Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Viertes Capitel. Von den vornehmsten Eigenschaften der Linien einer jeden Ordnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Viertes Capitel.

Von den vornehmsten Eigenschaften der Linien einer jeden Ordnung.

§. 66.

Zu den vornehmsten Eigenschaften der Linien einer jeden Ordnung gehört vor allen andern die Menge der Punkte, in welchen diese Linien von einer geraden Linie geschnitten werden können. Denn da die Linie der ersten Ordnung, oder die gerade Linie, von einer andern geraden Linie in nicht mehr als in einem Punkte geschnitten werden kann, bey den krummen Linien aber solches in mehrern Punkten möglich ist: so entsteht mit Recht die Frage, in wie viel Punkten die Curven jeder Ordnung von einer nach Belieben gezogenen geraden Linie geschnitten werden können, indem die Beantwortung dieser Frage auf die Kenntniß der Curven, die zu den verschiedenen Ordnungen gehören, einen großen Einfluß hat. Wir werden aber finden, daß jede Linie der zweyten Ordnung von einer geraden Linie in nicht mehr als in zwey, jede Curve der dritten Ordnung in nicht mehr als in drey Punkten ꝛc. geschnitten werden kann.

§. 67.

Wir haben bereits oben [§. 26.] der Art und Weise E wähnung gethan, wie die Anzahl der Punkte bestimm werden kann, worin die Axe einer jeden Curve von dies Curve geschnitten wird. Setzt man nemlich in der zwisch der Abscisse x und der Applicate y gegebenen Gleichu $y = o$, so erhält man eine Gleichung, worin bloß x b findlich ist; und da die Applicate y allemal da $= o$ wi wo ein Punkt der Curve in die Axe fällt, so zeigt di Gleichung die Werthe von x, und folglich die Punkte Axe an, in welchen die Curve die Axe schneidet. So hält man, wenn man in der oben [§. 64.] für den Kr gefundenen Gleichung, $yy = 2ax - xx$, $y = o$ se $o = 2ax - xx$, woraus sich zwey Werthe für x erg ben, nemlich $x = o$, und $x = 2a$, die anzeigen, d die Axe RS, Fig. 16, zuvörderst in dem Anfangspunk der Abscissen A, und dann in dem Punkte B, wenn AB = ist, von dem Kreise geschnitten wird. Auf eine ähnliche A zeigen auch bey den übrigen Curven, wenn man in der f sie gegebenen Gleichung $y = o$ setzt, die Werthe von die Durchschnittspunkte mit der Axe an.

§. 68.

Da bey der allgemeinen Gleichung einer jeden Cur jede gerade Linie die Stelle der Axe vertritt, so zeigt d aus derselben, wenn man $y = o$ setzt, entspringende Gle chung die Anzahl der Punkte an, in welchen die Curve vo einer geraden Linie geschnitten werden kann. Man find aber auf diese Art eine Gleichung, worin bloß die Absciss x als eine unbekannte Größe enthalten ist, und es zeig daher die Wurzeln derselben die Durchschnittspunkte de Curve mit der Axe an. Es hängt demnach die Anzahl de

Durch

Durchschnittspunkte von der höchsten Potestät von x in dieser Gleichung ab, und kann folglich nicht größer seyn, als der Exponent dieser Potestät. Es wird aber immer so viel Durchschnittspunkte geben, als der Exponent der höchsten Potestät von x Einheiten enthält, wenn alle Werthe von x reell sind; sind hingegen einige darunter imaginär, so wird die Anzahl der Durchschnittspunkte um eben so viel vermindert.

§. 69.

Da wir also für jede Ordnung der Linien die allgemeinste Gleichung kennen [§ 53. - - §. 57. verbunden mit § 45.], so sind wir daraus im Stande, auf dem beschriebenen Wege die Anzahl der Punkte zu finden, in welchen jede Linie, sie mag zu einer Ordnung gehören, zu was für einer sie will, von einer geraden Linie geschnitten werden kann. Um von der allgemeinen Gleichung für die Linie der ersten Ordnung oder die gerade Linie,

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y$$

anzufangen, so erhält man daraus, wenn man $y = o$, setzt,

$$o = \alpha + \beta x$$

und diese Gleichung kann nicht mehr als eine Wurzel haben. Es erhellet demnach, daß die gerade Linie von einer andern in nicht mehr als in einem Punkte geschnitten werden kann. Wird $\beta = o$, so zeigt die unmögliche Gleichung $o = \alpha$ an, daß die Axe in diesem Falle von der geraden Linie gar nicht geschnitten wird, und es sind also alsdann beyde Linien einander parallel. Es erhellt dieses auch aus der Gleichung $o = \alpha + \gamma y$, welche man aus der allgemeinen Gleichung erhält, wenn man darin $\beta = o$ setzt.

§. 70.

Wenn man in der allgemeinen Gleichung der Linien der zweyten Ordnung

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta xx + \varepsilon xy + \zeta yy$$

$y = o$ setzt, so erhält man dafür

$$o = \alpha + \beta x + \delta xx,$$

und diese Gleichung hat entweder zwey reelle Wurzeln, oder gar keine, oder auch eine, wenn $\delta = o$ ist. Es kann daher jede Linie der zweyten Ordnung von einer geraden Linie in zwey, oder nur in einem Punkte, oder auch gar nicht geschnitten werden, und alle diese Fälle kann man auf die Art zusammen ausdrucken, daß man sagt, eine Linie der zweyten Ordnung könne von einer geraden Linie in nicht mehr als in zwey Punkten geschnitten werden.

§. 71.

Wenn man in der allgemeinen Gleichung für die Linien der dritten Ordnung $y = o$ setzt, so erhält man daraus

$$o = \alpha + \beta x + \gamma xx + \delta x^3$$

und da diese Gleichung nicht mehr als drey Wurzeln haben kann, so erhellet daraus, daß die Linien der dritten Ordnung von einer geraden Linie in nicht mehr als in drey Punkten geschnitten werden können. Es kann sich aber ereignen, daß eine Linie der dritten Ordnung von einer geraden Linie in weniger Punkten geschnitten wird, z. B. in zweyen, wenn $\delta = o$ ist, und die beyden Wurzeln der Gleichung $o = \alpha + \beta x + \gamma xx$ reell sind, oder in einem, wenn die obige Gleichung zwey imaginäre Wurzeln hat, oder wenn $\delta = o$, und $\gamma = o$ ist, oder auch gar nicht, wenn $\delta = o$, und die übrigen beyden Wurzeln der Gleichung imaginär sind, welches statt findet, wenn β, γ, und δ verschwinden, und α nicht $= o$ ist.

§. 72.

§. 72.

Auf eine ähnliche Art schließt man, daß die Linien der vierten Ordnung von einer geraden Linie in nicht mehr als in vier Punkten geschnitten werden können; und überhaupt kommt diese Eigenschaft den Linien aller Ordnungen zu, so, daß eine Linie von der nten Ordnung von einer geraden Linie in nicht mehr als in n Punkten geschnitten werden kann. Doch folgt hieraus nicht, daß jede Linie von der Ordnung n von jeder geraden Linie wirklich in n Punkten geschnitten werde, es kann vielmehr die Anzahl der Durchschnittspunkte auch kleiner als n, ja selbst = o seyn, wie wir dies bereits bey den Linien der zweyten und dritten Ordnung angemerkt haben. Es sagt also die angeführte Behauptung bloß, daß die Anzahl der Durchschnittspunkte nie größer seyn kann, als die Zahl, welche die Ordnung der krummen Linien anzeigt.

§. 73.

Aus der Anzahl der Punkte, worin eine gerade Linie eine gegebene Curve schneidet, läßt sich also die Ordnung dieser Curve nicht bestimmen. Denn wenn die Anzahl dieser Durchschnittspunkte = n ist, so folgt daraus nicht, daß die Curve zur nten Ordnung gehöre, sondern sie kann dabey eben sowohl eine Linie jeder höhern Ordnung seyn, ja selbst zu den transcendenten Linien gehören. Dagegen kann man mit Gewißheit behaupten, daß jede Curve, die von einer geraden Linie in n Punkten geschnitten wird, nicht zu einer niedrigern Ordnung gehöre. So ist, wenn eine gegebene Curve von einer geraden Linie in vier Punkten geschnitten wird, ausgemacht, daß man sie weder zur zweyten noch zur dritten Ordnung rechnen darf; ob sie aber zur vierten oder zu einer höhern Ordnung gehöre, oder gar transcendent sey? das läßt sich daraus nicht beurtheilen.

§. 74.

Die allgemeinen Gleichungen, welche wir für die Linien jeder Ordnung gegeben haben, enthalten mehrere beständige Größen, deren Bestimmung unserer Willkühr überlassen bleibt. Setzt man dafür bestimmte Größen, so werden dadurch die Curven durchaus bestimmt, und lassen sich, wenn die Axe gegeben ist, so beschreiben, daß alle übrige in eben der allgemeinen Gleichung enthaltenen Curven ausgeschlossen werden. So kann, obgleich die Gleichung $o = \alpha + \beta x + \gamma y$ allein die gerade Linie in sich faßt, doch die Lage dieser geraden Linie in Ansehung der Axe auf unzählige Arten verändert werden, weil die beständigen Größen α, β, γ unendlich viele Werthe bekommen können. Sobald aber diese Größen bestimmte Werthe erhalten, so wird die Lage der geraden Linie so bestimmt, daß außer ihr keine andere der Gleichung ein Genüge thut.

§. 75.

Es scheint zwar, als ob die Gleichung $o = \alpha + \beta x + \gamma y$, da sie drey beständige Größen α, β, γ enthält, drey Bestimmungen zulasse; allein wegen der Natur der Gleichungen ist diese Gleichung schon bestimmt, sobald das Verhältniß dieser beständigen Größen, oder das Verhältniß zweyer von ihnen zur dritten festgesetzt ist, und es läßt daher diese Gleichung nicht mehr als zwey Bestimmungen zu. Denn bestimmt man β und γ durch α, so daß z. B. $\beta = -\alpha$, und $\gamma = 2\alpha$ wird, so verwandelt sich dieselbe in $o = \alpha - \alpha x + 2\alpha y$, und ist also, da α durch die Division wegge-

bracht

bracht werden kann, dadurch schon vollkommen bestimmt. Auf eine ähnliche Art läßt die allgemeine Gleichung der Linien der zweyten Ordnung, die sechs beständige Größen enthält, nicht mehr als fünf, die allgemeine Gleichung der Linien der dritten Ordnung nicht mehr als neun, und überhaupt die allgemeine Gleichung der Linien der nten Ordnung nicht mehr $\frac{(n + 1)(n + 2)}{1 \cdot 2} - 1$ Bestimmungen zu.

§. 76.

Es lassen sich aber die gedachten beständigen Größen allemal so bestimmen, daß die Curve durch einen gegebenen Punkt gehet, und dadurch wird denn eine dieser Bestimmungen gefunden. Soll z. B. eine für irgend eine Linie gegebene Gleichung so bestimmt werden, daß die Curve durch einen gegeben Punkt B Fig. 17 gehe, so nehme man nach Belieben eine Axe und in derselben den Anfangspunkt der Abscissen A an, und fälle aus B die Linie Bb auf die Axe senkrecht herab. Hier ist nun offenbar, daß man, wenn die Curve durch den Punkt B gehet, und $Ab = x$ gesetzt wird, $Bb = y =$ der Applicate habe. Setzt man also in der gegebenen allgemeinen Gleichung Ab für x, und Bb für y, so erhält man eine Gleichung, woraus sich eine von den beständigen Größen α, β, γ, δ, ε, ꝛc. bestimmen läßt, und ist dieses geschehen, so gehen alle Curven, die in der auf diese Art bestimmten allgemeinen Gleichung enthalten sind, durch den Punkt B.

§. 77.

Soll die Curve überdem auch durch den Punkt C gehen, so fälle man auch aus diesem Punkte die senkrechte Linie Cc auf die Axe, und setze in der Gleichung $x = Ac$, und y = Cc. Hierdurch wird man eine neue Gleichung bekommen, woraus sich ebenfalls eine von den beständigen Größen α, β, γ, δ, rc. bestimmen lassen wird. Auch ist leicht einzusehen, daß man, wenn die Curve durch drey Punkte B, C, D gehen soll, dadurch auf eben die Art drey, und wenn sie durch vier Punkte B, C, D, E gehen soll, vier beständige Größen bestimmen könne. Wenn also die Anzahl der bestimmten Punkte, wodurch eine Curve gehen soll, eben so groß ist, als die Anzahl der Bestimmungen, welche die allgemeine Gleichung dieser Curve zuläßt, so ist dadurch die Curve durchaus bestimmt, und die einzige, die durch alle gegebene Punkte gelegt werden kann.

§. 78.

Da also die allgemeine Gleichung der Linien der ersten Ordnung oder der geraden Linie nur zwey Bestimmungen zuläßt, [§. 75.] so wird die Linie der ersten Ordnung, oder die gerade Linie, durch jede zwey für sie gegebene Punkte, durchaus bestimmt, und es läßt sich also durch zwey gegebene Punkte nicht mehr als eine gerade Linie legen, wie solches auch schon aus den Elementen bekannt ist. Wenn aber nicht mehr als ein Punkt gegeben ist, so ist die Gleichung noch unbestimmt, und es lassen sich daher durch diesen Punkt unzählige gerade Linien legen.

§. 79.

Die allgemeine Gleichung der Linien der zweyten Ordnung läßt fünf Bestimmungen zu [§. 75.], und wenn also eine Linie der zweyten Ordnung durch fünf bestimmte Punkte gehen soll, so ist dadurch diese Linie durchaus bestimmt. Es kann daher durch jede fünf gegebene Punkte nicht mehr als eine einzige Linie der zweyten Ordnung gelegt werden; aber

wenn

wenn nur vier, oder noch weniger Punkte bestimmt sind, so lassen sich dadurch unzählige Linien legen, die alle zur zweyten Ordnung gehören. Liegen drey von den gegebenen Punkten in einer geraden Linie, so findet man, da keine Linie der zweyten Ordnung von einer geraden Linie in drey Punkten geschnitten werden kann, keine continuirliche Curve, sondern eine complexe Linie, oder zwey gerade Linien, denn diese sind nach §. 65. in der allgemeinen Gleichung des zweyten Grades enthalten.

§. 80.

Da ferner die allgemeine Gleichung der Linien der dritten Ordnung neun Bestimmungen zuläßt, so kann man durch jede neun nach Belieben angenommene Punkte eine Linie der dritten Ordnung, aber auch nicht mehr als eine legen; ist hingegen die Anzahl der gegebenen Punkte kleiner, so sind unzählige Linien der dritten Ordnung möglich, die insgesammt durch diese Punkte gehen. Auf eine ähnliche Art läßt sich durch jede vierzehn Punkte nicht mehr als eine Linie der vierten Ordnung, durch jede zwanzig Punkte nicht mehr als eine Linie der fünften Ordnung legen, ꝛc. Ueberhaupt werden die Linien von der Ordnung n durch so viel Punkte bestimmt, als die Formel $\frac{(n+1)(n+2)}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}$ Einheiten hat, so daß, wenn die Anzahl der gegebenen Punkte kleiner ist, dadurch unendlich viele Linien von eben dieser Ordnung gelegt werden können.

§. 81.

Wenn also nicht mehr als $\frac{n(n+3)}{2}$ Punkte gegeben werden, so kann man dadurch allemal eine oder unzählige Linien von der Ordnung n legen; eine, wenn die Anzahl d gegebenen Punkten $= \frac{n(n+3)}{2}$, unzählige, wenn dieselb kleiner ist. Es kann aber dieses, wie auch immer die Punkte gegeben werden mögen, nie unmöglich werde weil man bey der Bestimmung der Coefficienten α, β, γ, δ nie quadratische oder höhere Gleichung aufzulösen ha sondern alle dabey vorkommende Gleichungen einfach sin Man findet daher für die Größen α, β, γ, δ, ꝛc. nie, we der imaginäre noch vielförmige Werthe, und es muß fol lich jede reelle Linie durch die gegebenen Punkte gelegt wer den können, aber auch nie mehr als eine, wenn so vi Punkte gegeben sind, als die allgemeine Gleichung Bestim mungen zuläßt.

§. 82.

Da die Axe nach Belieben angenommen werden kan so erleichtert man sich die Bestimmung der Coefficiente α, β, γ, δ, ꝛc., wenn man dieselbe durch einen von de gegebenen Punkten legt, und eben diesen Punkt A den An fangspunkt der Abscissen seyn läßt. Thut man dieses, muß, wenn man $x = 0$ setzt, auch $y = 0$ seyn, und e wird daher in der gegebenen allgemeinen Gleichung

$$0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2 + \eta x^3 + \text{ꝛc.}$$

sogleich $\alpha = 0$. Außerdem kann man die Axe auch noch durch einen andern von den gegebenen Punkten legen, un auch hierdurch wird die Anzahl der Größen, wodurch die Lag der gedachten Punkte bestimmt wird, vermindert. Endlich kann man statt rechtwinkliger Coordinaten solche schiefwink lige nehmen, daß auch die durch den Anfangspunkt der Ab scissen gezogene Applicate durch einen von den gegebenen Punkten gehe, indem sich sowohl die Natur als die Con

stru

struction einer Curve gleich leicht aus ihrer Gleichung ergiebt, es mögen dabey rechtwinklige oder schiefwinklige Coordinaten zum Grunde liegen.

§. 83.

Soll z. B. die Linie der zweyten Ordnung gefunden werden, die, Fig. 18, durch folgende fünf gegebene Punkte, A, B, C, D und E gelegt werden kann, so ziehe man die Axe durch zwey von diesen Punkten A und B, und nehme in dem einen von ihnen, A, den Anfangspunkt der Abscissen. Dann ziehe man von A nach dem dritten Punkte C die gerade Linie AC, lasse den Winkel CAB den Applicaten-Winkel seyn, und ziehe folglich aus den Punkten D und E die geraden Linien Dd und Ee nach der Axe mit AC parallel. Setzt man nunmehr $AB = a$; $AC = b$; $Ad = c$; $Dd = d$; $Ae = e$ und $Ee = f$; und legt dabey die allgemeine Gleichung der Linien der zweyten Ordnung

$$o = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$$

zum Grunde, so wird, wenn man

die Abscisse setzt,	die Applicate
$x = o$	$y = o$
$x = o$	$y = b$
$x = a$	$y = o$
$x = c$	$y = d$
$x = e$	$y = f$

Hieraus ergeben sich folgende fünf Gleichungen:

I. $o = \alpha$

II. $o = \alpha + \gamma b + \zeta b^2$

III. $o = \alpha + \beta a + \delta a^2$

IV. $o = \alpha + \beta c + \gamma d + \delta c^2 + \varepsilon cd + \zeta d^2$

V. $o = \alpha + \beta e + \gamma f + \delta e^2 + \varepsilon ef + \zeta f^2$

und es ist also $\alpha = 0$; $\gamma = -\zeta b$; und $\beta = -\delta$
Bringt man nun diese Werthe in die übrigen Gleichungen
so wird

$$0 = -\delta ac - \zeta bd + \delta cc + \varepsilon cd + \zeta dd$$
$$0 = -\delta ae - \zeta bf + \delta ee + \varepsilon ef + \zeta ff.$$

Man multiplicire die erste von diesen Gleichungen mit ef und die andere mit cd, und ziehe, um ε wegzubringen, die zweyte von der ersten ab, so bekommt man,

$$0 = -\delta acef - \zeta bdef + \delta ccef + \zeta ddef$$
$$+ \delta acde + \zeta bcdf - \delta cdee - \zeta cdff$$

oder

$$\frac{\delta}{\zeta} = \frac{bdef - bcdf - ddef + cdff}{acde - acef - cdee + ccef.}$$

Hieraus aber fließt

$$\delta = df\,(be - bc - de + cf),$$
$$\zeta = ce\,(ad - af - de + cf)$$

und hiernach lassen sich also alle Coefficienten bestimmen.

§. 84.

Sind auf diese Art alle Coefficienten der allgemeinen Gleichung, $0 = \alpha + \beta x + \gamma y + \delta x^2 + \varepsilon xy + \zeta y^2$ bestimmt, so kann man die durch diese Gleichung ausgedruckte Curve über der angenommenen Axe mit Beybehaltung des entstandenen Coordinaten-Winkels durch unzählige Punkte, die sich aus der Gleichung finden lassen, legen, und diese Curve wird zugleich durch die gegebenen Punkte gehen. Läßt die allgemeine Gleichung mehr Bestimmungen zu als Punkte gegeben sind, so kann man die übrigen nach Belieben annehmen, und darauf die einzelnen Punkte der

Curve

Curve aus der auf diese Art bestimmten Gleichung finden, und so die Curve beschreiben. Man muß aber hierbey der Abscisse nach und nach mehrere sowohl positive als negative Werthe, z. B. 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2c. und — 1, — 2, — 3, — 4, 2c. beylegen, und zu einem jeden dieser Werthe den zugehörigen Werth der Applicate y suchen. Auf diese Art findet man mehrere Punkte der Curve, die einander nahe genug liegen, um den Gang der Curve daraus zu erkennen.