Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Erstes Capitel. Von den krummen Linien (Curven) überhaupt.

Zweytes Buch.

Erstes Capitel.

Von den krummen Linien (Curven) überhaupt.

§. 1.

Da eine veränderliche Größe nichts anders als eine allgemeine Größe ist, die alle bestimmte Größen unter sich begreift: so läßt sich dieselbe geometrisch sehr passend durch eine unbegrenzte gerade Linie RS Fig. 1. darstellen. Denn da man auf einer unbegrenzten Linie jedes bestimmte Stück zu nehmen im Stande ist, so gewähret sie eben den Begriff, den man bey einer veränderlichen Größe hat. Zuerst aber muß man in der unbegrenzten Linie RS einen Punkt A annehmen, um denselben als den Anfangspunkt aller auf der gedachten Linie zu nehmenden bestimmten Stücke zu betrachten, und dann stellt jeder bestimmte Theil von ihr, AP, einen in der veränderlichen Größe begriffenen bestimmten Werth vor.

§. 2.

Ist also x die veränderliche Größe, welche durch die unbegrenzte gerade Linie RS Fig. 1. vorgestellt wird, so ist offenbar, daß alle bestimmte Werthe von x, vorausgesetzt, daß sie reell sind, durch bestimmte Stücke, die man auf der geraden Linie RS abschneidet, vorgestellet werden können. Nimmt man nemlich den Punkt P in A selbst, so druckt das verschwindende Stück AP den Werth $x = 0$ aus; je weiter man aber den Punkt P von A entfernt, desto größer ist der Werth von x, der durch AP vorgestellt wird.

Dergleichen Stücke, wie AP, werden Absciſſen genennt, und es stellen also die Absciſſen bestimmte Werthe der veränderlichen Größe x vor.

§. 3.

Da sich aber die unbegrenzte gerade Linie RS (Fig. 1.) zu beyden Seiten von A ins Unendliche erstreckt, so kann man auch darauf jeden Werth von x auf eine doppelte Art nehme. Schneidet man indeß die positiven Werthe von x auf der rechten Seite von A ab, so geben die Stücke Ap auf der linken Seite die negativen Werthe von x. Da nemlich AP einen desto größern Werth von x anzeigt, je weiter der Punkt P von A entfernt wird, so muß umgekehrt der Werth von x desto kleiner werden, je weiter man denselben nach der Linken fortgehen läßt, und wenn P nach A kommt $= 0$ werden. Läßt man also P sich noch weiter nach der Linken bewegen, so kommt man dadurch zu Werthen von x, die kleiner als Null, d. h. negativ sind, und es müssen also die auf der linken Seite abgeschnittenen Stücke Ap negative Werthe von x anzeigen, wenn die auf der rechten Seite genommenen Stücke AP positive Werthe vorstellen sollen. Es ist indeß gleichgültig, was man für eine Seite zu den positiven Werthen von x wählen will, indem allemal die entgegengesetzte Seite den negativen Werthen desselben zugehört.

§. 4.

Da also die unbegrenzte gerade Linie RS (Fig. 2.) die veränderliche Größe x vorstellt, so wollen wir nun untersuchen, wie jede Funktion von x auf eine bequeme Art geometrisch dargestellt werden kann. Es sey y irgend eine Funktion von x, so daß also y einen bestimmten Werth bekommt, wenn man für x einen bestimmten Werth setzt. Auf der zur Darstellung der Werthe von x angenommenen geraden Linie RAS richte man für jeden bestimmten Werth von x die senkrechte Linie PM auf, und mache sie dem zugehörigen Werthe von y gleich. Ist der Werth von y positiv, so stelle man PM oberhalb, und wird y negativ, so nehme man PM unterhalb der RS. Läßt man nemlich die oberhalb liegenden Linien die positiven Werthe von y bedeuten, so fallen die verschwindenden Werthe desselben in die gerade Linie RS, und die negativen unterhalb derselben.

§. 5.

Die zweyte Figur stellt daher eine solche Funktion y von x vor, die für x = o den positiven Werth y = AB, für x = AP den Werth y = PM, für x = AD den Werth y = o, und für x = AP′ den negativen Werth y = P′M′ erhält, wo also P′M′ unter der RS zu liegen kommt. Auf eine ähnliche Art stellt man die Werthe von y, die den negativen Werthen von x entsprechen, oberhalb der RS vor, wenn sie positiv, und unterhalb derselben, wenn sie negativ sind, wie pm; wenn aber für irgend einen Werth von x, z. B. für −x = AE, y = o wird, so verschwindet daselbst die auf RS senkrecht aufzurichtende Linie.

§. 6.

Wenn man daher auf diese Art für alle bestimmte Werthe von x die zugehörigen Werthe von y sucht, und (Fig. 2.)

aus allen Punkten P der Linie RS auf derselben senkrechte Linien PM aufrichtet, welche die Werthe von y ausdrucken: so liegen die einen Endpunkte P der Linien PM in RS selbst, die andern aber fallen entweder oberhalb derselben, wenn y positiv, oder unterhalb derselben, wenn y negativ, oder endlich in sie, wenn $y=0$ ist, wie in den Punkten D und E. Die Endpunkte M der Linien PM stellen also irgend eine Linie, eine gerade oder krumme, vor, und es wird daher diese Linie durch die Funktion y bestimmt. Es enthält demnach jede Funktion von x, wenn man sie auf die angezeigte Art geometrisch behandelt, die Bestimmung irgend einer geraden oder krummen Linie, deren Natur von der Natur der Funktion y abhängt.

§. 7.

Auf diese Art lernt man die krumme Linie, welche aus der Funktion y entspringt, vollkommen kennen, weil alle ihre Punkte durch diese Funktion bestimmt werden. Wo man nemlich auch P annimmt, so kennt man die Länge der Linie PM, deren Endpunkt M in der krummen Linie liegt, und es lassen sich also alle ihre Punkte finden. Auch mag eine krumme Linie beschaffen seyn wie sie will, so kann man doch aus jedem ihrer Punkte eine senkrechte Linie auf die gerade Linie RS herabfällen, und so AP für die veränderliche Größe x, und PM für y erhalten.* Es läßt sich daher kein Punkt in einer krummen Linie denken, welchen man nicht auf diese Art bestimmen könnte.

§. 8.

Obgleich mehrere krumme Linien durch eine stetige Bewegung eines Punktes mechanisch beschrieben, und so ganz und auf einmal dem Auge vorgelegt werden können, so werden wir dennoch hier vorzüglich die beschriebene Entstehungshungsart der krummen Linien aus den Funktionen betrachten, weil sich dabey ein weiteres Feld öffnet, und der Calcul bequemer gebraucht werden kann. Es führt also jede Funktion von x auf irgend eine Linie, eine gerade entweder oder eine krumme, und umgekehrt läßt sich jede krumme Linie auf eine Funktion zurückführen. Es wird nemlich die Natur einer krummen Linie durch eine solche Funktion von x ausgedruckt, woraus man, wenn man die Stücke AP zwischen A und den aus den Punkten der Curve M auf RS senkrecht herabgefällten Linien PM für die veränderliche Größe x setzt, allemal den wahren Werth von PM findet.

§. 9.

Diese Vorstellung von den krummen Linien führt sogleich auf die Eintheilung derselben in continuirliche (stetige) und discontinuirliche oder vermischte. Man nennt nemlich eine krumme Linie alsdann continuirlich, wenn ihre Natur durch eine einzige bestimmte Funktion von x ausgedruckt wird; dagegen sie discontinuirlich oder vermischt und irregulär heißt, wenn sie so beschaffen ist, daß verschiedene Theile von ihr, BM, MD, DM ꝛc., durch verschiedene Funktionen von x ausgedruckt werden, so daß, nachdem der eine Theil BM nach einer gewissen Funktion von x beschrieben worden ist, der andere MD aus einer andern Funktion gefunden wird. Der Name dieser letztern Art der krummen Linien gründet sich darauf, weil dieselben nicht nach einem beständigen Gesetze fortgehen, sondern aus Theilen verschiedener continuirlichen Linien zusammengesetzt sind.

§. 10.

Es werden aber in der Geometrie vorzüglich die continuirlichen Curven betrachtet, und es wird unten gezeigt werden, daß eben die Curven, die durch eine einförmige Bewegung nach einer gewissen beständigen Regel mechanisch beschrieben werden können, sich auch durch eine einzige Funktion ausdrucken lassen, und also zu den continuirlichen Curven gehören. Ist daher die Linie mEBMDM (Fig 2.) eine continuirliche krumme Linie, deren Natur durch irgend eine Funktion y von x ausgedruckt wird: so ist aus dem Vorhergehenden bekannt, daß, wenn man die bestimmten Werthe von x auf der geraden Linie RS vom Punkte A annimmt, die zugehörigen Werthe von y die Länge der senkrechten Linien PM darstellen.

§. 11.

Bey der gegenwärtigen Untersuchung der krummen Linien hat man gewisse Namen zu merken, deren Gebrauch sehr häufig ist.

So heißt die gerade Linie RS, auf welcher man die Werthe von x abschneidet, die Axe, oder Abscissen-Linie (Linea directrix).

Der Punkt A, von welchem an die Werthe von x genommen werden, wird der Anfangspunkt der Abscissen genennt.

Unter Abscissen versteht man die Theile der Axe AP, welche die bestimmten Werthe von x ausdrucken, [§. 2.]

Endlich belegt man die senkrechten Linien PM, die aus den Endpunkten der Abscissen P nach der Curve gezogen werden, mit dem Namen der Applicaten.

Den letzten Ausdruck gebraucht man aber auch für Linien wie PM, wenn gleich der Winkel, den sie mit der Axe machen, kein rechter, sondern ein schiefer Winkel ist, und unterscheidet daher noch die senkrechten und schiefen Applicaten von einander. Wofern nicht ausdrücklich das

Gegen-

Gegentheil angezeigt ist, muß man in den folgenden Untersuchungen immer senkrechte Applicaten verstehen.

§. 12.

Wenn man also eine Abscisse AP durch die veränderliche Größe x anzeigt, oder AP = x setzt, so druckt die Funktion y die Größe der Applicate PM aus, und es wird also PM = y. Wenn daher die Curve continuirlich ist, so wird ihre Natur aus der Beschaffenheit der Funktion y, oder aus dem Verhältnisse erkannt, welches y und x gegen einander haben. Ferner ist der Theil AS der Axe RS das Stück derselben, worauf die positiven, und der Theil AR dasjenige, worauf die negativen Werthe von x genommen werden, so wie über der Axe RS die positiven, und unter derselben die negativen Applicaten liegen.

§. 13.

Da sich also aus jeder Funktion von x eine krumme Linie ergiebt, so läßt sich diese Curve auch aus der Funktion erkennen und darnach beschreiben. Setzt man nemlich für x nach und nach von o bis zum ∞ alle positive Werthe, und sucht zu einem jeden die zugehörigen Werthe von y, so kann man jedes y durch eine, je nachdem es positiv oder negativ ist, oberhalb oder unterhalb RS gestellte Applicate ausdrucken, und so den Theil der Curve BMM (Fig. 2.) finden. Legt man nun auf eine ähnliche Art x alle negative Werthe von o bis zum — ∞ bey, so bestimmen die zugehörigen Werthe von y den Theil der Curve BEm, und man findet also auf diesem Wege die ganze in der Funktion enthaltene Curve.

§. 14.

Da y eine Funktion von x ist, so ist y entweder einer entwickelten Funktion von x gleich, oder man hat eine Glei-

chung

chung, in welcher y durch x bestimmt wird; in beyden Fällen aber ist eine Gleichung gegeben, von der man sagt, daß sie die Curve ausdrucke. Es wird daher die Natur einer jeden Curve durch eine Gleichung zweyer veränderlichen Größen x und y dargestellt, wovon die eine x die Abscissen vom Punkte A an, die andere y aber die senkrechten Applicaten bedeutet. Abscissen und Applicaten, zusammen betrachtet, werden rechtwinklige Coordinaten genennt; und man sagt deswegen, daß die Natur einer Curve durch eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten ausgedruckt sey, wenn man eine Gleichung hat, die bestimmt, was für eine Funktion y von x ist.

§. 15.

Da man also bey der Untersuchung der krummen Linien von Funktionen ausgehen kann, so muß es so viel Geschlechter der krummen Linien geben, als wir oben [im ersten Capitel des ersten Buchs,] Geschlechter der Funktionen kennen gelernt haben. Man theilt daher die krummen Linien, so wie die Funktionen, sehr bequem in Algebraische und in Transcendente ein. Eine Curve ist nemlich algebraisch, wenn ihre Applicate y eine algebraische Funktion von der Abscisse x ist, oder wenn die Natur dieser Curve durch eine algebraische Gleichung zwischen den Coordinaten x und y ausgedruckt werden kann. Diese Curven pflegt man auch mit dem Namen, geometrische Curven, zu belegen. Dagegen ist eine Curve transcendent, wenn ihre Natur durch eine transcendente Gleichung zwischen x und y ausgedruckt wird, oder, wobey y eine transcendente Funktion von x ist. Diese Eintheilung der krummen Linien in algebraische und transcendente muß als die Hauptabtheilung derselben betrachtet werden.

§. 16.

Wenn man eine krumme Linie nach einer gegebenen Funktion von x, welche die Applicate y ausdruckt, beschreiben will, so muß man die Natur der gedachten Funktion sorgfältig überdenken, und wohl bemerken, ob sie eine einförmige oder vielförmige Funktion ist. Ist zuvörderst y eine einförmige Funktion von x, oder $y = P$, so daß P irgend eine einförmige Funktion von x bedeutet: so kommt, weil alsdann y für jeden bestimmten Werth von x nicht mehr als einen bestimmten Werth erhält, jeder Abscisse nicht mehr als eine Applicate zu; und es ist daher die Curve so beschaffen, daß jede gerade auf der Axe RS (Fig. 2.) aus einem Punkte P aufgerichtete senkrechte Linie PM allemal die Curve, aber in nicht mehr als in einem Punkte M, schneidet. Es entspricht also in diesem Falle jedem Punkte in der Axe ein Punkt in der Curve, und es erstreckt sich die Curve, da die Axe auf beyden Seiten ohne Ende fortläuft, ebenfalls auf beyden Seiten ins Unendliche. Mit andern Worten: Eine Curve, die aus einer solchen Funktion entspringt, geht continuirlich und ohne irgend eine Unterbrechung auf beyden Seiten der Axe ohne Ende fort, so wie die Linie mEBMDM Fig. 2.

§. 17.

Nun sey y eine zweyförmige Funktion von x, oder es sey, wenn P und Q einförmige Funktionen von x bedeuten, $yy = 2Py - Q$, und folglich $y = P \pm \surd (PP - Q)$. In diesem Falle kommt also jeder Abscisse x eine doppelte Applicate zu, und dabey sind entweder beyde Applicaten reell, oder beyde imaginär. Jenes findet statt, wenn PP größer, und dieses, wenn PP kleiner als Q ist. So lange daher beyde Werthe von y reell sind, so hat jede Abcisse AP

(Fig. 3.)

(Fig. 3.) zwey Applicaten PM, PM, oder, so schneidet die auf der Axe in P senkrecht aufgerichtete Linie die Curve in zweyen Punkten M und M. Wenn aber PP kleiner als Q ist, so kommen den Abscissen gar keine Applicaten zu, oder es begegnet aldann die auf der Axe senkrecht aufgerichtete Linie der Curve nirgends, wie z. B in p. Da aber vorher PP größer als Q war, so kann PP nicht kleiner als Q werden, ohne daß zuvor PP = Q sey, und dies ist daher die Grenze zwischen den reellen und imaginären Applicaten. Da also, wo die reellen Applicaten aufhören, wie in C und G, da wird $y = P \pm o$, oder da werden beyde Applicaten einander gleich, und die Curve ändert ihre Richtung und geht zurück.

§. 18.

Nach der 3ten Figur wird die Applicate y imaginär und also PP kleiner als Q, wenn die negative Abscisse $-x$ zwischen den Grenzen AC und AE enthalten ist: jenseits E hingegen werden die Applicaten wieder reell. Dieses kann nicht statt finden, wofern nicht in E, PP = Q ist, und also beyde Applicaten abermals zusammenfallen. Von E an kommen also den Abscissen AP wieder zwey Applicaten Pm, Pm zu, bis in G, wo die Applicaten abermals zusammenfallen, und also jenseits G wieder imaginär werden. Eine solche Curve kann also aus zwey oder mehrern von einander abgesonderten Theilen, MBDBM, FmHm bestehen, indeß muß man diese Theile zusammengenommen gleichwohl als eine einzige continuirliche oder reguläre krumme Linie betrachten, weil sie alle aus einer und derselben Funktion entspringen. Es haben also dergleichen Curven die Eigenschaft, daß die auf ihrer Axe in den Punkten derselben aufgerichteten senkrechten Linien MM die Cur-

Curven entweder nirgends oder in zweyen Punkten schneiden, wofern nicht anders beyde Durchschnittspunkte zusammfallen, so wie, wenn die Applicaten durch die Punkte D, F, H, oder I gelegt werden.

§. 19.

Wenn y eine dreyförmige Funktion von x ist, oder y durch die Gleichung $y^3 - Py^2 + Qy - R = o$ bestimmt wird, so daß P, Q und R einförmige Funktionen von x bedeuten: so hat die Applicate y für jeden Werth von x drey Werthe, und diese sind entweder alle drey reell, oder es ist solches nur der eine davon, und die beyden andern sind imaginär. Aus diesem Grunde schneiden daher alle Applicaten die Curve entweder in drey Punkten oder nur in einem, es müßte denn seyn, daß zwey oder auch wohl alle drey Durchschnittspunkte in einen zusammenfielen. Da also zu jeder Abscisse zum wenigsten eine reelle Applicate gehört, so muß sich die Curve nothwendig auf beyden Seiten der Axe ins Unendliche erstrecken. Es gehen daher diese Curven entweder in einem einzigen continuirlichen Zuge fort, wie die Curve Fig. 4, oder sie bestehen aus zwey oder mehr von einander abgesonderten Theilen, wie die Fig. 5, indeß muß man im letztern Falle alle diese Theile nur als eine und dieselbe continuirliche Curve betrachten.

§. 20.

Wenn y eine vierförmige Funktion von x ist, oder y durch die Gleichung $y^4 - Py^3 + Qy^2 - Ry + S = o$ bestimmt wird, so daß P, Q, R und S einförmige Funktionen von x bedeuten: so gehören zu jedem bestimmten x entweder vier, oder zwey, oder gar keine reelle Applicaten. Wenn daher eine Curve aus einer solchen vierförmigen Funktion

ent-

entspringt, so wird sie von den Applicaten entweder in vier, oder in zwey Punkten, oder gar nicht geschnitten. Alle diese Fälle erblickt man in der 6ten Figur, wo aber die Punkte I und o, wo zwey Durchschnittspunkte zusammenfallen, von den übrigen unterschieden werden müssen. Eine solche Curve hat daher entweder gar keine, oder sie hat zwey, oder vier ins Unendliche sich erstreckende Schenkel. Im ersten Falle, wo die Schenkel der Curve auf keiner Seite ohne Ende fortlaufen, ist dieselbe, so wie in der Figur, von allen Seiten geschlossen, und begrenzt einen endlichen Raum. Und hieraus läßt sich nunmehr die Natur der krummen Linien, die aus vielförmigen Funktionen überhaupt entspringen, beurtheilen.

§. 21.

Ist nemlich y irgend eine vielförmige Funktion, oder wird y durch eine Gleichung bestimmt, in welcher n der Exponent der höchsten Potestät von y ist: so ist die Zahl der reellen Werthe von y entweder n, oder $n-2$, oder $n-4$, oder $n-6$ ꝛc., und in eben so viel Punkten schneiden die Applicaten die Curve. Wenn also eine Applicate die Curve in m Punkten schneidet, so schneiden alle übrige Applicaten eben diese Curve in so viel Punkten, daß ihre Zahl von m immer um eine gerade Zahl unterschieden ist, und es kann daher die Curve von keiner Applicate in $m+1$, oder $m-1$, oder $m \pm 3$, Punkten ꝛc. geschnitten werden. Mit andern Worten: Ist die Zahl der Durchschnittspunkte der einen Applicate und der Curve eine gerade oder eine ungerade Zahl, so schneiden auch alle übrige Applicaten die Curve entweder in einer geraden oder in einer ungeraden Anzahl von Punkten.

§. 22.

Wenn also eine Applicate die Curve in einer ungeraden Anzahl von Punkten schneidet, so ist es unmöglich, daß irgend eine andere Applicate die Curve nirgends treffe. In diesem Falle muß also die Curve auf beyden Seiten zum wenigsten einen ins Unendliche sich erstreckenden Schenkel haben: und wenn auf der einen oder der andern Seite mehrere Schenkel ohne Ende fortlaufen, so muß ihre Anzahl eine ungerade Zahl seyn, weil die Zahl der Durchschnittspunkte nirgends eine gerade Zahl seyn kann. Zählt man also die ohne Ende fortlaufenden Schenkel an beyden Seiten zusammen, so wird ihre Zahl allemal eine gerade Zahl werden. Eben dieses findet statt, wenn die Applicaten die Curve in einer geraden Anzahl von Punkten schneiden; denn alsdann sind auf jeder Seite entweder gar keine, oder zwey, oder vier rc. ohne Ende fortlaufende Schenkel, und es muß daher die Anzahl aller nothwendig eine gerade Zahl seyn. Auf diese Art haben wir bereits einige merkwürdige Eigenschaften der continuirlichen und regulären krummen Linien gefunden, wodurch man in den Stand gesetzt ist, dieselben von den discontinuirlichen und irregulären zu unterscheiden.