$N1 = A + \frac{1}{t^{(\varrho)}}$$

$$N2 = B + \frac{A}{t^{(\varrho)}} + \frac{1}{(t^{(\varrho)})^2}$$

$$N3 = C + \frac{B}{t^{(\varrho)}} + \frac{A}{(t^{(\varrho)})^2} + \frac{1}{(t^{(\varrho)})^3}$$
ꝛc.

Um nun den Werth der Größe $T^{(\varrho)}$ zu finden, bemerke man daß überhaupt

$$T = \frac{\vartheta}{1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}}}$$

in welchem Ausdruck blos $t = t^{(\varrho)}$ zu ſetzen iſt: allein da bey dieſer Vorausſetzung ſowohl der Zähler ϑ verſchwindet, weil $\vartheta^{(\varrho)}$ eine Wurzel der Gleichung $\vartheta = 0$ iſt, als auch der Nenner $1 - \frac{t}{t^{(\varrho)}}$, ſo muß man zu Folge der bekannten Regel, ſtatt dieſer Größe ihre Differenziale nehmen; und ſetzt man t veränderlich, ſo erhält man den Bruch $-\frac{d\vartheta}{dt} : \frac{1}{t^{(\varrho)}}$. Es wird folglich $T^{(\varrho)}$, gleich ſeyn dem Werthe, welchen die Größe $-\frac{t d\vartheta}{dt}$ erhalten muß, wenn man $t^{(\varrho)}$ für t ſetzt, welches man auf folgende Art bezeichnen kann

$$T^{(\varrho)} = \left(\frac{-t d\vartheta}{dt}\right)^{(\varrho)},$$

oder vielmehr, wenn man für ϑ ſeinen Werth ſetzet, und nach der Differenziation t in $t^{(\varrho)}$ verwandelt,

$$T^{(\varrho)} = -At^{(\varrho)} - 2B(t^{(\varrho)})^2 - 3C(t^{(\varrho)})^3 - \text{ꝛc.}$$

Es iſt nun nichts übrig, als dieſen Werth von $T^{(\varrho)}$, ſo wie auch die Werthe von $N1$, $N2$, $N3$, ꝛc., in dem allgemeinen oben gefundenen Ausdruck für $y^{(\varrho)}$ zu ſetzen; und ſo erhält man den Werth der Funktion $y^{(\varrho)}$, ausgedrückt blos durch die entſprechende gegebene Funktion $t^{(\varrho)}$, und durch die Coefficienten m, n, p, ꝛc. der gegebenen Gleichung.

Alle Schwierigkeit liegt demnach in Beſtimmung ſowohl der Coefficienten A, B, C, ꝛc. der Gleichung für t

$$1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \text{etc.} = 0$$

als der Größen M, $M1$, $M2$, $M3$, ꝛc., wozu man, wie wir oben gesehen haben, auf verschiedenen Wegen gelangen kann. Hauptsächlich aber kommt es darauf an, zu bemerken, daß sich alle diese Größen jederzeit algebraisch, blos aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung bestimmen lassen, und dies haben wir, in aller möglichen Schärfe, a priori erwiesen.

Sind nun diese Größen gefunden, und setzt man zur Abkürzung

$$P = M + AM1 + BM2 + CM3 + \text{etc.}$$
$$Q = M1 + AM2 + BM3 + \text{etc.}$$
$$R = M2 + AM3 + \text{etc.}$$
$$\text{etc.}$$

so erhält man für den Werth irgend eines y,

$$y = -\frac{\frac{P}{t} + \frac{Q}{t^2} + \frac{R}{t^3} + \frac{S}{t^4} + \text{etc.}}{A + 2Bt + 3Ct^2 + 4Dt^3 + \text{etc.}}$$

wenn man für t diejenige Funktion setzt, welche der Funktion y entspricht.

101.

Es ist augenscheinlich, daß diese Auflösung jederzeit statt finden wird, was auch für ein Werth von t gegeben seyn mag, wenn er nur nicht den Nenner $A + 2Bt + 3Ct^2 +$ ꝛc. $= \frac{d\vartheta}{dt}$, gleich Null machet; da aber der Werth von t jederzeit eine Wurzel der Gleichung $\vartheta = 0$ seyn muß, so folgt, daß der Fall $\frac{d\vartheta}{dt} = 0$ nur alsdenn eintreten kann, wenn dieser Werth eine vielfache Wurzel eben der Gleichung $\vartheta = 0$ ist.

Um

Um zu finden, was in diesem Falle geschehn wird, so wollen wir annehmen daß t' der gegebene Werth von t sey, welcher dem gesuchten Werthe y' von y, entspricht, und daß sich in der Reihe der Werthe t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$, ein anderer z. B. t'' befinde, welcher $= t'$, so daß der gegebene Werth t', eine doppelte Wurzel der Gleichung $\vartheta = 0$ sey: wir wollen nun anfänglich t' und t'' als ungleich betrachten, so ist

$$y' = -\frac{\frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \text{ꝛc.}}{A + 2Bt' + 3Ct'^2 + 4Dt'^3 + \text{ꝛc.}}$$

$$y'' = -\frac{\frac{P}{t''} + \frac{Q}{t''^2} + \frac{R}{t''^3} + \text{ꝛc.}}{A + 2Bt'' + 3Ct''^2 + 4Dt''^3 + \text{ꝛc.}}$$

Nun ist $1 + At + Bt^2 + Ct^3 + \text{ꝛc.} = \vartheta$

$$= \left(1 - \frac{t}{t'}\right)\left(1 - \frac{t}{t''}\right)\left(1 - \frac{t}{t'''}\right)\ldots$$

Differenziirt man also und setzt successiv $t = t', t''$, so erhält man

$$A + 2Bt' + 3Ct'^2 + \text{ꝛc.} = -\frac{1}{t'}\left(1 - \frac{t}{t'}\right)\left(1 - \frac{t'}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t'}{t''''}\right)\ldots$$

$$A + 2Bt'' + 3Ct''^2 + \text{ꝛc.} = -\frac{1}{t''}\left(1 - \frac{t''}{t'}\right)\left(1 - \frac{t''}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t''}{t''''}\right)\ldots$$

woraus man siehet, daß in dem Falle $t' = t''$ diese beyden Gleichungen $= 0$ werden.

Wir wollen auf einen Augenblick annehmen, daß $t'' = t' + \omega$, wo ω eine unendlich kleine Größe bedeuten soll, so erhält man, wenn man die Unendlichkleinen der zweyten Ordnung wegläßt

$$A + 2Bt' + 3Ct'^2 + \text{ꝛc.} = -\frac{\omega}{t'^2}\left(1 - \frac{t'}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t'}{t''''}\right)\ldots$$

$$A + 2Bt'' + 3Ct''^2 + \text{ꝛc.} = \frac{\omega}{t'^2}\left(1 - \frac{t'}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t'}{t''''}\right)\ldots$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\Pi = \frac{1}{t'^2}\left(1 - \frac{t'}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t'}{t''''}\right) \ldots$$

so wird

$$y' = \frac{\frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \text{etc.}}{\omega\Pi}, \quad y'' = \frac{\frac{P}{t''} + \frac{Q}{t''^2} + \frac{R}{t''^3} + \text{etc.}}{\omega\Pi}$$

Es ist aber

$$\frac{P}{t''} + \frac{Q}{t''^2} + \frac{R}{t''^3} + \text{etc.} = \frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \text{etc.}$$

$$+ \frac{\omega d\left(\frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \text{etc.}\right)}{dt'} = \frac{P}{t'} + \frac{Q}{t'^2} + \frac{R}{t'^3} + \text{etc.}$$

$$- \omega\left(\frac{P}{t'^2} + \frac{2Q}{t'^3} + \frac{3R}{t'^4} + \text{etc.}\right);$$

daher hat man

$$y'' = - y' + \frac{\frac{P}{t'^2} + \frac{2Q}{t'^3} + \frac{3R}{t'^4} + \text{etc.}}{\Pi}$$

und daher

$$y' + y'' = \frac{\frac{P}{t'^2} + \frac{2Q}{t'^3} + \frac{3R}{t'^4} + \text{etc.}}{\Pi}$$

Da aber $\vartheta = \left(1 - \frac{t}{t'}\right)\left(1 - \frac{t}{t''}\right)\left(1 - \frac{t}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t}{t''''}\right)\ldots$

$= \left(1 - \frac{t}{t'}\right)^2\left(1 - \frac{t}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t}{t''''}\right) \ldots$ so ist leicht einzusehen, daß, da $t = t'$,

$$\frac{d^2\vartheta}{2dt^2} = \frac{1}{t'^2}\left(1 - \frac{t'}{t'''}\right)\left(1 - \frac{t'}{t''''}\right) \ldots = \Pi$$

seyn werde: folglich

$\Pi =$

$$n = \frac{2B + 2.3Ct' + 3.4Dt'^2 + \text{ꝛc.}}{2}$$

daher

$$\frac{y' + y''}{2} = \frac{\frac{P}{t'^2} + \frac{2Q}{t'^3} + \frac{3R}{t'^4} + \text{ꝛc.}}{2B + 2.3Ct' + 3.4Dt'^2 + \text{ꝛc.}}$$

Es giebt alſo in dieſem Falle, die Formel nicht jede der Größen y' und y'', welche den gleichen Wurzeln t' und t'' entſprechen, einzeln, ſondern blos ihre Summe $y' + y''$, und man ſiehet, ſowohl aus dem obigen Ausdruck ſelbſt, als aus der Analyſe, durch die wir ihn gefunden haben, daß der Werth von der Hälfte dieſer Summe, aus dem allgemeinen Werthe von y im vorigen Artikel herauskommt, wenn man ſtatt des Zählers und Nenners ihre Differenziale dividiret durch dt, nimmt.

Wenn der gegebene Werth von t eine dreyfache Wurzel der Gleichung $\vartheta = 0$ iſt, ſo daß z. B. $t' = t'' = t'''$, ſo findet man auf eben die Art, daß man nicht jede von den ihnen entſprechenden Funktionen y', y'', y''', einzeln, ſondern blos ihre Summe $y' + y'' + y'''$ finden kann, und der allgemeine Ausdruck für y, giebt den dritten Theil dieſer Summe, wenn man ſtatt des Zählers und Nenners dieſes Ausdrucks, ihre zweyten Differenzialien, dividiret durch dt^2 ſetzt: und ſo nach der Reihe weiter.

102.

Allgemein; wenn es ſich zeigt, daß in dem allgemeinen Ausdruck für y, Nr. 101, durch die Subſtitution des bekannten Werthes von t, der Nenner auf Null gebracht wird, ſo muß man denſelben ſo vielmal hinter einander differenziiren bis man auf einen Ausdruck kommt, der durch eben die Subſtitution

nicht

nicht mehr Null wird, wobey man die ersten Differenziale dt immer als beständige Größen behandeln muß. Hierauf differenziiret man eben so oft auch den Zähler: und der neue Bruch, welchen man auf diese Art erhält, wird die Summe so vieler Partikulärwerthe von y, dividiret durch die Anzahl dieser Werthe, ausdrücken, als die um Eins vermehrte Anzahl der Differenziirungen Einheiten enthält: und diese Werthe werden diejenigen seyn, welche sich auf die gleichen Werthe von t beziehen, deren Anzahl bekanntlich der um Eins vermehrten Anzahl derjenigen Differenzialgleichung für ϑ gleich ist, welche man $= 0$ findet.

Auf diese Art findet man die Summe dieser verschiedenen Werthe von y; allein man kann eben so auch die Summe ihrer Quadrate, ihrer Würfel ꝛc. finden: denn hierzu wird weiter nichts nöthig seyn, als eine neue Rechnung, in welcher man für die Funktion y, ihr Quadrat y^2, dann ihren Würfel y^3 ꝛc. nimmt. Hat man diese, so kann man daraus vermittelst der bekannten Formeln, die Summe der Produkte von je zwey, je drey, ꝛc. Werthen von y ableiten. Auf diese Art findet man alle Coefficienten derjenigen Gleichung, von welcher diese Werthe die Wurzeln sind; diese Gleichung muß man also auflösen, um jeden der gesuchten Werthe einzeln zu erhalten.

Hieraus folget, daß wenn sich unter den Werthen t', t'', t''', ꝛc. der Funktion t, zwey oder mehr gleiche Werthe finden, daß alsdenn diejenigen unter den Werthen y', y'', y''', ꝛc. welche sich auf die gleichen Werthe von t beziehen, nicht mehr blos durch eine rationale Funktion, von t und von den Coefficienten m, n, p, ꝛc. der gegebenen Gleichung, bestimmt werden können; sondern sie hängen von einer Gleichung

chung ab, deren Grad der Anzahl jener gleichen Werthe, gleich iſt, und deren Coefficienten ſämtlich durch t, m, n, p, ꝛc. rational ausgedrückt werden können.

Auch aus andern Gründen läßt ſich einſehen, daß dies ganz natürlich, und den Lehrſätzen der Analyſis gemäß iſt. Denn da man verſchiedene Werthe für y hat, welche von einem einzigen Werthe von t abhängen, ſo iſt klar, daß jeder dieſer Werthe von y auf gleiche Art, von dem ihm entſprechenden Werthe von t abhängen muß, und daß folglich dieſe Werthe blos Wurzeln einer einzigen Gleichung ſeyn können, deren Coefficienten ſich rational durch t ausdrücken laſſen.

Wir wollen z. B. annehmen, daß eine Gleichung von irgend einem Grade μ, gegeben ſey

$$x^{\mu} + m x^{\mu - 1} + n x^{\mu - 2} + p x^{\mu - 3} + \text{ꝛc.} = 0$$

und daß man eine andere von dem niedrigern Grade λ finden wollte,

$$x^{\lambda} + a x^{\lambda - 1} + b x^{\lambda - 2} + c x^{\lambda - 3} + \text{ꝛc.} = 0$$

welche alle Wurzeln mit der erſten gemein haben, d. h. ein Diviſor derſelben ſeyn ſoll: ſo weiß man, daß die Coefficienten a, b, c, ꝛc. ſämtlich gleichartige Funktionen von den Wurzeln der gegebenen Gleichung ſeyn werden, und bey welchen $\frac{\mu(\mu - 1)(\mu - 2) \ldots (\mu - \lambda + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots \lambda}$ Veränderungen ſtatt finden werden, ſo daß nothwendig jeder dieſer Coefficienten, durch m, n, p, ꝛc. vermittelſt einer Gleichung von eben dem Grade (Nr. 89 und 98.) ausgedrückt ſeyn wird. So bald aber der Werth irgend eines dieſer Coefficienten bekannt iſt, ſo kann man zu Folge des oben aufgelöſeten Problems, den Werth jedes andern Coefficienten finden. Es folgt aber aus unſerer Auflöſung, daß wenn der Werth des

als

als bekannt angenommenen Coefficienten eine einfache Wurzel derjenigen Gleichung ist, von welcher die Bestimmung dieses Coefficienten abhängt, sich alle übrigen durch ihn rational werden ausdrücken lassen; ist hingegen der Werth des bekannten Coefficienten, eine doppelte, oder dreyfache ꝛc. Wurzel derselben Gleichung, so kann jeder der übrigen Coefficienten durch diesen, nicht anders als vermittelst einer Gleichung vom zweyten, dritten, ꝛc. Grad bestimmt werden.

Um das a posteriori zu bestätigen, was wir so eben a priori gefunden haben, so sey die Gleichung vom vierten Grade

$$x^4 + mx^3 + nx^2 + px + q = 0$$

gegeben. Wir wollen wie Nr. 35. Abschn. II. annehmen, daß sie durch folgende vom zweyten Grad, $x^2 + fx + g = 0$ theilbar sey. Man kommt hier, wie wir schon gesehen haben, auf zwey Bedingungsgleichungen

$$p - g(m - f) - f(n - g - f(m - f)) = 0$$

$$q - g(n - g - f(m - f)) = 0$$

Aus der ersten erhält man

$$g = \frac{p - nf + mf^2 - f^3}{m - 2f}$$

Da also g rational durch f ausgedrückt wird, so wird es hinreichend seyn f zu suchen, um g ohne alle Wurzelausziehung zu erhalten. Träfe es sich indessen, daß der Werth von $f = \frac{m}{2}$, und zugleich $p = \frac{mn}{2} - \frac{m^3}{8}$ wäre, so würde dieser Werth von f, $g = \frac{0}{0}$ machen. Um daher den Werth von g zu erhalten, muß man noch zu einer andern Gleichung seine Zuflucht nehmen, in welcher g auf den zweyten Grad steigt, nemlich

$g^2 -$

$$g^2 - (n - mf + f^2)g + q = 0$$

so daß, wenn man nun $\frac{m}{2}$ für f setzet

$$g^2 - \left(n - \frac{m^2}{4}\right)g + q = 0$$

wird. g wird also durch die Auflösung dieser Gleichung bestimmt werden müssen. Ich behaupte aber, daß in dem Falle den wir hier betrachten, der Werth $\frac{m}{2}$ von f, eine doppelte Wurzel der Gleichung für f seyn wird.

Um dies zu beweisen bemerken wir, daß diese Gleichung für f, durch die Substitution des Werthes von g aus der ersten Gleichung in die zweyte, entstehen muß: setzt man also zur Abkürzung $p - nf + mf^2 - f^3 = P$, und $m - 2f = Q$, so ist $g = \frac{P}{Q}$, und die Gleichung für f wird folgende

$$P^2 - (n - mf + f^2)PQ + qQ^2 = 0$$

entwickelt man diese Gleichung, so steigt sie auf den sechsten Grad, und ist die nemliche, welche wir Nr. 35. gefunden haben. Es ist aber offenbar, daß, da $p = \frac{mn}{2} - \frac{m^3}{8}$, eine von den Wurzeln dieser Gleichung $= \frac{m}{2}$ seyn wird; denn setzt man $f = \frac{m}{2}$, so wird zugleich $P = 0$, und $Q = 0$; und da diese beyden Bedingungen, nicht allein alle Glieder der obigen Gleichung auf Null bringen, sondern auch ihre Differenzialgleichung

$$2PdP - (2fdf - mdf)PQ - (n - mf + f^2)(PdQ + QdP) + 2qQdQ = 0$$

so

so folgt, daß die Wurzel $f = \frac{m}{2}$ eine doppelte Wurzel eben der Gleichung seyn muß.

103.

Wir haben bis jetzt angenommen, daß die beyden Funktionen t und y gleichartig seyn; wir wollen nunmehr das Problem in seiner ganzen Allgemeinheit untersuchen, und voraussetzen, daß diese Funktionen von irgend einer beliebigen Form seyn.

Wenn man nach und nach in beyden Funktionen, alle mögliche Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. aus welchen sie bestehen, machet, ohne übrigens auf diejenigen Acht zu haben, welche einerley Werthe von t und y öfter geben, so wird man eine gleiche Anzahl π von correspondirenden Werthen für t und y erhalten, welche man, wie Nr. 100, durch t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$, und durch y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$ bezeichnen kann. In dem Fall, wenn t und y gleichartige Funktionen sind, werden die Werthe t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ sämtlich auf eine verschiedene Art ausgedrückt, und Wurzeln der einfachen Gleichung $\vartheta = 0$ seyn, welche zur Bestimmung der Funktion t, durch m, n, p, ꝛc. dienet; und eben diese Bewandniß wird es mit den Werthen y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$ haben: dies hindert indessen nicht, daß nicht einige Werthe von t, oder von y unter einander gleich seyn könnten, wie in dem Fall, welchen wir Nr. 102. untersucht haben; allein es kommt hier blos auf die Form, nicht auf die absolute Größe dieser Werthe an. Sind im Gegentheil die Funktionen t und y nicht gleichartig; so werden sich nothwendig unter den Werthen t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$, oder y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$

einige

einige finden, die nicht verschieden sind, so daß die Anzahl der verschiedenen Werthe von t, oder von y, kleiner seyn wird als π, und aus dem was Nr. 97. erwiesen worden, läßt sich leicht schließen, daß diese Zahl blos ein submultiplum von π seyn wird. Wir haben aber hier zwey Fälle zu betrachten, je nachdem die Anzahl der verschiedenen Werthe der gegebenen Funktion von t, entweder $= \pi$, oder ein submultiplum von π ist.

1) Wir wollen annehmen, daß die Werthe t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ sämtlich verschieden, d. h. auf eine verschiedene Art ausgedrückt sind; so ist offenbar, daß in diesem Falle, die Gleichung $\vartheta = 0$, alle diese verschiedenen Werthe nothwendig zu Wurzeln haben wird, so daß sie wirklich von dem Grade π seyn wird, wie auch übrigens die Werthe der gesuchten Funktion y beschaffen seyn mögen. Es wird sich folglich die Auflösung Nr. 100, völlig auf diesen Fall anwenden lassen.

2) Wir wollen annehmen, daß unter den Werthen t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ sich blos eine Anzahl von ϱ verschiedenen Werthen befinde, und ϱ ein Faktor von π sey, so daß $\pi = \varrho\sigma$. Wenn in diesem Fall $\vartheta = 0$ diejenige Gleichung vorstellt, deren Wurzeln diese verschiedenen Werthe sind, so folget aus dem was Nr. 97. erwiesen worden, daß diejenige Gleichung, welche alle Werthe t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$ zu Wurzeln hat, $\vartheta^{\sigma} = 0$ seyn werde, so daß jede Wurzel dieser Gleichung noch $\sigma - 1$ andere Wurzeln neben sich haben wird, die ihr gleich sind. Man wird also auch auf diesen Fall die allgemeine Auflösung Nr. 100. anwenden können, wenn man nur $\vartheta^{\sigma} = 0$ als die Gleichung für t ansiehet, d. h. wenn man setzet

$$1 + At + Bt^2 + Ct^3 + ꝛc. = 9^{\sigma}$$

Da aber jede Wurzel dieser Gleichung eine von gleichen Wurzeln ist, so wird man die Auflösung nach denen Regeln abändern müssen, welche wir Nr. 102. für den Fall gleicher Wurzeln gegeben haben; und anstatt jeden Werth von y, der jedem Werth von t entspricht, zu finden, wird man blos die Summe von allen y finden, welche gleichen Werthen von t entsprechen: da aber jeder verschiedene Werth von t, in der Reihe t', t'', t''', ꝛc. $t^{(\pi)}$, σmal vorkommt, und da immer jedem in dieser Reihe vorkommenden Werthe, ein Werth in der Reihe y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\pi)}$ entspricht, so daß sich einerley Werthe von t und von y, nicht zweymal in eben den Reihen in correspondirenden Stellen befinden, so folget, daß jedem Werthe von t, σ verschiedene Werthe von y entsprechen werden; und daß man also, wenn ein Werth von t bekannt ist, nichts weiter als die Summe von σ verschiedenen Werthen von y finden kann, welche jenem Werthe entsprechen.

Hieraus, und aus Nr. 103. läßt sich also schließen, daß in diesem Fall jeder Werth von y, durch t nicht anders als vermittelst einer Gleichung von dem Grad σ ausgedrückt werden kann, und diese wird alle die Werthe von y zusammen enthalten, welche einem und eben demselben Werthe von t entsprechen.

Uebrigens kann man die Auflösung des Falles, von welchem wir reden, sehr abkürzen, wenn man ihn auf den Fall gleichartiger Funktionen zurückführt; denn es ist offenbar, daß wenn z. B. dem Werthe t', die Werthe y', y'', y''', ꝛc. y^{σ} entsprechen, jede Funktion von der Form $f:(y', y'', y''', ꝛc.\ y^{\sigma})$ von solcher Beschaffenheit seyn werde, daß sie nur ϵ verschie-

dene

dene Werthe zuläßet, wie die Funktion t', und daß folglich diese beyde Funktionen, gleichartige Funktionen der Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. seyn werden. Nimmt man demnach anstatt der Funktion y irgend eine Funktion von der Form $f:(y', y'', y'''$, ꝛc. $y^{(\sigma)})$ so wird man geradezu den Werth dieser Funktion, durch t ausgedrückt, vermittelst der Nr. 100. vorgetragenen Auflösung finden; und man wird blos die Gleichung $\vartheta = 0$ brauchen, welche nur die ϱ verschiedenen Werthe von t zu Wurzeln hat. Man kann also auf diese Art alle Coefficienten der Gleichung finden, deren Wurzeln die Werthe y', y'', y''', ꝛc. $y^{(\sigma)}$ sind; denn jeder dieser Coefficienten ist nothwendig eine Funktion von der nemlichen Form $f:(y', y'', y'''$ ꝛc. $y^{(\sigma)})$ (Nr. 89.)

104.

Wenn man demnach 1) irgend zwey Funktionen t und y von den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. der Gleichung $x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} +$ ꝛc. $= 0$, hat, und diese Funktionen sind von solcher Beschaffenheit, daß alle Verwechselungen der Wurzeln, welche machen, daß sich die Funktion y verändert, zugleich auch die Funktion t ändern, so kann man, überhaupt genommen, den Werth von y, durch einen rationalen Ausdruck aus t, und aus m, n, p, ꝛc. erhalten, so daß, wenn ein Werth von t bekannt ist, auch der entsprechende Werth von y unmittelbar bekannt seyn wird: ich sage, überhaupt genommen, denn wenn es sich trift, daß der bekannte Werth von t, eine doppelte oder dreyfache ꝛc. Wurzel der Gleichung für t ist, so wird der entsprechende Werth von y, noch von einer quadratischen, cubischen, ꝛc. Gleichung abhängen, deren sämtliche Coefficienten, rationale Funktionen von t, und vom m, n, p, ꝛc. sind.

 2) Wenn

2) Wenn die Funktionen t und y von solcher Beschaffenheit sind, daß bey Verwechselungen der Wurzeln, welche y ändern, t ungeändert bleibt, so wird man den Werth von y aus t, und m, n, p, rc. nicht anders erhalten können, als vermittelst einer Gleichung vom zweyten Grade, wofern einem und demselben Werthe von t, zwey Werthe von y entsprechen; oder durch eine Gleichung vom dritten Grade, wenn einem und demselben Werthe von t drey Werthe von y entsprechen, und so nach der Reihe weiter. Die Coefficienten dieser Gleichung für y, werden, überhaupt genommen, rationale Funktionen von t, und m, n, p, rc. seyn, so daß man, wenn ein Werth von t gegeben ist, y geradezu durch die Auflösung einer Gleichung vom zweyten, dritten, rc. Grade, finden kann: trift es sich aber, daß der bekannte Werth von t eine doppelte, dreyfache, rc. Wurzel der Gleichung für t ist, so werden auch die Coefficienten dieser Gleichung noch von einer Gleichung vom zweyten, dritten rc. Grade abhängen.

Hieraus lassen sich nun die nothwendigen Bedingungen ableiten, unter welchen man im Stande seyn wird, die Werthe der Wurzeln x', x'', x''', rc. selbst, vermittelst der Werthe irgend einer Funktion dieser Wurzeln zu bestimmen: denn hierzu wird blos nöthig seyn, anstatt der Funktion y, geradezu blos die Wurzel x zu nehmen, und die bisher gemachten Schlüsse auf diesen Fall anzuwenden.

105.

Wir kommen also gegenwärtig, auf die Anwendung der bisher vorgetragenen Theorie, auf die allgemeine Auflösung der Gleichungen. Wir wollen mit der Untersuchung desjenigen Falles anfangen, wo man nicht mehr als drey Wurzeln x', x'', x''', hat, d. h. wo die gegebene Gleichung vom dritten Grade ist.

Wenn

Wenn man in diesem Falle, die allgemeine Funktion $f:(x')(x'')(x''')$, betrachtet, so erhellet, daß sie von einer Gleichung vom $(1.2.3)$ten Grade abhängen muß, deren sechs Wurzeln folgende sind

$$f:(x')(x'')(x'''),\quad f:(x'')(x')(x''')$$
$$f:(x''')(x'')(x'),\quad f:(x'')(x''')(x')$$
$$f:(x')(x''')(x''),\quad f:(x''')(x')(x'').$$

Um nun diese Gleichung auf einen niedrigern Grad als die gegebene Gleichung herabsetzen zu können, so ist offenbar kein anderes Mittel vorhanden, als drey und drey von diesen Wurzeln gleich zu machen; in welchem Falle sie sich auf den zweyten Grad reduciren wird. In dieser Absicht nehme man an, daß die gegebene Funktion von solcher Beschaffenheit sey, daß

$$f:(x')(x'')(x''') = f:(x'')(x''')(x'),$$

unabhängig von allem Verhältniß unter den Wurzeln x', x'', x'''; d. h. daß diese Funktion unverändert bleibe, wenn man in derselben x' mit x'', x'' mit x''', und x''' mit x' vertauscht; man erhält also aus dem nemlichen Grunde

$$f:(x'')(x''')(x') = f:(x''')(x')(x'')$$

ferner

$$f:(x''')(x')(x'') = f:(x')(x'')(x''')$$

Man siehet hieraus, daß die drey Funktionen

$$f:(x')(x'')(x'''),\quad f:(x'')(x''')(x'),\quad f:(x''')(x')(x'')$$

nothwendig gleich seyn werden, und daß nur diese dreye von der vorausgesetzten Beschaffenheit seyn können. Folglich werden die drey übrigen Funktionen

$$f:(x'')(x')(x'''),\quad f:(x')(x''')(x''),\quad f:(x''')(x'')(x')$$

ebenfalls gleich seyn; so daß die Gleichung, von der die Rede ist, auf den Grad $\frac{1.2.3}{3} = 2$ herabkommen muß. Nr. 98.

Nimmt man nun, um die Form der gegebenen Gleichung auf eine allgemeine Art zu finden, irgend eine andere Funktion $\phi : (x')(x'')(x''')$ an; bezeichnet man ferner zur Abkürzung, durch y', y'', y''', die drey Funktionen

$$\phi : (x')(x'')(x'''), \quad \phi : (x'')(x''')(x'), \quad \phi : (x''')(x')(x'')$$

welche den ersten drey obigen Funktionen entsprechen; desgleichen durch z', z'', z''', die drey Funktionen

$$\phi : (x'')(x')(x'''), \quad \phi : (x')(x''')(x''), \quad \phi : (x''')(x'')(x')$$

welche den letztern drey gleichen Funktionen entsprechen, so ist klar, daß man jede Funktion von x', x'', x''' durch irgend eine Funktion von y', y'', y''', oder von z', z'', z''', wird ausdrücken können, weil das Zeichen ϕ : irgend eine unbestimmte Funktion bedeutet. Man wird demnach allgemein die Funktion $f : (x')(x'')(x''')$, durch folgende $f : (y')(y'')(y''')$ vorstellen können; aber vermöge der Bedingungen unserer Aufgabe muß diese Funktion unverändert bleiben, wenn man in derselben x' mit x'', x'' mit x''', und x''' mit x' verwechselt; da nun durch diese Verwechselung mit den drey Größen y', y'', y''' nichts weiter vorgehet, als daß sich eine in die andere verwandelt, so folgt, daß die Funktion $f : (y')(y'')(y''')$ von solcher Beschaffenheit seyn muß, daß sie unverändert bleibt, was man auch in derselben für Verwechselungen mit den Größen y', y'', y''', machen mag; sie wird folglich von der Form $f : (y', y'', y''')$ seyn.

Demnach würde jede Funktion von der Form

$$f : (y', y'', y''')$$

die erforderlichen Eigenschaften besitzen, und folglich blos von einer Gleichung vom zweyten Grade abhängen. Es ist in der That nicht schwer, geradezu einzusehen, daß, was man auch für Versetzungen mit den drey Wurzeln x', x'', x''' machen mag, dennoch die drey Größen y', y'', y''' sich nicht anders verwandeln können, als eine in die andere, oder in die drey Größen z', z'', z''': daraus folgt aber, daß die Funktion $f:(y', y'', y''')$ nur entweder ungeändert bleiben, oder in $f:(z', z'', z''')$ übergehen kann; und daß folglich diese beyde Funktionen Wurzeln einer einzigen Gleichung vom zweyten Grade seyn müssen.

Betrachten wir nunmehr diese Funktionen als bekannt, so kommt es noch darauf an vermittelst derselben, die Werthe der einzelnen Größen y', y'', y''', und z', z'', z''' zu bestimmen. Da aber die Funktionen, von welchen die Rede ist, von solcher Beschaffenheit sind, daß sie unverändert bleiben, was man auch für Verwechselungen, sowohl mit den Größen y', y'', y''', als auch mit den Größen z', z'', z''' machen mag, so folgt aus dem was oben erwiesen worden, daß die drey Größen y', y'', y''' Wurzeln einer Gleichung vom dritten Grade, und die Größen z', z'', z''', Wurzeln einer andern Gleichung vom dritten Grade seyn werden. Diese Gleichungen mögen folgende seyn

$$y^3 - ay^2 + by - c = 0$$
$$z^3 - fz^2 + gz - h = 0$$

Da nun die Coefficienten a, b, c Funktionen von der Form $f:(y', y'', y''')$, und die Coefficienten f, g, h ähnliche Funktionen von der Form $f:(z', z'', z''')$ sind, so folgt aus dem obigen, daß die correspondirenden Coefficienten a und f, Wurzeln einer einzigen Gleichung vom zweyten Grade seyn müssen, deren Coefficienten durch m, n, p gegeben sind; eben die Bewandniß wird es mit den Coefficienten b und g, desgleichen c und h haben. Man bemerke hierbey, daß wenn die Werthe von a und f gefunden sind, vermittelst derselben b, g und c, h unmittelbar gefunden werden können, nach der Nr. 100. erklärten Methode.

Da die Gleichungen für y und z vom dritten Grad sind, so muß man sie auf eine solche Form zu bringen suchen, welche eine Auflösung verstattet. Denn theils kann man sie allgemein nicht auflösen, oder vielmehr man muß voraussetzen, daß man die Methode, sie aufzulösen, nicht wisse, weil die Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade gerade der Gegenstand unserer Untersuchung ist; theils läßt sich die Methode von Nr. 99. nicht anwenden, sie auf einen niedrigern Grad zu bringen, weil der Exponent 3 eine Primzahl ist, und keinen Divisor hat.

Da nun die Auflösung der Gleichungen von zwey Gliedern jederzeit möglich ist, so wird es dem Zweck angemessen seyn, sie auf diese Form zu bringen. Wir wollen also annehmen, daß sich die Gleichung für y, in $y^3 - c = 0$ verwandle, oder noch allgemeiner, in $(y + k)^3 - 1 = 0$. Um nun die hierzu nöthigen Bedingungen zu finden, so bemerke man, daß wenn $1, \alpha, \alpha^2$ die Cubikwurzeln der Einheit sind, $y' + k = \sqrt[3]{1}$, $y'' + k = \alpha\sqrt[3]{1}$, $y''' + k = \alpha^2\sqrt[3]{1}$ seyn werde. Hieraus ergiebt sich, (weil $\alpha^3 = 1$),

$$y' + k = \alpha^2(y'' + k) = \alpha(y''' + k)$$

Es wird folglich diejenige Funktion von x', x'', x''', welche wir mit dem Zeichen φ bezeichnet haben, von solcher Beschaffenheit seyn müssen, daß unabhängig von allem Verhältniß zwischen den Wurzeln x', x'', x''', folgende Vergleichung statt finde

$$\begin{aligned}\varphi : (x')(x'')(x''') + k &= \alpha^2(\varphi : (x'')(x''')(x') + k) \\ &= \alpha(\varphi : (x''')(x')(x'') + k)\end{aligned}$$

Ueberdem erhält man, wenn x' mit x'' verwechselt wird

$$\begin{aligned}\varphi : (x'')(x')(x''') + k &= \alpha^2(\varphi : (x')(x''')(x'') + k) \\ &= \alpha(\varphi : (x''')(x'')(x') + k);\end{aligned}$$

d. h.

d. h. $z' + k = \alpha^2(z'' + k) = \alpha(z''' + k)$, wodurch sich die Gleichung für z gleichfalls auf die Form $(z + k)^3 - 1 = 0$ reduciret.

Vergleicht man aber die Gleichung $(z + k)^3 - 1 = 0$ mit der Gleichung $y^3 - ay^2 + by - c = 0$, so erhält man $c = 1 - k^3$; und daher, weil $1 = (y + k)^3 = (y' + k)^3$ (man darf nemlich für y jede der Wurzeln setzen), $c = (y' + k)^3 - k^3$; eben so findet man $h = (z' + k)^3 - k^3$. Die beyden Größen

$$(\varphi:(x')(x'')(x''') + k)^3 - k^3, \text{ und } (\varphi:(x'')(x')(x''') + k)^3 - k^3$$

werden demnach die Wurzeln einer Gleichung vom zweyten Grade seyn, welche man folglich als die allgemeine reducirte Gleichung des dritten Grades ansehen kann.

Durch die Auflösung dieser Gleichung wird der Werth der beyden Funktionen $\varphi:(x')(x'')(x''')$ und $\varphi:(x'')(x')(x''')$ bekannt, und vermittelst der obigen Bedingungsgleichungen lassen sich die Werthe von den vier andern Funktionen, aus diesen ableiten. Sind aber diese Funktionen bekannt, so kann man die Werthe jeder der drey Wurzeln x', x'', x''' daraus ableiten Nr. 104.

106.

Wir haben also die Gründe von der Auflösung der Gleichungen vom dritten Grade auf die directeste und allgemeinste Art entwickelt; und es ist leicht besondere Anwendungen hiervon zu machen, und die verschiedenen im ersten Abschnitte vorgetragenen Theorien daraus abzuleiten.

Die einfachste Form, welche man der Funktion $\varphi:(x')(x'')(x''')$ geben könnte, ist folgende: $Ax' + Bx'' + Cx''' + D$; worin A, B, C, D beständige Größen sind; die Bedingungsgleichung ist demnach

$$\begin{aligned} & Ax' + Bx'' + Cx''' + D + k) \\ = {} & \alpha^2(Ax'' + Bx''' + Cx' + D + k) \\ = {} & \alpha\,(Ax''' + Bx' + Cx'' + D + k); \end{aligned}$$

woraus sich folgende Gleichungen ergeben

$$\begin{aligned} A &= \alpha^2 C = \alpha B \\ B &= \alpha^2 A = \alpha C \\ C &= \alpha^2 B = \alpha A \\ D + k &= \alpha^2(D + k) = \alpha(D + k). \end{aligned}$$

Die zweyte giebt $B = \alpha^2 A$, und $C = \alpha A$, und diese Werthe thun zugleich der ersten und dritten Genüge, da $\alpha^3 = 1$; was die vierte betrift, so giebt sie $D + k = 0$, und folglich $D = - k$; die gegebene Funktion wird demnach folgende Form haben müssen

$$A(x' + \alpha^2 x'' + \alpha x''') - k;$$

setzt man hier $k = 0$, so erhalten wir gerade die, auf welche wir im ersten Abschnitte a posteriori kamen Nr. 5.

107.

Wir kommen nun auf den Fall, wenn man vier Wurzeln hat, welches bey Gleichungen vom vierten Grade statt findet. Betrachtet man die allgemeine Funktion

$$f : (x')(x'')(x''')(x'''')$$

so zeigt sich, daß sie von einer Gleichung vom $1.2.3.4$ten, oder 24sten Grade abhängen wird, deren 24 Wurzeln folgende sind (Nr. 96)

$$\begin{aligned} & f : (x')(x'')(x''')(x''''), && f : (x'')(x')(x''')(x''''), \\ & f : (x''')(x'')(x')(x''''), && f : (x'')(x''')(x')(x''''), \\ & f : (x')(x''')(x'')(x''''), && f : (x''')(x')(x'')(x''''), \\ & f : (x'''')(x'')(x''')(x'), && f : (x'')(x'''')(x''')(x'), \\ & f : (x''')(x'')(x'''')(x'), && f : (x'')(x''')(x'''')(x'), \\ & f : (x'''')(x''')(x'')(x'), && f : (x''')(x'''')(x'')(x'), \\ & f : (x')(x'''')(x''')(x''), && f : (x'''')(x')(x''')(x''), \end{aligned}$$

$f : (x''')$

$f : (x''')(x'''')(x')(x'')$, $f : (x'''')(x''')(x')(x'')$,
$f : (x')(x''')(x'''')(x'')$, $f : (x''')(x')(x'''')(x'')$,
$f : (x')(x'')(x'''')(x''')$, $f : (x'')(x')(x'''')(x''')$,
$f : (x'''')(x'')(x')(x''')$, $f : (x'')(x'''')(x')(x''')$,
$f : (x')(x'''')(x'')(x''')$, $f : (x'''')(x')(x'')(x''')$.

Nun muß man verſuchen dieſe Gleichung auf einen niedrigern als den vierten Grad, d. h. auf den zweyten oder dritten Grad, zu bringen; und es wird am zweckmäßigſten ſeyn den letztern, als den höchſten, den man bey dieſer Unterſuchung nehmen darf, zu wählen. Man muß demnach die Einrichtung der Rechnung ſo machen, daß von dieſen 24 Wurzeln je achte, gleich werden; und hierzu gelangt man, indem man dieſe Wurzeln auf alle mögliche Arten unter einander vergleichet, bis man eine Combination findet, welche gerade acht gleiche Wurzeln giebt; denn alsdenn werden auch unter den übrigen ſechzehn Wurzeln von ſelbſt achte und achte gleich werden. (Nr. 97.)

Wir ſetzen zuerſt

$$f : (x')(x'')(x''')(x'''') = f : (x'')(x')(x''')(x'''');$$

ſo daß die gegebene Funktion, die Form $f : (x', x'')(x''')(x'''')$ habe. Auf dieſe Art werden immer je zwey Wurzeln gleich werden, ſo daß die Gleichung nicht höher als vom 12ten Grad ſeyn wird. (Nr. 98.) Wir ſetzen ferner, daß auch

$$f : (x', x'')(x''')(x'''') = f : (x', x'')(x'''')(x''')$$

d. h. daß die Form der Funktion folgende ſey

$$f : (x', x'')(x''', x''''),$$

wodurch ſich die Gleichung auf den ſechsten Grad reduciren wird. Setzen wir endlich, daß auch

$$f : (x', x'')(x''', x'''') = f : (x''', x'''')(x', x'')$$

d. h. daß die Funktion von ſolcher Beſchaffenheit ſey, daß ſie nicht geändert wird, wenn man auf einmal x' mit x'', und

x'''

x''' mit x'''' verwechselt, so erhält die Funktion die verlangte Beschaffenheit; denn sie wird nicht mehr als folgende drey Veränderungen zulassen

$$f : (x', x'')(x''', x''''),$$
$$f : (x', x''')(x'', x''''),$$
$$f : (x', x'''')(x'', x'''),$$

so daß sie blos von einer Gleichung vom dritten Grade abhängen wird, von welcher diese drey Funktionen die Wurzeln sind.

Um die allgemeine Form der Funktionen, von welchen wir reden, zu finden, nehme ich wie Nr. 105. irgend eine andere Funktion, die ich durch $\varphi : (x')(x'')(x''')(x'''')$ bezeichne; diese reducire ich auf die Form $\varphi : (x', x'')(x''', x'''')$ bey welcher sie ungeändert bleibt, wenn ich entweder x' mit x'', oder x''' mit x'''' verwechsele. Setze ich nun zur Abkürzung

$$y' = \varphi : (x', x'')(x''', x''''),$$
$$y'' = \varphi : (x''', x'''')(x', x''),$$

so ist klar, daß sich jede Funktion von der Form

$$f : (x', x'')(x''', x''''),$$

durch eine Funktion von y' und y'' wird ausdrücken lassen; so daß wir die gesuchte Funktion allgemein durch $f : (y')(y'')$ vorstellen können. Vermöge der Voraussetzung muß aber diese Funktion von solcher Beschaffenheit seyn, daß sie ungeändert bleibt, wenn man in derselben zugleich x' mit x'', und x''' mit x'''' verwechselt; weil nun durch diese Verwechselung, die beyden Größen y' und y'' sich eine in die andere verwandeln, so folgt, daß die Funktion $f : (y')(y'')$ die Form $f : (y', y'')$ haben müsse.

Der allgemeine Ausdruck der gesuchten Funktion, ist also $f : (y', y'')$; und setzt man

$$z' = \varphi : (x', x''')(x'', x''''),$$
$$z'' = \varphi : (x'', x'''')(x', x'''),$$

ferner

$$u' = \varphi : (x', x'''')(x'', x'''),$$
$$u'' = \varphi : (x'', x''')(x', x''''),$$

ſo iſt leicht einzuſehen, daß durch alle mögliche Verwechſelungen unter den vier Wurzeln x', x'', x''', x'''', nicht mehr als folgende drey verſchiedene Funktionen herauskommen

$$f : (y', y''), \quad f : (z', z''), \quad f : (u', u'');$$

ſo daß ſie nothwendig Wurzeln einer einzigen Gleichung vom dritten Grade ſeyn werden.

Man wird demnach durch Auflöſung einer Gleichung vom dritten Grade, den Werth jeder ſolchen Funktion als $f : (y', y'')$ beſtimmen können. Nimmt man nun an, daß die Größen y' und y'' die Wurzeln folgender Gleichung vom zweyten Grade ſeyn

$$y^2 - ay + b = o$$

ſo wird jeder der Coefficienten a und b, durch eine Gleichung vom dritten Grade gegeben, indem er von der Form $f : (y', y'')$ ſeyn wird, ſo daß man auf dieſe Art die beyden Größen y' und y'' erhalten wird. Nimmt man aber an, was jederzeit frey ſtehet, daß die Funktion $\varphi : (x', x'')(x''', x'''')$ blos die beyden Wurzeln x' und x'' enthalte, und daher blos von der Form $f : (x', x'')$ ſey, ſo erhält man $y' = \varphi : (x', x'')$ und $y'' = \varphi : (x''', x'''')$. Sieht man nun x' und x'' als Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - fx + g = o$$

und x''', x'''' als Wurzeln der Gleichung

$$x^2 - hx + l = o$$

an, ſo werden die Coefficienten f, g, h, l von keinen höhern Gleichungen als vom dritten und zweyten Grad abhängen; und

und wenn diese Werthe bekannt sind, so erhält man die vier gesuchten Wurzeln durch Auflösung der obigen beyden Gleichungen vom zweyten Grade.

Dies ist das allgemeine Princip auf welchem die meisten Methoden Gleichungen vom vierten Grad aufzulösen beruhen; wie man dies aus der im zweyten Abschnitte gelieferten Analyse ersehen kann.

Setzt man $\phi : (x', x'') = x' + x''$, und $f : (y', y'') = (y' - y'')^2$ so erhält man die Auflösung Nr. 32. Setzt man aber $\phi : (x', x'') = x'x''$ und $f : (y', y'') = y' + y''$ so erhält man die Auflösung Nr. 31, u. s. f.

108.

Die Auflösung der Gleichungen vom vierten Grade, läßt sich noch auf eine andere Art bewerkstelligen, indem man die Wurzeln auf eine andere Art als Nr. 106. combiniret. Man setze nemlich zuerst

$$f : (x')(x'')(x''')(x'''') = f : (x'')(x''')(x'''')(x')$$

d. h. die Funktion soll ungeändert bleiben, wenn man darin, x' in x'', x'' in x''', x''' in x'''', und x'''' in x', und zwar auf einmal verwandelt. Man findet also weiter

$$f : (x'')(x''')(x'''')(x') = f : (x''')(x'''')(x')(x'')$$

ferner

$$f : (x''')(x'''')(x')(x'') = f : (x'''')(x')(x'')(x''')$$

endlich

$$f : (x'''')(x')(x'')(x''') = f : (x')(x'')(x''')(x'''');$$

so daß die Funktionen

$$f : (x')(x'')(x''')(x''''), \quad f : (x'')(x''')(x'''')(x'),$$
$$f : (x''')(x'''')(x')(x''), \quad f : (x'''')(x')(x'')(x'''),$$

und nicht mehrere, gleich seyn werden. Da also unter den Funktionen, von welchen die Rede ist, immer je viere gleich sind,

ſind, ſo gelangen wir zuerſt zu einer Gleichung vom ſechsten Grade.

Setzt man aber ferner

$$f : (x')(x'')(x''')(x'''') \quad = \quad f : (x'''')(x''')(x'')(x')$$

d. h. die Funktion, ſoll auch ungeändert bleiben, wenn man zu gleicher Zeit x' in x'''', und x'' in x''', und umgekehrt, verwandelt, ſo erhalten wir noch vier Funktionen, welche den obigen gleich ſind, nemlich

$$f : (x'''')(x''')(x'')(x'), \quad f : (x''')(x'')(x')(x''''),$$
$$f : (x'')(x')(x'''')(x'''), \quad f : (x')(x'''')(x''')(x''),$$

wodurch unter den 24 Funktionen Nr. 106. immer je achte gleich werden; daher ſie nur von einer Gleichung vom dritten Grad abhängen werden.

Nimmt man aber irgend eine andere Funktion der Wurzeln x', x'', x''', x'''', welche wir mit dem Zeichen φ: bezeichnen wollen; und bezeichnet man ferner durch y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, y^{VII}, y^{VIII}, folgende acht Funktionen:

$$\varphi : (x')(x'')(x''')(x''''), \quad \varphi : (x'')(x''')(x'''')(x'),$$
$$\varphi : (x''')(x'''')(x')(x''), \quad \varphi : (x'''')(x')(x'')(x'''),$$
$$\varphi : (x'''')(x''')(x'')(x'), \quad \varphi : (x''')(x'')(x')(x''''),$$
$$\varphi : (x'')(x')(x'''')(x'''), \quad \varphi : (x')(x'''')(x''')(x''),$$

welche, wie man ſiehet, den obigen acht gleichen Funktionen entſprechen: ſo kann man jede Funktion, welche unverändert bleiben ſoll, ſowohl wenn x' in x'', x'' in x''', x''' in x'''', x'''' in x' verwandelt, als wenn x' mit x'''', x'' mit x''' verwechſelt wird, auf folgende Art vorſtellen

$$f : (y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, y^{VII}, y^{VIII});$$

denn es iſt leicht einzuſehen, daß bey allen dieſen Verwechſelungen, die Größen y', y'', y''', ꝛc. ſich blos eine in die andere verwandeln.

Dieſe

Diese Funktion wird also so beschaffen seyn, daß sie auf keine höhere Gleichung als vom dritten Grade führen kann; Bezeichnet man nun ferner, durch z', z'', z''', z^{IV}, z^{V}, z^{VI}, z^{VII}, z^{VIII}, folgende acht Funktionen,

$$\varphi : (x'')(x')(x''')(x''''), \quad \varphi : (x''')(x'')(x'''')(x'),$$
$$\varphi : (x'''')(x''')(x')(x''), \quad \varphi : (x')(x'''')(x'')(x'''),$$
$$\varphi : (x''')(x'''')(x'')(x'), \quad \varphi : (x'''')(x')(x''')(x''),$$
$$\varphi : (x')(x'')(x'''')(x'''), \quad \varphi : (x'')(x''')(x')(x''''),$$

und durch u', u'', u''', u^{IV}, u^{V}, u^{VI}, u^{VII}, u^{VIII}, folgende acht Funktionen

$$\varphi : (x''')(x')(x'''')(x''), \quad \varphi : (x'''')(x'')(x')(x'''),$$
$$\varphi : (x')(x''')(x'')(x''''), \quad \varphi : (x'')(x'''')(x''')(x'),$$
$$\varphi : (x'')(x'''')(x')(x'''), \quad \varphi : (x')(x''')(x'''')(x''),$$
$$\varphi : (x'''')(x''')(x'')(x'), \quad \varphi : (x''')(x')(x'')(x''''),$$

so bemerket man leicht, daß aus allen möglichen Verwechselungen der Wurzeln x', x'', x''', x'''', doch nicht mehr als folgende drey verschiedene Funktionen entspringen können

$$f : (y', y'', y''', y^{IV}, y^{V}, y^{VI}, y^{VII}, y^{VIII})$$
$$f : (z', z'', z''', z^{IV}, z^{V}, z^{VI}, z^{VII}, z^{VIII})$$
$$f : (u', u'', u''', u^{IV}, u^{V}, u^{VI}, u^{VII}, u^{VIII})$$

welche folglich Wurzeln einer Gleichung vom dritten Grad seyn werden.

Setzt man demnach die allgemeine Auflösung dieses Grades voraus, so wird man alle Funktionen, welche die Form der obigen haben, bestimmen können. Allein da die Größen y', y'', ꝛc. z', z'', ꝛc. u', u'', ꝛc. auf ganz gleiche Art in diesen Funktionen enthalten sind, so ist klar, daß die Bestimmung derselben, noch von drey Gleichungen, jede vom achten Grad, abhängen werde.

Man wird also von neuen diese Gleichungen unter den vierten Grad zu bringen suchen müssen. Diese Absicht erreicht

reicht man durch die Voraussetzung, daß die mit φ : bezeichnete Funktion von solcher Beschaffenheit sey, daß sie unverändert bleibe, wenn man x' in x'', x'' in x''', x''' in x'''' und x'''' in x' verwandelt; denn auf diese Art werden die vier Größen y', y'', y''', y'''', und dann auch die übrigen vier y^{v}, y^{vi}, y^{vii}, y^{viii}, gleich werden. Eben so wird es mit den entsprechenden Größen z', z'', ꝛc., u', u'', ꝛc. beschaffen seyn.

Auf diese Art lassen sich die obigen drey Funktionen, ganz einfach durch folgende Formeln ausdrücken

$$f : (y', y^{v}), \quad f : (z', z^{v}), \quad f : (u', u^{v}),$$

und die Größen y', y^{v}, z', z^{v}, u', u^{v} werden die Wurzeln von drey quadratischen Gleichungen seyn, welche folgende seyn mögen

$$y^2 - ay + b = 0$$
$$z^2 - cz + d = 0$$
$$u^2 - fu + g = 0$$

Die Coefficienten a, c, f, werden Wurzeln einer Gleichung vom dritten Grade seyn. Eben so auch die übrigen Coefficienten b, d, g.

Es ist nichts übrig, als die Form zu finden, welche die Funktion φ haben muß, wenn die vorgeschriebenen Bedingungen erfüllt werden sollen. Um hierzu auf die möglichst allgemeine Art zu gelangen, nehme man irgend eine andere Funktion von x', x'', x''', x'''' an, welche wir durch Φ: bezeichnen wollen. Man formire, wie oben die 24 Funktionen welche den 24 möglichen Versetzungen der Wurzeln x', x'', x''', x'''' entsprechen; diese Funktionen bezeichne man durch Y', Y'', ꝛc. Y^{viii}, Z', Z'', ꝛc. Z^{viii}, V', V'', ꝛc. V^{viii}; d. h. man verwandle in den obigen Formeln das Zeichen φ in Φ, und die kleinen Buchstaben, y, z, u, in die großen Y, Z, V.

Braucht man nun das Zeichen φ: von neuen, um irgend eine Funktion damit zu bezeichnen, so ist leicht einzusehen, daß man allgemein haben werde

$$y' = \varphi:(Y', Y'', Y''', Y^{IV}), \quad y^{V} = \varphi:(Y^{V}, Y^{VI}, Y^{VII}, Y^{VIII})$$
$$z' = \varphi:(Z', Z'', Z''', Z^{IV}), \quad y^{V} = \varphi:(Z^{V}, Z^{VI}, Z^{VII}, Z^{VIII})$$
$$u' = \varphi:(V', V'', V''', V^{IV}), \quad y^{V} = \varphi:(V^{V}, V^{VI}, V^{VII}, V^{VIII})$$

Hieraus läßt sich nun leicht der Schluß machen, daß die Bestimmung der Funktionen Y', Y'', Y''', Y'''', von einer Gleichung vom vierten Grade abhängen wird; eben so auch die Bestimmung der Funktionen Y^{V}, $Y^{V'}$, $Y^{V''}$, $Y^{V'''}$. Die nemliche Bewandniß, wird es mit den Funktionen Z', Z'', rc. $Z^{V'''}$, V', V'', rc. $V^{V'''}$ haben, von denen immer je viere durch eine Gleichung vom vierten Grade bestimmt seyn werden.

Es sey also

$$Y^4 - AY^3 + BY^2 - CY + D = 0$$

die Gleichung, deren Wurzeln Y', Y'', Y''', Y^{IV} sind; so ist klar, daß man dieselbe auf zweyerley Art wird auflösen können.

1) Wenn man die ungeraden Potenzen verschwinden läßt, um sie auf die Form

$$Y^4 + BY^2 + D = 0$$

zu bringen, welche sich nach Art der Gleichungen vom zweyten Grad auflösen läßt; hierzu ist aber erforderlich, daß von den vier Wurzeln Y', Y'', Y''', Y^{IV}, zwey und zwey gleich seyn, aber mit entgegengesetzten Zeichen; d. h. es muß seyn $Y' = -Y''$ und $Y''' = -Y^{IV}$. In diesem Falle muß also die Funktion Φ von solcher Beschaffenheit seyn, daß

$$\Phi : (x')(x'')(x''')(x'''') = -\Phi : (x'')(x''')(x'''')(x')$$

und

$$\Phi : (x''')(x'''')(x')(x'') = -\Phi : (x'''')(x')(x'')(x''')$$

d. h.

d. h. sie muß so beschaffen seyn, daß sie negativ wird, wenn man x' in x'', x'' in x''', x''' in x'''' und x'''' in x' verwandelt; und in diesem Falle, hat man auch

$$\Phi : (x'')(x''')(x'''')(x') = -\Phi : (x''')(x'''')(x')(x'')$$

woraus erhellet, daß zu gleicher Zeit $Y' = -Y''$, $Y'' = -Y'''$, $Y''' = -Y''''$ seyn werde, d. h. $Y' = Y''' = -Y'' = -Y''''$. Hierdurch kommt die Gleichung für Y auf die Form

$$(Y^2 - E)^2 = 0, \text{ d. h. } Y^2 - E = 0.$$

Es ist leicht einzusehen, daß die übrigen Gleichungen, deren Wurzeln die Größen Y^v, $Y^{v'}$, $Y^{v''}$, $Y^{v'''}$, oder Z', Z'', Z''', Z'''', oder ꝛc. sind, zugleich auf die nemliche Form kommen werden; denn diese Wurzeln haben unter einander eben die gegenseitige Beziehung, als die Wurzeln Y', Y'', Y''', Y'''', welche darin bestehet, daß eine aus der andern entstehet, wenn man darin, x' in x'', x'' in x''', x''' in x'''' und x'''' in x' verwandelt.

Die Funktionen $x' + x'' - x''' - x''''$, $x'x''' - x''x''''$ und andere gleichartige, werden die bisher entwickelten Bedingungen erfüllen.

2) Man kann die allgemeine Gleichung $Y^4 - AY^3 + BY^2 - CY + D = 0$, auch dadurch auflösbar machen, daß man sie auf zwey Glieder $Y^4 + D = 0$ reduciret. In diesem Fall lassen sich die vier Wurzeln Y', Y'', Y''', Y'''' auf folgende Art ausdrücken:

$$\sqrt[4]{-D},\ \alpha^3\sqrt[4]{-D},\ \alpha^2\sqrt[4]{-D},\ \alpha\sqrt[4]{-D},$$

wenn $1, \alpha, \alpha^2, \alpha^3$, die vier vierten Wurzeln der Einheit anzeigen. In diesem Falle wird also, da $\alpha^4 = 1$, die Bedingung statt finden

$$Y' = \alpha Y'' = \alpha^2 Y''' = \alpha^3 Y'''';$$

d. h. die Funktion Φ muß von solcher Beschaffenheit seyn, daß

$$
\begin{aligned}
& \Phi : (x')(x'')(x''')(x'''') \\
= \alpha\ & \Phi : (x'')(x''')(x'''')(x') \\
= \alpha^2 & \Phi : (x''')(x'''')(x')(x'') \\
= \alpha^3 & \Phi : (x'''')(x')(x'')(x''').
\end{aligned}
$$

Alsdenn aber werden alle Gleichungen vom vierten Grade, von welchen die übrigen Größen Y^v, $Y^{v\prime}$, $Y^{v\prime\prime}$, $Y^{v\prime\prime\prime}$, ferner Z', Z'', ꝛc. abhängen, vermöge des oben angegebenen Grundes, auf die nemliche Beschaffenheit reduciret seyn.

Es ist nicht schwer zu finden, daß die Funktion

$$x' + \alpha x'' + \alpha^2 x''' + \alpha^3 x''''$$

die erforderte Beschaffenheit haben werde; und hieraus ergiebt sich der Schluß, daß die obige Analyse, den Grund der Nr. 47. vorgetragenen Methode enthalte.

109.

Dies sind, wenn ich nicht irre, die wahren Gründe von der Auflösung der Gleichungen, und der eigentliche Weg, welcher uns dahin führen kann. Alles reduciret sich, wie man siehet, auf eine Art von Combinationsrechnung, durch welche man die Resultate, auf welche man seine Aufmerksamkeit zu richten hat, a priori findet. Es würde der Mühe werth seyn, hiervon eine Anwendung, auf die Gleichungen vom fünften, und von den höhern Graden zu machen, deren Auflösung bis jetzt unbekannt ist. Allein diese Anwendung erfordert eine zu große Menge von Untersuchungen und Combinationen, deren Erfolg doch immer noch sehr zweifelhaft bleibt, als daß ich mich gegenwärtig dieser Arbeit unterziehen könnte. Doch hoffe ich zu anderer Zeit die Sache wieder vornehmen zu können. Vor jetzt aber begnüge ich mich

den

den Grund einer Theorie gelegt zu haben, welche mir neu und allgemein ſcheint.

110.

Ehe wir dieſen Abſchnitt ſchließen, halte ich es für nützlich, noch mit wenig Worten von der Reduction der Gleichungen auf einen niedrigern Grad zu reden, welche alsdenn ſtatt findet, wenn unter einigen Wurzeln der vorgelegten Gleichung, ein gewiſſes gegebenes Verhältniß findet. Denn wenn alle Wurzeln einer Gleichung gegenſeitig gleiche Beziehungen auf einander haben, ſo iſt die Gleichung weſentlich, und nothwendig von einem Grade, welcher der Anzahl der Wurzeln gleich iſt, und allgemein genommen wird es unmöglich ſeyn, dieſelbe auf einen niedrigern Grad zu bringen. Dies iſt der Grund, warum z. B. das Problem von der Triſection eines Winkels, allgemein genommen, nothwendig vom dritten Grade ſeyn muß, indem demſelben auf drey verſchiedene Arten ein Genüge geſchehen kann, welche ſämtlich auf eine einzige Gleichung führen, in welcher die drey Auflöſungen ganz auf gleiche Art enthalten ſind. Indeſſen giebt es bekanntlich beſondere Fälle, in welchen man das Problem auf den zweyten Grad bringen kann, weil alsdenn unter zwey Wurzeln der Gleichung ein beſonderes Verhältniß ſtatt findet.

Mit allen andern Aufgaben und Gleichungen hat es eben dieſelbe Bewandniß. Wenn gewiſſe beſondere Verhältniſſe zwiſchen einigen Wurzeln irgend einer Gleichung ſtatt finden, ſo iſt man verſichert, daß ſie ſich auf einen niedrigern Grad bringen läßt; und kennt man dies Verhältniß a priori, entweder aus der Form der Gleichung ſelbſt, oder aus der Natur der Aufgabe, ſo wird man jederzeit die Reduction, deren die Gleichung fähig iſt, finden können.

Hudde ist meines Wissens der erste der diese Materie in seinem Briefe über die Reduction der Gleichungen, welcher der Geometrie des Des Cartes angehängt ist, abgehandelt hat. Er zeigt, wie eine Gleichung auf einen niedrigern Grad gebracht werden könne, wenn unter einigen Wurzeln derselben, ein solches Verhältniß statt findet, daß ihre Summe, oder die Summe der Produkte von je zweyen, oder die Produkte von je dreyen, Null, oder einer gegebenen Größe gleich ist; wie auch wenn sie gleiche Wurzeln, oder irgend sonst commensurable Divisoren enthält. Andere Geometer haben die Arbeit auf eben diese Art weiter fortgesetzt, und Huddens Regeln und Methoden vervollkommnet und erweitert. (Man sehe hierüber Warings schon oben angeführtes vortrefliches Werk.) Man kann aber durch Hülfe der Nr. 100. erwiesenen Sätze, bey dieser Untersuchung einen viel allgemeinern Gesichtspunkt fassen.

III.

Wenn man annimmt, daß in der Gleichung vom μten Grade

$$x^{\mu} + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + px^{\mu-3} + \text{2c.} = 0$$

deren Wurzeln x', x'', x''', 2c. $x^{(\mu)}$ sind, unter einigen Wurzeln ein gewisses bekanntes Verhältniß statt finde, z. B. unter den Wurzeln x', x'', x''', 2c. $x^{(\lambda)}$, (vorausgesetzt daß $\lambda < \mu$); so fällt sogleich in die Augen, daß sich dies Verhältniß jederzeit durch eine Gleichung werde ausdrücken lassen, wovon das erste Glied eine algebraische Funktion von x', x'', x''', 2c. $x^{(\lambda)}$ seyn wird, und daß man auf diese Art den Werth einer Funktion von folgender Form $f:(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)})$, werde kennen lernen.

Wenn aber 1) dieſe Gleichung von ſolcher Beſchaffenheit iſt, daß ſie blos zwiſchen den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\lambda)}$ ſtatt findet, und zwar nur auf eine einzige Art, ſo daß ſie aufhöret wahr zu ſeyn, ſo bald man irgend eine Verwechſelung mit den Wurzeln machet, ſo wird man, allgemein genommen, den Werth jeder dieſer Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\lambda)}$ einzeln, ohne Auflöſung irgend einer Gleichung beſtimmen können; ſo daß in dieſem Falle, alle Wurzeln nothwendig commenſurabel ſeyn werden (Nr. 104.).

2) Wenn diejenige Gleichung, welche das gegebene Verhältniß unter den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\lambda)}$ ausdrückt, blos in Abſicht dieſer Wurzeln ſtatt findet, doch ſo, daß ſie auch alsdenn noch wahr bleibt, wenn man z. B. x' mit x'' verwechſelt; ſo erſieht man aus der angeführten Nr., daß alsdenn nothwendig die beyden Wurzeln x', x'', von einer Gleichung vom zweyten Grad

$$x^2 - ax + b = 0$$

abhängen werden, in welcher die Coefficienten a, b commenſurabel ſind.

3) Wenn eben dieſe Gleichung ſo beſchaffen iſt, daß ſie wahr bleibt, wenn man in derſelben x' in x'' und in x''' verwandelt, ſo werden die drey Wurzeln x', x'', x''' von einer Gleichung vom dritten Grad

$$x^3 - ax^2 + bx - c = 0$$

abhängen, in welcher die Coefficienten a, b, c commenſurabel ſeyn werden u. ſ. f.

4) Wenn die Gleichung wie in dem erſten Fall, in Abſicht der Wurzeln x', x'', x''' ꝛc. $x^{(\lambda)}$ nur auf eine einzige Art ſtatt findet, zu gleicher Zeit aber auch in Abſicht der Wurzeln $x^{(\lambda+1)}, x^{(\lambda+2)}, x^{(\lambda+3)}$, ꝛc. $x^{(2\lambda)}$ wahr iſt;

so werden, da die Funktion $f:(x')(x'')(x''')\ldots(x^{(\lambda)})$ unverändert bleibt, wenn man x' in $x^{(\lambda+1)}$, x'' in $x^{(\lambda+2)}$ rc. verwandelt, es werden alsdenn, sage ich, die Wurzeln x', $x^{(\lambda+1)}$ von einer Gleichung vom zweyten Grade

$$x^2 - \alpha x + \beta = 0$$

abhängen, in welcher α und β commensurabel sind. Eben dies wird in Absicht der Wurzeln x'', $x^{(\lambda+2)}$, desgleichen x''', $x^{(\lambda+3)}$ u. s. f. statt finden.

Eben so, wenn die Gleichung, auf gleiche Art in Absicht der Wurzeln x', x'', x''' rc. $x^{(\lambda)}$, in Absicht der Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(\lambda+3)}$, rc. $x^{(2\lambda)}$, und in Absicht der Wurzeln $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, $x^{(2\lambda+3)}$, rc. $x^{(3\lambda)}$ wahr bleibt, so werden die Wurzeln x', $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+1)}$ von einer Gleichung vom dritten Grad

$$x^3 - \alpha x^2 + \beta x - \gamma = 0$$

abhängen, in welcher α, β, γ commensurabel sind; eben dies wird in Absicht der Wurzeln x'', $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, desgleichen x''', $x^{(\lambda+3)}$, $x^{(2\lambda+3)}$, u. s. f. statt finden.

5) Wenn aber die Gleichung, wie im zweyten Falle, unter den Wurzeln x', x'', x''', rc. $x^{(\lambda)}$ auf zweyerley Art statt findet, zugleich aber auch in Ansehung der Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(\lambda+3)}$, rc. $x^{(2\lambda)}$ statt findet; so hat man wie oben für die Wurzeln x', x'' eine Gleichung vom zweyten Grad

$$x^2 - a'x + b'' = 0$$

desgleichen für die Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$ auch eine Gleichung vom zweyten Grad

$$x^2 - a''x + b'' = 0$$

in

in welchem die übereinstimmenden Coefficienten a', a'' Wurzeln einer andern Gleichung vom zweyten Grad

$$a^2 - \alpha a + \beta = 0$$

seyn werden, in der α und β commensurabel sind. Eben dies ist von den Coefficienten b' und b'' zu sagen.

Und wenn dieselbe Gleichung auch in Ansehung der Wurzeln $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, $x^{(2\lambda+3)}$, ꝛc. $x^{(3\lambda)}$ statt findet; so hat man für die Wurzeln x', x'', die Gleichung

$$x^2 - a'x + b' = 0,$$

für die Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, die Gleichung

$$x^2 - a''x + b'' = 0,$$

und für die Wurzeln $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, die Gleichung

$$x^2 - a'''x + b''' = 0.$$

Die Coefficienten a', a'', a''' aber sind Wurzeln der Gleichung

$$a^3 - \alpha a^2 + \beta a - \gamma = 0$$

in welcher α, β, γ commensurabel sind. Eben diese Bewandniß hat es mit den Coefficienten b', b'', b''', u. s. w.

6) Eben dergleichen Schlüsse lassen sich auch bey dem dritten Fall machen, wo wir annahmen, daß eben die Gleichung unter den Wurzeln x', x'', x''', ꝛc. $x^{(\lambda)}$ statt habe, wenn man darin x' in x'', und in x''' verwandelt; denn wenn eben diese Gleichung auch unter den Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(\lambda+3)}$, ꝛc. $x^{(2\lambda)}$ statt findet, so werden die Wurzeln x', x'', x''', von der Gleichung

$$x^3 - a'x^2 + b'x - c' = 0,$$

abhängen, und die Wurzeln $x^{(\lambda+1)}$, $x^{(\lambda+2)}$, $x^{(\lambda+3)}$ von einer ähnlichen Gleichung

$$x^3 - a''x^2 + b''x - c'' = 0.$$

In diesen Gleichungen werden die Coefficienten a', a'' durch eine Gleichung vom zweyten Grad gegeben

$$a^2 - a\alpha + \beta = 0$$

und α und β sind rational. Eben dergleichen ist von den Coefficienten b', b'', und c', c'' zu bemerken.

Wenn aber die Gleichung auch unter den Wurzeln $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, $x^{(2\lambda+3)}$, *rc.* $x^{(3\lambda)}$, so wird man aus eben den Gründen für die drey Wurzeln $x^{(2\lambda+1)}$, $x^{(2\lambda+2)}$, $x^{(2\lambda+3)}$ die Gleichung

$$x^3 - a'''x^2 + b'''x - c''' = 0$$

haben, und die Coefficienten a', a'', a''' werden in diesem Falle, Wurzeln einer cubischen Gleichung

$$a^3 - \alpha a^2 + \beta a - \gamma = 0$$

seyn, in welcher α, β, γ rational sind. Eben das ist in Ansehung der Coefficienten b', b'', b''' und c', c'', c''' zu bemerken.

Man übersiehet hieraus leicht, wie man ähnliche Schlüsse, für die übrigen Fälle machen kann: nur erinnere man sich, daß diese Schlüsse einige Ausnahmen leiden werden, in dem besondern Fall, wenn gleiche Wurzeln vorhanden sind, (Nr. 104.)

112.

Um das, was wir hier vorgetragen haben, durch einige Beyspiele zu erläutern, wollen wir zuerst diejenigen Gleichungen betrachten, welche man reciproke nennt, und welche von solcher Form sind, daß die Coefficienten solcher Glieder, die von den äußersten gleich weit abstehen, gleich sind. Man kann sie also auf folgende Art vorstellen

$$x^\mu + mx^{\mu-1} + nx^{\mu-2} + \text{rc.} + nx^2 + mx + 1 = 0.$$

Vermöge der Form dieser Gleichungen ist es augenscheinlich, daß sie unverändert bleiben, wenn man $\frac{1}{x}$ statt x setzt. Und

hieraus

hieraus folgt, daß wenn x' eine Wurzel der Gleichung ist, auch $\frac{1}{x'}$ eine Wurzel seyn werde; so daß $x'x'' = 1$, oder $x'x'' - 1 = 0$ seyn wird. Aus eben dem Grunde wird auch $x'''x'''' - 1 = 0$, $x^{V}x^{VI} - 1 = 0$, ꝛc. seyn.

Wir haben also in diesem Falle, eine Gleichung zwischen den Wurzeln x', x'', welche auch alsdenn noch statt findet, wenn x' und x'' verwechselt werden; eben diese Gleichung findet aber auch zwischen den Wurzeln x''', x'''', desgleichen x^{V}, x^{VI} u. s. f. statt. Demnach werden immer je zwey von diesen Wurzeln, in folgenden Gleichungen, deren Anzahl $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu - 1}{2}$ ist, enthalten seyn

$$x^2 - a'x + 1 = 0$$
$$x^2 - a''x + 1 = 0$$
$$x^2 - a'''x + 1 = 0$$
ꝛc.

und die Coefficienten a', a'', a''', ꝛc. werden Wurzeln einer einzigen Gleichung von dem Grade $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu - 1}{2}$, seyn, je nachdem μ gerade oder ungerade ist, wie wir schon durch eine besondere Methode Nr. 22. gezeigt haben. Man sehe über diese Materie außer Moivre's Myscellanea analytica, noch die Commentarien des Bononischen Instituts Th. 1. und die alten Petersburger Commentarien Th. IV.

Uebrigens ergiebt sich aus den oben entwickelten Sätzen der Grund, warum die a. a. O. gebrauchte Substitution $y = x + \frac{1}{x}$, auf eine reducirte Gleichung vom Grade $\frac{\mu}{2}$ führen muß, wenn μ gerade ist. Denn es ist offenbar, daß die Werthe von y, d. h. die Wurzeln der Gleichung für y

folgende

folgende seyn werden: $x' + \frac{1}{x'}$, $x'' + \frac{1}{x''}$, $x''' + \frac{1}{x'''}$, $x^{iv} + \frac{1}{x^{v}}$, ꝛc. Da aber $x'' = \frac{1}{x'}$, $x^{iv} = \frac{1}{x'''}$ ꝛc. so werden eben diese Wurzeln sich so ausdrücken lassen;

$$x' + \frac{1}{x'},\ \frac{1}{x'} + x',\ x''' + \frac{1}{x'''},\ \frac{1}{x'''} + x''' \text{ ꝛc.}$$

es sind folglich immer zweye derselben einander gleich; so daß die Gleichung für y, welche an und für sich vom Grade μ seyn sollte, auf den Grad $\frac{\mu}{2}$ herabgesetzt wird.

Man kann die Gleichung noch durch eine andere Substitution auf einen niedrigern Grad bringen; indem man alle ungerade Potenzen der unbekannten Größe auf Null bringen kann. Man setze $x = \frac{1 - y}{1 + y}$, so wird $y = \frac{1 - x}{1 + x}$ alsdenn werden die Wurzeln der umgeformten Gleichung für y, folgende seyn

$$\frac{1 - x'}{1 + x'},\ \frac{1 - x''}{1 + x''},\ \frac{1 - x'''}{1 + x'''},\ \frac{1 - x^{iv}}{1 + x^{iv}} \text{ ꝛc.}$$

d. h. (weil $x'' = \frac{1}{x'}$, $x^{iv} = \frac{1}{x'''}$ ꝛc.) $\frac{1 - x'}{1 + x'}$, $\frac{x' - 1}{x' + 1}$, $\frac{1 - x'''}{1 + x'''}$, $\frac{x''' - 1}{x''' + 1}$ ꝛc. Von diesen Wurzeln sind also immer zweye einander gleich, aber mit entgegengesetzten Zeichen.

113.

In dem oben betrachteten Beyspiel, ergab sich das Verhältniß unter den Wurzeln, wodurch die Gleichung einer Reduction empfänglich ist, aus der Form der Gleichung selbst: man kann aber die Kenntniß dieses Verhältnisses, auch aus der

der Natur des aufzulösenden Problems erhalten; und es wird nützlich seyn, einige Beyspiele dieser Art anzuführen.

Man soll vier stetig proportionirte Größen finden, deren Summe, wie auch die Summe ihrer Quadrate, gegeben ist.

Wenn man diese unbekannten Größen x, y, z, u nennt, so hat man vermöge der Bedingungen der Aufgabe, folgende vier Gleichungen:

$$xz = y^2, \qquad yu = z^2$$
$$x + y + z + u = a, \quad x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = b^2$$

in welchem a und b bekannte Größen sind.

Um die drey unbekannten Größen y, z, u auf eine leichte Art zu eliminiren, und eine Endgleichung für x zu erhalten, setze ich $y = rx$, und so erhalte ich durch die beyden ersten Gleichungen $z = r^2x$, $u = r^3x$; substituiret man diese Werthe in den beyden letztern Gleichungen, so erhält man

$$x(1 + r + r^2 + r^3) = a$$
$$x^2(1 + r^2 + r^4 + r^6) = b^2,$$

aus welchen blos noch r zu eliminiren ist.

Um diese Elimination zu erleichtern multiplicire ich die erste durch $1 - r$, und die zweyte durch $1 - r^2$; so erhalte ich

$$x(1 - r^4) = a(1 - r), \quad x^2(1 - r^8) = b^2(1 - r^2)$$

diese letzte Gleichung dividire ich durch die erste, so erhalte ich $x(1 + r^4) = \frac{b^2(1 + r)}{a}$, so daß wir nun folgende beyde haben:

$$x(1 - r^4) = a(1 - r), \quad x(1 + r^4) = \frac{b^2}{a}(1 + r);$$

hieraus findet man ohne Schwierigkeit

$$r = \frac{a^2 + b^2 - 2ax}{a^2 - b^2}$$
$$r^4 = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x}{(a^2 - b^2)x}.$$

Sub=

Substituiret man nun den Werth von r, welchen die erste Gleichung giebt, in der zweyten, so erhält man eine Endgleichung für x, welche, wenn man sie entwickelt, zu dem fünften Grade steigt. Substituiret man hingegen eben den Werth von r in der ursprünglichen Gleichung

$$x(1 + r + r^2 + r^3) = a$$

so erhält man für x eine Gleichung, welche nur auf den vierten Grad steigt, und welche die möglichst einfache Gleichung ist, welche man für die unbekannte Größe x erhalten kann.

Ich werde nunmehr beweisen, sogar ohne die Form dieser Gleichung zu kennen, daß sie in zwey Gleichungen vom zweyten Grade auflösbar seyn muß, und zwar vermittelst einer andern Gleichung vom zweyten Grade.

In dieser Absicht bemerke ich, daß wenn man u statt x sucht, man auf eine ganz gleichartige Gleichung kommen muß. Denn setzt man $z = su$, so erhält man $y = s^2u$ und $x = s^3u$, so daß die beyden Gleichungen für s und u folgende seyn werden

$$u\,(1 + s \quad + s^2 + s^3) = a$$
$$u^2(1 + s^2 + s^4 + s^6) = b^2$$

d. h. sie werden mit den Gleichungen für x und r völlig gleichartig seyn. Hieraus aber läßt sich sogleich schließen, daß der Werth der unbekannten Größe u, nothwendig zugleich eine Wurzel, der oben gefundenen Gleichung für x seyn müsse.

Nun ist aber $u = r^3x$, und wenn man den oben gefundenen Werth von r^4, durch den von r dividiret, so erhält man

$$r^3 = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x}{x(a^2 + b^2 - 2ax)};\ \text{folglich}\ u = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x}{a^2 + b^2 - 2ax}$$

Bezeichnet man nun die vier Wurzeln der Gleichung für x, mit x', x'', x''', x'''', so werden diese Wurzeln von solcher Beschaffenheit seyn, daß

$$x'' = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x'}{a^2 + b^2 - 2ax'}$$

d. h. $2ax'x'' - (a^2 + b^2)(x' + x'') + 2ab^2 = 0$;
Es ist aber kein Grund vorhanden, warum diese Gleichung, nur zwischen den Wurzeln x', x'', nicht aber zwischen x''' und x'''' statt finden sollte; daher haben wir ferner

$$2ax'''x'''' - (a^2 + b^2)(x''' + x'''') + 2ab^2 = 0.$$

Wir haben also zwey ähnliche Gleichungen, welche zwischen den Wurzeln x', x'', desgleichen x''', x'''' statt finden, und welche überdem so beschaffen sind, daß sie ungeändert bleiben, wenn man x' mit x'', und x''' mit x'''' verwechselt Man ist also nach Nr. 111. versichert, daß unsere Gleichung vom vierten Grade, in zwey Gleichungen vom zweyten Grade zerfällt werden kann, welche folgende seyn mögen

$$x^2 - f'x + g' = 0$$
$$x^2 - f''x + g'' = 0$$

in welchen die Coefficienten f' und f'' Wurzeln einer Gleichung vom zweyten Grade seyn werden; eben so auch g' und g''.

Und da von diesen beyden Gleichungen, die eine die beyden Wurzeln x', x'', und die andere die beyden Wurzeln x''', x'''' enthalten muß; so wird $f' = x' + x''$, $g' = x'x''$, $f'' = x''' + x''''$, $g'' = x'''x''''$ seyn. Demnach erhält man

$$2ag' - (a^2 + b^2)f' + 2ab^2 = 0$$
$$2ag'' - (a^2 + b^2)f'' + 2ab^2 = 0$$

Daher $$g' = \frac{(a^2 + b^2)f' - 2ab^2}{2a}$$

$$g'' = \frac{(a^2 + b^2)f'' - 2ab^2}{2a},$$

so daß die beyden Faktoren der gegebenen Gleichung folgende seyn werden

$$x^2 - f'x + \frac{(a^2 + b^2)f' - 2ab^2}{2a} = 0$$

$$x^2 - f''x + \frac{(a^2 + b^2)f'' - 2ab^2}{2a} = 0$$

Um dies augenscheinlich zu machen, und zugleich die Gleichung zu finden, deren Wurzeln f' und f'' sind, müssen wir nun die Gleichung für x, welche unser Problem auflöset, wirklich suchen. Setzen wir also zur Abkürzung

$$c = \frac{a^2 + b^2}{a^2 - b^2}, \quad e = \frac{2a}{a^2 - b^2}.$$

so ist $r = c - ex$, und wenn man diesen Werth in die Gleichung $x(1 + r + r^2 + r^3) = a$ bringt, und dieselbe nach x ordnet, so erhält man

$$x^4 - \frac{1 + 3c}{e}x^3 + \frac{1 + 2c + 3c^2}{e^2}x^2 - \frac{1 + c + c^2 + c^3}{e^3}x$$

$$+ \frac{a}{e^3} = 0.$$

Da nun $\frac{a^2 + b^2}{2a} = \frac{c}{e}$, und $b^2 = \frac{c^2 - 1}{e^2}$, so werden die beyden Faktoren dieser Gleichung folgende seyn:

$$x^2 - f'x + \frac{cf'}{e} + \frac{1 - c^2}{e^2} = 0$$

$$x^2 - f''x + \frac{cf''}{e} + \frac{1 - c^2}{e^2} = 0,$$

multipliciret man diese beyde Faktoren mit einander, so erhält man

$$x^4 - (f' + f'')x^3 + (f'f'' + \frac{c}{e}(f' + f'') + \frac{2(1 - c^2)}{e^2})x^2$$

$$- (\frac{2c}{e}f'f'' + \frac{1 - c^2}{e^2}(f' + f''))x + \frac{c^2}{e^2}f'f''$$

$$+ \frac{c(1 - c^2)}{e^3}(f' + f'') + \frac{(1 - c^2)^2}{e^4} = 0$$

Die

Die Vergleichung der drey erſten Glieder dieſer Gleichung, mit den drey erſten Gliedern der obigen, giebt

$$f' + f'' = \frac{1 + 3c}{e}$$

$$f'f'' + \frac{c}{e}(f' + f'') + \frac{2(1 - c^2)}{e^2} = \frac{1 + 2c + 3c^2}{e^2}$$

$$\text{folglich } f'f'' = \frac{-1 + c + 2c^2}{e^2}$$

und man wird finden, daß dieſe Werthe von $f' + f''$, und von $f'f''$, auch der Vergleichung der übrigen Glieder Genüge thun.

Es ſind demnach die Größen f' und f'' die Wurzeln folgender Gleichung

$$f^2 - \frac{1 + 3c}{e} f + \frac{-1 + c + 2c^2}{e^2} = 0$$

Ich weiß daß man dieſes Problem auf eine viel einfachere Art auflöſen kann, ſo wie dies Newton in ſeiner Arithmetica univerſalis gethan hat, wo er es durch eine gewiſſe gewählte Beſtimmung der unbekannten Größen dahin bringt, daß man geradezu auf zwey Gleichungen vom zweyten Grade kommt. Aber es ſcheint mir theils die Auflöſung, welche ich hier gegeben habe, mehr direct, und deutlicher zu ſeyn, indem ſie den Grund entdeckt warum die Gleichung vom vierten Grade, auf welche man geradezu kommt, vermittelſt zweyer Gleichungen vom zweyten Grade auflösbar iſt; theils hat Newton für die Regel zu der erwähnten gewählten Beſtimmung der unbekannten Größen, keinen Beweis gegeben, und dieſer kann, wo ich nicht irre, nicht anders, als aus den oben feſtgeſetzten Gründen geführet werden. Doch es iſt hier nicht der Ort uns über dieſen Gegenſtand auszubreiten.

114.

Wenn irgend eine Anzahl μ von ſtetig proportionirten Größen beſtimmt werden ſoll, deren Summe ſowohl, als die

Summe ihrer Quadrate gegeben ist; so läßt sich dieses Problem nach der obigen Methode eben so leicht auflösen.

Denn nennt man das erste Glied der Progression x, das zweyte rx, so erhält man sogleich folgende beyde Gleichungen

$$x\,(1 + r + r^2 + r^3 + \text{etc.} + r^{\mu-1}) = a$$

$$x^2(1 + r^2 + r^4 + r^6 + \text{etc.} + r^{2(\mu-1)}) = b^2$$

welche sich in folgende beyde verwandeln

$$x\,(1 - r^{\mu}) = a\,(1 - r),$$

$$x^2(1 - r^{2\mu}) = b^2(1 - r^2);$$

und hieraus ergiebt sich, wie oben

$$r = \frac{a^2 + b^2 - 2ax}{a^2 - b^2}$$

$$r^{\mu} = \frac{2ab^2 + (a^2 - b^2)x}{(a^2 - b^2)x}$$

Wenn man den Werth von r, der sich wie oben unter der Form $r = c - ex$ darstellen lässet, in der ersten Gleichung substituiret, so erhält man

$$x(1 + (c - ex) + (c - ex)^2 + (c - ex)^3 + \text{etc.}$$
$$+ (c - ex)^{\mu-1}) - a = 0$$

welche Gleichung, wie man siehet, von dem Grade μ ist.

Durch ähnliche Schlüsse als oben, läßt sich nun beweisen, daß das erste und letzte Glied der Progression x', und $r^{\mu-1}x$ auf gleiche Art Wurzeln der obigen Gleichung seyn müssen. Dividiret man aber den Werth von r^{μ}, durch den von r, so erhält man $r^{\mu-1} = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x}{x(a^2 + b^2 - 2ax)}$, daher

$$r^{\mu-1}x = \frac{2ab^2 - (a^2 + b^2)x}{a^2 + b^2 - 2ax}.$$

Nennt man nun die Wurzeln unserer Gleichung x', x'', x''',

etc.

rc. $x^{(\mu)}$, so findet zwischen den beyden Wurzeln x', x'' folgende Bedingungsgleichung statt

$$2ax'x'' - (a^2 + b^2)(x' + x'') + 2ab^2 = 0$$

und da kein Grund vorhanden ist, warum dies Verhältniß, zwischen den Wurzeln x''', x^{IV}, oder x^{V}, x^{VI}, oder rc. weniger statt finden sollte, als zwischen x', x'', so hat man auf eben die Art

$$2ax'''x^{\mathrm{IV}} - (a^2 + b^2)(x''' + x^{\mathrm{IV}}) + 2ab^2 = 0$$
$$2ax^{\mathrm{V}}x^{\mathrm{VI}} - (a^2 + b^2)(x^{\mathrm{V}} + x^{\mathrm{VI}}) + 2ab^2 = 0$$
rc.

und die Anzahl dieser Gleichungen wird $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu-1}{2}$ seyn, je nachdem μ gerade oder ungerade ist.

Hieraus, und aus dem was Nr. III. erwiesen worden, folgt, daß die Gleichung vom μten Grade, in $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu-1}{2}$ Gleichungen vom zweyten Grade auflösbar ist. Diese Gleichungen sollen folgende seyn

$$x^2 - f'x + g' = 0$$
$$x^2 - f''x + g'' = 0$$
$$x^2 - f'''x + g''' = 0$$
rc.

in welchen die Coefficienten f', f'', f''', rc. die Wurzeln einer einzigen Gleichung von dem Grad $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu-1}{2}$ seyn werden; eben so auch die Coefficienten g', g'', g''', rc. Da nun $f' = x' + x''$, $f'' = x''' + x''''$, rc. $g' = x'x''$, $g'' = x'''x''''$, rc. so ist

$$2ag' - (a^2 + b^2)f' + 2ab^2 = 0$$
$$2ag'' - (a^2 + b^2)f'' + 2ab^2 = 0$$
rc.

 daher

daher

$$g' = \frac{(a^2 + b^2)f' - 2ab^2}{2a}$$

$$g'' = \frac{(a^2 + b^2)f'' - 2ab^2}{2a}$$

2c.

Die $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu - 1}{2}$ Faktoren unserer Gleichung sind demnach folgende

$$x^2 - f'x + \frac{(a^2 + b^2)f' - 2ab^2}{2a} = 0$$

$$x^2 - f''x + \frac{(a^2 + b^2)f'' - 2ab^2}{2a} = 0$$

$$x^2 - f'''x + \frac{(a^2 + b^2)f''' - 2ab^2}{2a} = 0$$

2c.

In dem Falle, wenn μ gerade ist, muß das Produkt aller dieser Gleichungen die obige Gleichung von dem Grade μ geben: ist aber μ ungerade, so muß man noch einen einfachen Faktor $x - h = 0$ hinzunehmen.

Ist die Multiplication verrichtet, so ist nichts übrig, als die ersten Glieder des Produkts mit der oben gefundenen Gleichung zu vergleichen, und diese Vergleichung giebt die Werthe der Größen $f' + f'' + f''' +$ 2c. $f'f'' + f'f''' + f''f''' +$ 2c. und diese Werthe sind die Coefficienten der Gleichung für f; was aber den Coefficient h betrift, (wenn μ ungerade), so wird dieser durch eine blos lineäre Gleichung bestimmt.

Hieraus folgt nun, daß das vorgelegte Problem sich jederzeit auf die Auflösung einer Gleichung von dem Grad $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu - 1}{2}$ reduciren lässet.

Wollte man übrigens anstatt x, die unbekannte Größe y bestimmen, so kommt man auf eine Gleichung die zu der

Gattung

Gattung der reciproken gehöret. Denn die beyden Gleichungen

$$x(1-r^\mu)=a(1-r),\quad x^2(1-r^{2\mu})=b^2(1-r^2)$$

geben $x(1+r^\mu)=\frac{b^2}{a}(1+r)$, und wenn man x wegschaffet, so ist

$$\frac{1-r^\mu}{1+r^\mu}=\frac{a^2}{b^2}\times\frac{1-r}{1+r}$$

oder vielmehr wenn man durch $1-r$ dividirt

$$\frac{1+r+r^2+r^3+\text{rc.}+r^{\mu-1}}{1+r^\mu}=\frac{a^2}{b^2}\times\frac{1}{1+r};$$

multipliciret man nunmehr über das Kreutz, und setzt zur Abkürzung $\frac{a^2}{b^2}=c^2$, so erhält man

$$(c^2-1)r^\mu+2c^2(r^{\mu-1}+r^{\mu-2}+\text{rc.}+r)+c^2-1=0$$

d. h. $r^\mu+\frac{2c^2}{c^2-1}(r^{\mu-1}+r^{\mu-2}+\text{rc.}+r)+1=0$, welche Gleichung nach den bekannten Methoden auf den Grad $\frac{\mu}{2}$ oder $\frac{\mu-1}{2}$ reduciret werden kann.

Das einfachste Mittel hierzu bestehet in der Substitution $r=\frac{1-y}{1+y}$; wodurch die Gleichung $\frac{1-r^\mu}{1+r^\mu}=\frac{a^2}{b^2}\times\frac{1-r}{1+r}$ in folgende verwandelt wird

$$\frac{(1+y)^\mu-(1-y)^\mu}{(1+y)^\mu+(1-y)^\mu}=\frac{a^2y}{b^2}$$

in welcher alle ungerade Potenzen von y zugleich verschwinden.

115.

Wir wollen noch ein aus der Geometrie entlehntes Beyspiel hinzufügen. Dies soll das bekannte Problem seyn, durch die Spitze D eines Quadrates ACDB (Fig. 1.) eine gerade Linie MN so zu ziehen, daß der Theil MN von dieser Linie, welcher zwischen den beyden gegenüberstehenden und verlängerten Seite AC und AB, des Quadrats, enthalten ist, von gegebener Länge sey.

Man nenne a die gegebene Seite des Quadrats, und b die gegebene Länge der Linie MN. Um die Lage dieser Linie zu bestimmen, nehme man $CM = x$ für die unbekannte Größe; so ist $MD = \sqrt{(x^2 + a^2)}$; und die beyden ähnlichen Dreyecke MCD, MAN, geben

$$x : \sqrt{(a^2 + x^2)} = a + x : MN = b;$$

hieraus ergiebt sich die Gleichung

$$bx = (a + x)\sqrt{(a^2 + x^2)};$$

Befreyt man dieselbe vom Wurzelzeichen, und ordnet sie nach x, so erhält man

$$x^4 + 2ax^3 + (2a^2 - b^2)x^2 + 2a^3x + a^4 = 0$$

welche, wie man siehet, vom vierten Grade ist.

Wir wollen nunmehr untersuchen, ob man aus der Natur der Aufgabe, nicht gewisse Verhältnisse unter den Wurzeln dieser Gleichung bestimmen könne, durch welche sie in Gleichungen von niedrigern Graden, auflösbar werde.

Um diese Absicht zu erreichen, bemerke ich, daß man durch den Punkt D wirklich vier Linien legen könne, welche die Bedingung der Aufgabe erfüllen; dies sind die Linien MN, M'N', M''N'', und M'''N'''; so daß CM, CM', CM'', CM''' die Wurzeln der obigen Gleichung seyn werden, von welchen die beyden letztern, wie man siehet, negativ seyn werden.

Wir bezeichnen daher diese Linien durch x', x'', x''', x''''; und da die beyden Dreyecke MDC, DNB ähnlich sind, so ist

MC:

$MC : CD = DB : BN$; da aber $M'N' = MN$ seyn muß, auch $CD = DB$, so sieht man leicht, daß auch $M'C = BN$ seyn wird; hierdurch erhält man nun folgende Proportion $x' : a = a : x''$; d. h. $x'x'' - a^2 = 0$.

Man wird geradezu, vermöge des Grundsatzes vom zureichenden Grunde, den Schluß machen können, daß unter den beyden andern Wurzeln x''' und x'''' ein ähnliches Verhältniß statt finden müsse. Will man sich aber a posteriori davon überzeugen, so darf man nur bedenken, daß, da $M''N'' = M'''N'''$, auch nothwendig $CM''' = BN''$ seyn müsse, und daß in den ähnlichen Dreyecken DCM'' und DBN'' die Proportion $CM'' : CD = DB : BN'' = CM'''$ statt finde, d. h. $x''' : a = a : x''''$, folglich

$$x'''x'''' - a^2 = 0.$$

Da wir nun zwey ähnliche Gleichungen haben, die eine zwischen x', x'', die andere zwischen x''', x'''', und da diese Gleichungen ungeändert bleiben, wenn man x' mit x'', desgleichen x''' mit x'''' verwechselt, so folgt aus den oben erwiesenen Sätzen, daß unsere gefundene Gleichung vom vierten Grade, sich nothwendig in folgende zweye vom zweyten Grade zerfällen lassen muß.

$$x^2 - f'x + g' = 0$$
$$x^2 - f''x + g'' = 0$$

in welchen f' und f'', so wie auch g' und g'' Wurzeln einer Gleichung vom zweyten Grad seyn werden; da aber $g' = x'x''$, und $g'' = x'''x''''$, so ist $g' = g'' = a^2$; die beyden Faktoren unserer Gleichung sind also

$$x^2 - f'x + a^2 = 0$$
$$x^2 - f''x + a^2 = 0.$$

Nimmt man hiervon das Produkt, so erhält man

$$x^4 - (f' + f'')x^3 + (f'f'' + 2a^2)x^2$$
$$- a^2(f' + f'')x + a^4 = 0;$$

daher

daher ist

$$f' + f'' = -2a, \quad f'f'' + 2a^2 = 2a^2 - b^2$$

also $f'f'' = -b^2$, so daß die Gleichung, deren Wurzeln f' und f'' sind, folgende seyn wird

$$f^2 + 2af - b^2 = 0.$$

Uebrigens ist leicht zu bemerken, daß wenn man in der Gleichung für x vom vierten Grade $x = az$ setzt, dieselbe in die Gattung der reciproken übergehen wird; in welcher man folglich alle ungerade Potenzen der unbekannten Größe auf Null bringen kann, wenn man $z = \frac{1-y}{1+y}$ setzt: so daß die eigentliche Substitution, durch welche man auf einmal diese Absicht erreichet, folgende ist $x = \frac{a(1-y)}{1+y}$.

Wenn man den Werth von y aus dieser Gleichung ableitet, so erhält man $y = \frac{a-x}{a+x} = 1 - \frac{2x}{a+x}$; es ist aber $\frac{x}{a+x} = \frac{\sqrt{(a^2+x^2)}}{b} = \frac{MD}{MN}$ (Fig. 2.); daher wird $y = 1 - \frac{2MD}{MN} = \frac{MN - 2MD}{MN} = \frac{2DR}{MN} = \frac{2DR}{b}$, vorausgesetzt, daß die Linie MN in R halbiret sey. Man ersiehet hieraus, daß man gleich von Anfang auf eine Gleichung vom vierten Grade ohne ungerade Potenzen der unbekannten Größe kommen kann, wenn man die Linie DR für die unbekannte Größe annimmt. Dies hat Newton bey der Auflösung dieses Problems in seiner Arithm. univ. gethan: aber es scheint mir in der That diese Wahl der unbekannten Größe nicht sehr natürlich, und ein Vortheil zu seyn, den man erst finden kann, wenn man schon fertig ist; wenigstens scheint mir die Art, wie ihn Newton ableitet, nicht alle die Evidenz zu haben, welche man bey Untersuchungen dieser Art zu fordern, berechtiget ist.