Die Theorie der Gleichungen

Euler, Leonhard

Berlin, 1791

1. Gedanken über die Formen der Wurzeln einer jeden Gleichung, von Leonhard Euler. Aus dem sechsten Bande der Commentarien der St. Petersb. Akad. der Wissenschaften, vom Jahr 1738.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53259

I. Von den Gleichungen.

I. Gedanken über die Formen der Wurzeln einer jeden Gleichung.

Von

Leonhard Euler.

Aus dem sechsten Bande der Commentarien der St. Petersburgischen Akademie der Wissenschaften, vom Jahr 1738.

§. 1.

Es ist in der That zu bewundern, daß man noch keine allgemeine Regel zur Auflösung der Gleichungen hat. Kaum war die Analysis erfunden, als man auch schon die Entwickelung der cubischen und biquadratischen Gleichungen kannte; und wie sehr sind seit der Zeit die Grenzen der Analysis erweitert! was für Männer haben jenem Gegenstande ihre Zeit und ihren Fleiß gewidmet! Ob sie aber gleich ihren Endzweck nicht erreicht haben, so ist man doch ihren Bemühungen eine Menge der wichtigsten Hülfsmittel bey der Behandlung der Gleichungen schuldig. Daher befürchte auch ich keinen Tadel, wenn ich einige Gedanken über die Formen der Wurzeln einer jeden Gleichung und über die etwanigen Wege dieselben selbst zu entdecken, mittheile. Vielleicht werden dadurch andere in den Stand gesetzt, weiter zu gehen.

§. 2.

Da eine jede höhere Gleichung alle niedrigere Gleichungen in sich enthält, so ist leicht einzusehen, daß die Erfindung der Wurzeln irgend einer Gleichung die Erfindung der Wurzeln aller niedrigern Gleichungen erfordere. Will man daher die Wurzeln einer Gleichung vom sechsten Grade entwickeln, so ist dazu die Auflösung der Gleichungen vom fünften, vierten und dritten Grade nöthig. So führt auch die Bombellische Regel von der Auflösung der Gleichungen des vierten Grades auf die Auflösung der cubischen Gleichungen, und die Auflösung der cubischen Gleichungen geht ohne die Auflösung der quadratischen Gleichungen nicht von statten.

§. 3.

Die Abhängigkeit der Auflösung der cubischen Gleichungen von der quadratischen stelle ich mir auf folgende Art vor. Ich setze von jeder cubischen Gleichung

$$x^3 = ax + b,$$

in welcher das zweyte Glied fehlt, die Wurzel

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

und lasse A und B die beyden Wurzeln einer quadratischen Gleichung

$$z^2 = \alpha z - \beta$$

seyn.

seyn. Auf diese Art bekomme ich, wegen der Natur der Gleichungen,

$$A + B = \alpha, \text{ und } AB = \beta.$$

Um aber α und β aus a und b zu bestimmen, erhebe ich die Gleichung $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ zur dritten Potestät, wodurch

$$x^3 = A + B + 3\sqrt[3]{BA}(\sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}) = 3x\sqrt[3]{AB} + A + B$$

wird. Denn vergleicht man diese Gleichung mit $x^3 = ax + b$, so wird

$$a = 3\sqrt[3]{AB} = 3\sqrt[3]{\beta}, \text{ und } b = A + B = \alpha$$

und man bekommt folglich

$$\alpha = b, \text{ und } \beta = \tfrac{1}{27}a^3.$$

Auf diese Art ist die quadratische Gleichung, vermittelst welcher man auf die angezeigte Weise die cubische Gleichung $x^3 = ax + b$ auflösen kann,

$$z^2 = bz - \tfrac{1}{27}a^3.$$

Kennt man nemlich die Wurzeln dieser Gleichung, A und B, so ist

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}.$$

§. 4.

Man findet aber nach $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$ nicht bloß eine, sondern alle drey Wurzeln der Gleichung $x^3 = ax + b$. Denn bedeuten μ und ν die beyden cubischen Wurzeln von 1 außer 1, so ist auch

$$x = \mu\sqrt[3]{A} + \nu\sqrt[3]{B}$$

vorausgesetzt, daß $\mu\nu = 1$ ist. Es müssen daher die Werthe von μ und ν seyn $\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$ und $\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$ oder umgekehrt, und folglich thun außer

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$$

auch folgende Wurzeln

$$x = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} + \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$$

$$x = \frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{A} + \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}\sqrt[3]{B}$$

der gegebenen Gleichung ein Genüge. Nach dieser Methode lassen sich auch die Wurzeln solcher cubischen Gleichungen finden, worin das zweyte Glied nicht mangelt, indem man aus jeder Gleichung das zweyte Glied wegzuschaffen im Stande ist.

§. 5.

Die biquadratischen Gleichungen führt man auf mehr als eine Art auf cubische Gleichungen zurück, aber keine davon stimmt zu meiner jetzigen Absicht überein. Allein außer ihnen habe ich eine der bey den cubischen Gleichungen ähnliche Methode, so daß man daraus ohngefähr schließen kann, wie die höhern Gleichungen werden behandelt werden müssen. Ist nemlich die Gleichung

$$x^4 = ax^2 + bx + c$$

gegeben, worin ebenfalls das zweyte Glied fehlt: so behaupte ich, daß

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$$

und A, B, C die drey Wurzeln einer cubischen Gleichung

$$z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$$

seyen. Auf diese Art wird

$$\alpha = A + B + C$$
$$\beta = AB + AC + BC, \text{ und}$$
$$\gamma = ABC.$$

Um aber α, β und γ zu bestimmen, erhebe ich $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ zur zweyten Potestät, und leite aus

$x^2 =$

$$x^2 = A + B + C + 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC}$$
$$x^2 - \alpha = 2\sqrt{AB} + 2\sqrt{AC} + 2\sqrt{BC}$$

her. Ferner erhalte ich durch Erhebung dieser Gleichung zur zweyten Potestät

$$x^4 - 2\alpha x^2 + \alpha^2 = 4AB + 4AC + 4BC + 8\sqrt{ABC}(\sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C})$$

oder

$$x^4 = 2\alpha x^2 + 8x\sqrt{\gamma} + 4\beta - \alpha^2.$$

Nehme ich nun diese Gleichung mit $x^4 = ax^2 + bx + c$ zusammen, so finde ich

$$2\alpha = a;\ 8\sqrt{\gamma} = b;\ \text{und}\ 4\beta - \alpha^2 = c;$$

und daher wird

$$\alpha = \tfrac{1}{2}a;\ \gamma = \tfrac{1}{64}b^2;\ \beta = \tfrac{1}{4}c + \tfrac{1}{16}\alpha^2.$$

Dieses vorausgesetzt ist die cubische Gleichung, vermittelst welcher man die biquadratischen auflösen kann, folgende:

$$z^3 = \tfrac{1}{2}az^2 - \frac{4c - a^2}{16}z + \frac{b^2}{64}.$$

Denn nennt man die Wurzeln dieser Gleichung A, B und C, so wird

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$$

und die übrigen Wurzeln sind

$$x = \sqrt{A} - \sqrt{B} - \sqrt{C}$$
$$x = \sqrt{B} - \sqrt{A} - \sqrt{C}$$
$$x = \sqrt{C} - \sqrt{A} - \sqrt{B}$$

§. 6.

Setzt man $z = \sqrt{t}$, so wird

$$\left(t + \frac{4c + a^2}{16}\right)\sqrt{t} = \frac{at}{2} + \frac{b^2}{64}$$

und folglich, wenn man quadrirt,

$$t^3 + \frac{4c + a^2}{8}t^2 + \frac{(4c + a^2)^2}{256}t = \frac{a^2t^2}{4} + \frac{ab^2t}{64} + \frac{b^4}{4096}$$

oder

$$t^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})t^2 + (\frac{ab^2}{64} - \frac{c^2}{16} - \frac{a^2c}{32} - \frac{a^4}{256})t + \frac{b^4}{4096}.$$

Diese Gleichung hat daher die Eigenschaft, daß ihre Wurzeln Quadratwurzeln aus den Wurzeln der vorigen Gleichung, oder aus A, B und C sind. Nennt man also die Wurzeln derselben E, F und G, so wird

$$x = \sqrt[4]{E} + \sqrt[4]{F} + \sqrt[4]{G}$$

und es giebt folglich eine cubische Gleichung, wo die biquadratischen Wurzeln ihrer Wurzeln zusammen genommen die Wurzel der gegebenen biquadratischen ausmachen. Nun ist zwar dieser Weg, die Wurzeln einer biquadratischen Gleichung zu finden, beschwerlicher als der vorige, aber er stimmt dagegen mehr mit der Auflösung der cubischen Gleichungen überein, da dabey aus den Wurzeln der niedrigern Gleichung Wurzeln von eben dem Grade gezogen werden müssen, zu welchem die gegebene Gleichung gehört.

§. 7.

Auf ähnliche Art wird auch die quadratische Gleichung $x^2 = a$, worin das zweyte Glied fehlt, vermittelst der Gleichung $z = a$ vom ersten Grade aufgelöset. Es ist nemlich die Wurzel dieser letzten Gleichung $= a$, und die Wurzel der vorhergehenden $x = \sqrt{a}$, oder $x = -\sqrt{a}$. Ich nenne aber die um einen Grad niedrigere Gleichung, vermittelst welcher die höhere Gleichung, worin das zweyte Glied fehlt, aufgelöset wird, die resolvirende Gleichung. Auf diese Art hat die Gleichung $x^2 = a$ die resolvirende Gleichung $x = a$; die Gleichung $x^3 = ax + b$ dagegen folgende, $z^2 = bz - \frac{a^3}{27}$, und die Gleichung $x^4 = ax^2 + bx + c$ diese, $z^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})z^2 - (\frac{a^4}{256} + \frac{a^2c}{32} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab^2}{64})z + \frac{b^4}{4096}$. Denn wenn bey der quadratischen Gleichung die Wurzel der resolvirenden Gleichung $= A$ ist, so ist $x = \sqrt{A}$; sind bey der cubischen Gleichung die Wurzeln der resolvirenden Gleichung A und B, so wird $x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B}$; und sind bey der biquadratischen Gleichung die Wurzeln der resolvirenden Gleichung A, B und C, so ist $x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}$.

§. 8.

Ohnerachtet wir hier nicht mehr als drey Fälle haben, so scheint mir gleichwohl daraus nicht ohne Grund gefolgert werden zu können, daß auch die höhern Gleichungen ähnliche resolvirende Gleichungen haben. So muthmaße ich, daß der Gleichung

$$x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$$

eine Gleichung vom vierten Grade $z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$ zukommen werde, so daß, wenn die Wurzeln von dieser A, B, C und D genennt werden,

$$x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B} + \sqrt[5]{C} + \sqrt[5]{D}$$

sey. Ueberhaupt scheint mir jede Gleichung

$$x^n = ax^{n-2} + bx^{n-3} + cx^{n-4} + \text{ꝛc.}$$

eine resolvirende Gleichung von der Form

$$z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3} + \gamma z^{n-4} - \text{ꝛc.}$$

zu haben, aus deren $n - 1$ Wurzeln, wenn man sie kennte, und A, B, C, D, ꝛc. nennte,

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} + \text{ꝛc.}$$

werden würde. Wäre diese Muthmaßung gegründet, und könnte man in jedem Falle die resolvirende Gleichung angeben, so wäre es auch möglich, die Wurzeln einer jeden Gleichung zu entwickeln. Man würde nemlich allemal eine Gleichung von einem niedrigern Grade erhalten, und wenn man fortgienge, endlich die wahre Wurzel der gegebenen Gleichung kennen lernen.

§. 9.

Wenn die Gleichungen den vierten Grad übersteigen, so bin ich zwar noch nicht im Stande, die resolvirende Gleichung darzustellen, aber demungeachtet habe ich verschiedene nicht unwichtige Gründe, welche meine Muthmaßung zu bestätigen scheinen. Ist nemlich die Gleichung so beschaffen, daß in der resolvirenden Gleichung, außer den drey ersten Gliedern alle übrige verschwinden: so läßt sich die resolvirende Gleichung allemal angeben, und also auch die gegebene Gleichung selbst auflösen. Die hierher gehörigen Gleichungen sind eben die, welche Moivre in den Transactionen untersucht hat. Es sey die resolvirende Gleichung

$$z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3}, \text{ oder } z^2 = \alpha z - \beta$$

Um aus dieser resolvirenden Gleichung diejenige, welche dadurch aufgelöset werden soll, zu entwickeln, setze man ihre Wurzeln A und B, denn die übrigen verschwinden insgesammt. Alsdann ist die Wurzel der aufzulösenden Gleichung

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}.$$

Nun ist $\alpha = A + B$, und $\beta = AB$, wegen der Natur der Gleichungen; folglich

$$\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} = x^2 - 2\sqrt[n]{\beta}$$

ferner

$$\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} = x^3 - 3x\sqrt[n]{\beta}$$

$\sqrt[n]{A^4}$

$$\sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} = x^4 - 4x^2\sqrt[n]{\beta} + 2\sqrt[n]{\beta^2}$$
$$\sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} = x^5 - 5x^3\sqrt[n]{\beta} + 5x\sqrt[n]{\beta^2}$$

und überhaupt

$$\sqrt[n]{A^n} + \sqrt[n]{B^n} =$$
$$x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4}\sqrt[n]{\beta^2} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}x^{n-6}\sqrt[n]{\beta^3}$$
$$+ \frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}x^{n-8}\sqrt[n]{\beta^4} - \text{rc.} = \alpha.$$

Dieses ist die Gleichung, deren resolvirende Gleichung $z^{n-1} = \alpha z^{n-2} - \beta z^{n-3}$ oder $z^2 = \alpha z - \beta$ ist.

§. 10.

Man findet aber auf diese Art von der Gleichung

$$x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + \frac{n(n-3)}{1.2}x^{n-4}\sqrt[n]{\beta^2} - \text{rc.} = \alpha$$

nicht bloß die eine Wurzel $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$, sondern es thut derselben auch jede Wurzel von der Form $x = \mu\sqrt[n]{A} + \nu\sqrt[n]{B}$ ein Genüge, wofern $\mu^n = \nu^n = \mu\nu = 1$ ist, und dieses kann auf n verschiedene Arten seyn. Ist z. B. $n = 5$, so sind die fünf Wurzeln der Gleichung

$$x^5 - 5x^3\sqrt[5]{\beta} + 5x\sqrt[5]{\beta^2} = \alpha$$

folgende:

I. $x = \sqrt[5]{A} + \sqrt[5]{B}$

II. $x = \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} +$
$\frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$

III.

$$\text{III. } x = \frac{-1-\sqrt{5}-\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} + \frac{-1-\sqrt{5}+\sqrt{(-10+2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$$

$$\text{IV. } x = \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} + \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$$

$$\text{V. } x = \frac{-1+\sqrt{5}-\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{A} + \frac{-1+\sqrt{5}+\sqrt{(-10-2\sqrt{5})}}{4}\sqrt[5]{B}$$

denn es sind diese Coefficienten lauter fünfte Wurzeln aus 1, und das Produkt aus je zweyen ist $= 1$. Auf ähnliche Art giebt es außer der Einheit sechs sechste Wurzeln von 1, und unter ihnen drey Paare, welche mit einander multiplicirt zum Produkte 1 geben. Diese Wurzeln sind die Wurzeln der Gleichung

$$y^6 + y^5 + y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 = 0.$$

Um sie zu finden bedarf es bloß der Auflösung einer cubischen Gleichung, weil eine jede Gleichung vom sechsten Grade von der Form

$$y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0,$$

welche unverändert bleibt, wenn man $\frac{1}{y}$ statt y setzt, vermittelst einer cubischen Gleichung aufgelöset werden kann. Da dieser Weg bey der Erfindung der Wurzeln öfters mit Vortheil betreten werden kann, so will ich denselben kürzlich beschreiben.

§. II.

§. 11.

Ich nenne aber solche Gleichungen, die durch die Substitution von $\frac{1}{y}$ für y nicht verändert werden, reciproke Gleichungen. Wenn darin die höchste Potestät von y eine ungerade Potestät ist, so lassen sie sich allemal durch $y + 1$ dividiren, und die dadurch entstehende Gleichung ist eine reciproke Gleichung von einem um eins niedrigern Grade. Es ist daher hinlänglich, bloß die reciproken Gleichungen der geraden Dimensionen zu untersuchen, und die Art ihrer Auflösung zu erklären. Es sey also zuvörderst diese Gleichung vom vierten Grade

$$y^4 + ay^3 + by^2 + ay + 1 = 0$$

gegeben. Betrachtet man dieselbe als ein Produkt aus folgenden beyden quadratischen Gleichungen

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0; \text{ und } y^2 + \beta y + 1 = 0$$

so wird

$$\alpha + \beta = a; \text{ und } \alpha\beta + 2 = b \text{ oder } \alpha\beta = b - 2.$$

Demnach sind α und β die beyden Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$u^2 - au + b - 2 = 0$$

und man findet die vier Wurzeln der gegebenen Gleichung durch die Auflösung quadratischer Gleichungen. Was die Gleichung vom sechsten Grade

$$y^6 + ay^5 + by^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$$

betrifft: so setze man dieselbe dem Produkte aus folgenden drey quadratischen Gleichungen gleich:

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0$$
$$y^2 + \beta y + 1 = 0$$
$$y^2 + \gamma y + 1 = 0.$$

Ist dieses geschehen, so wird

$$\alpha + \beta + \gamma = a; \quad \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = b - 3,$$

und

und

$$\alpha\beta\gamma = c - 2\alpha - 2\beta - 2\gamma = c - 2a.$$

Demnach sind α, β und γ die drey Wurzeln der cubischen Gleichung

$$u^3 - au^2 + (b - 3)u - c + 2a = 0.$$

Auf ähnliche Art läßt sich die reciproke Gleichung vom achten Grade

$$y^8 + ay^7 + by^6 + cy^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$$

als ein Produkt aus folgenden vier quadratischen Gleichungen betrachten

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0$$
$$y^2 + \beta y + 1 = 0$$
$$y^2 + \gamma y + 1 = 0$$
$$y^2 + \delta y + 1 = 0,$$

und daraus fließt,

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = a$$
$$\alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta = b - 4$$
$$\alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \alpha\gamma\delta + \beta\gamma\delta = c - 3a$$
$$\alpha\beta\gamma\delta = d - 2b + 2$$

Hiernach sind die Coefficienten α, β, γ, δ die vier Wurzeln folgender biquadratischen Gleichung

$$u^4 - au^3 + (b - 4)u^2 - (c - 3a)u + d - 2b + 2 = 0.$$

Setzt man ferner die Gleichung vom zehnten Grade

$$y^{10} + ay^9 + by^8 + cy^7 + dy^6 + ey^5 + dy^4 + cy^3 + by^2 + ay + 1 = 0$$

dem Produkte aus folgenden fünf quadratischen Gleichungen gleich

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0$$
$$y^2 + \beta y + 1 = 0$$
$$y^2 + \gamma y + 1 = 0$$
$$y^2 + \delta y + 1 = 0$$
$$y^2 + \varepsilon y + 1 = 0;$$ so werden

$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$ die fünf Wurzeln der Gleichung

$$u^5 - au^4 + (b - 5)u^3 - (c - 4a)u^2 + (d - 3b + 5)u$$
$$- e + 2c - 2a = 0$$

Ueberhaupt läßt sich die reciproke Gleichung

$$y^{2n} + ay^{2n-1} + by^{2n-2} + cy^{2n-3} + dy^{2n-4} + ey^{2n-5}$$
$$+ fy^{2n-6} + \ldots\ldots + py^n + \ldots\ldots + fy^6 + ey^5$$
$$+ dy^4 + by^2 + ay + 1 = 0$$

als aus n quadratischen Gleichungen von folgenden Formen betrachten

$$y^2 + \alpha y + 1 = 0$$
$$y^2 + \beta y + 1 = 0$$
$$y^2 + \gamma y + 1 = 0$$
$$y^2 + \delta y + 1 = 0$$
ꝛc.

und die Coefficienten $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. sind dann die Wurzeln folgender Gleichung vom nten Grade:

$$u^n - au^{n-1} + \left.\begin{matrix} b \\ - n \end{matrix}\right\} u^{n-2} \quad \left.\begin{matrix} - c \\ - (n-1)a \end{matrix}\right\} u^{n-3}$$

$$\left.\begin{matrix} + d \\ - (n-2)b \\ + \dfrac{n(n-3)}{1.2} \end{matrix}\right\} u^{n-4} \quad \left.\begin{matrix} - e \\ + (n-3)c \\ - \dfrac{(n-1)(n-4)a}{1.2} \end{matrix}\right\} u^{n-5}$$

$$\left.\begin{matrix} + f \\ - (n-4)d \\ + \dfrac{(n-2)(n-5)}{1.2}b \\ - \dfrac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3} \end{matrix}\right\} u^{n-6} \quad \left.\begin{matrix} - g \\ + (n-5)e \\ - \dfrac{(n-3)(n-6)}{1.2}c \\ + \dfrac{n(n-1)(n-5)(n-6)}{1.2.3}a \end{matrix}\right\} u^{n-7}$$

+ h

$$\left.\begin{array}{r} + h \\ -(n-6)f \\ + \dfrac{(n-4)(n-7)}{1 \cdot 2}d \\ - \dfrac{(n-2)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b \\ + \dfrac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \end{array}\right\} u^{n-8} - \text{ꝛc.}$$

§. 12.

Da eine jede von den quadratischen Gleichungen, aus welchen man die gegebene Gleichung bestehen läßt, zum letzten Gliede 1 hat: so erhellet, daß das Produkt aus je zweyen Wurzeln der gegebenen Gleichung $= 1$ ist. Diese beyden Wurzeln muß man nun mit den beyden Gliedern $\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B}$ verbinden, wenn man alle Wurzeln der §. 9. untersuchten Gleichung haben will.

§. 13.

Wenn in der reciproken Gleichung außer den äußersten und dem mittelsten Gliede alle übrige fehlen, wie z. B. in $y^{2n} + py^n + 1 = 0$, so bekommt man die Divisoren $y^2 + \alpha y + 1$; $y^2 + \beta y + 1$; $y^2 + \gamma y + 1$; ꝛc. wenn man für α, β, γ, δ, ꝛc. die Wurzeln folgender Gleichung setzt,

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2}u^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1 \cdot 2 \cdot 3}u^{n-6} \text{ ꝛc.}$$
$$\pm p = 0$$

und zwar $+ p$, wenn n eine gerade, $- p$ aber, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet. Man sieht hieraus, daß diese Gleichung mit der §. 9. oder $x^n - nx^{n-2}\sqrt[n]{\beta} + \text{ꝛc.} = \alpha$ übereinstimmt, und daß also daraus alle Divisoren angegeben werden können.

§. 14

§. 14.

Die Auflösung der Formel $y^{2n} + py^n + 1$ in Faktoren leistet großen Vortheil bey der Integration der Differenzialformel $\frac{dy}{y^{2n} + py^n + 1}$, womit sich die Geometer häufig beschäftiget haben. Denn hat man den Nenner in seine Faktoren $y^2 + \alpha y + 1$; $y^2 + \beta y + 1$; ꝛc. aufgelöset, so wird dadurch die Integration auf die Quadratur des Cirkels oder der Hyperbel zurückgeführt. Auch ist der Umstand vortheilhaft, daß die Gleichung

$$u^n - nu^{n-2} + \frac{n(n-3)}{1 \cdot 2} u^{n-4} - \text{ꝛc.} \pm p = 0$$

die Theilung eines Kreisbogens in n Theile enthält, wodurch die Coefficienten α, β, γ, ꝛc. sehr leicht bestimmt werden können.

§. 15.

Um zur Methode zurück zu kehren, aus den resolvirenden Gleichungen die aufzulösenden Gleichungen zu finden, so sey die resolvirende Gleichung

$$z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$$

und die drey Wurzeln derselben A, B, C; folglich

$$\alpha = A + B + C$$
$$\beta = AB + AC + BC, \text{ und}$$
$$\gamma = ABC.$$

Auf diese Art ist die Wurzel der aufzulösenden Gleichung

$$x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C}.$$

Nun sey

$$p = \sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{BC}$$

so wird

$$\sqrt[n]{A^2} + \sqrt[n]{B^2} + \sqrt[n]{C^2} = x^2 - 2p$$

$$\sqrt[n]{A^2B^2} + \sqrt[n]{A^2C^2} + \sqrt[n]{B^2C^2} = p^2 - 2x\sqrt[n]{\gamma}.$$

Ferner

$$\sqrt[n]{A^3} + \sqrt[n]{B^3} + \sqrt[n]{C^3} = x^3 - 3px + 3\sqrt[n]{\gamma}$$

$$\sqrt[n]{A^3B^3} + \sqrt[n]{A^3C^3} + \sqrt[n]{B^3C^3} = p^3 - 3px\sqrt[n]{\gamma} + 3\sqrt[n]{\gamma^2}$$

$$\sqrt[n]{A^4} + \sqrt[n]{B^4} + \sqrt[n]{C^4} = x^4 - 4px + 4x\sqrt[n]{\gamma} + 2p^2$$

$$\sqrt[n]{A^4B^4} + \sqrt[n]{A^4C^4} + \sqrt[n]{B^4C^4} = p^4 - 4p^2\sqrt[n]{\gamma} + 4p\sqrt[n]{\gamma^2} + 2x^2\sqrt[n]{\gamma^2}$$

$$\sqrt[n]{A^5} + \sqrt[n]{B^5} + \sqrt[n]{C^5} = x^5 - 5px^3 + 5x^2\sqrt[n]{\gamma} + 5p^2x - 5p\sqrt[n]{\gamma}$$

$$\sqrt[n]{A^5B^5} + \sqrt[n]{A^5C^5} + \sqrt[n]{B^5C^5} = p^5 - 5p^3x\sqrt[n]{\gamma} + 5p^2\sqrt[n]{\gamma^2} + 5px^2\sqrt[n]{\gamma^2} - 5x\sqrt[n]{\gamma^3}.$$

Die Art und Weise, diese Tabelle fortzusetzen, ist leicht zu erkennen. Es ist nemlich

$$\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} + \sqrt[n]{C^m}$$
$$=$$
$$x(\sqrt[n]{A^{m-1}} + \sqrt[n]{B^{m-1}} + \sqrt[n]{C^{m-1}})$$
$$- \ p(\sqrt[n]{A^{m-2}} + \sqrt[n]{B^{m-2}} + \sqrt[n]{C^{m-2}})$$
$$+ \ \sqrt[n]{\gamma}(\sqrt[n]{A^{m-3}} + \sqrt[n]{B^{m-3}} + \sqrt[n]{C^{m-3}})$$

und

$$\sqrt[n]{A^mB^m} + \sqrt[n]{A^mC^m} + \sqrt[n]{B^mC^m}$$
$$=$$
$$p(\sqrt[n]{A^{m-1}B^{m-1}} + \sqrt[n]{A^{m-1}C^{m-1}} + \sqrt[n]{B^{m-1}C^{m-1}}$$

—

$$-\sqrt[n]{\gamma}\left(\sqrt[n]{A^{m-2}B^{m-2}} + \sqrt[n]{A^{m-2}C^{m-2}} + \sqrt[n]{B^{m-2}C^{m-2}}\right)$$
$$+\sqrt[n]{\gamma^2}\left(\sqrt[n]{A^{m-3}B^{m-3}} + \sqrt[n]{A^{m-3}C^{m-3}} + \sqrt[n]{B^{m-3}C^{m-3}}\right)$$

§. 16.

Diese Reihen haben noch andere merkwürdige Eigenschaften. Denn setzt man

$$\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} + \sqrt[n]{C^m} = R, \text{ und}$$
$$\sqrt[n]{A^mB^m} + \sqrt[n]{A^mC^m} + \sqrt[n]{B^mC^m} = S;$$

so wird

$$\sqrt[n]{A^{2m}} + \sqrt[n]{B^{2m}} + \sqrt[n]{C^{2m}} = R^2 - 2S, \text{ und}$$
$$\sqrt[n]{A^{2m}B^{2m}} + \sqrt[n]{A^{2m}C^{2m}} + \sqrt[n]{B^{2m}C^{2m}} = S^2 - 2R\sqrt[n]{\gamma^m}.$$

Auf ähnliche Art ist auch

$$\sqrt[n]{A^{3m}} + \sqrt[n]{B^{3m}} + \sqrt[n]{C^{3m}} = R^3 - 3RS + 3\sqrt[n]{\gamma^m},$$

und

$$\sqrt[n]{A^{3m}B^{3m}} + \sqrt[n]{A^{3m}C^{3m}} + \sqrt[n]{B^{3m}C^{3m}} = S^3 - 3RS\sqrt[n]{\gamma^m} + 3\sqrt[n]{\gamma^{2m}},$$

und es geht also diese Reihe völlig auf eben die Art fort, als die vorhergehende.

§. 17.

Wenn $n = 2$ ist: so wird $\alpha = x^2 - 2p$, und $\beta = p^2 - 2x\sqrt{\gamma}$. Nimmt man diese beyde Gleichungen zusammen, so wird

$$x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}, \text{ und}$$
$$p = \sqrt{AB} + \sqrt{AC} + \sqrt{BC}$$

und A, B, C sind die drey Wurzeln der cubischen Gleichung

$z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$. Schafft man daher aus jenen beyden Gleichungen die Größe p weg, so wird

$$\left(\frac{x^2 - \alpha}{2}\right)^2 - 2x\sqrt{\gamma} = \beta, \text{ oder}$$

$$x^4 - 2\alpha x^2 - 8x\sqrt{\gamma} = 4\beta - \alpha^2$$

und die Wurzel dieser Gleichung ist bekannt, indem $x = \sqrt{A} + \sqrt{B} + \sqrt{C}$ ist. Kommen zwey Gleichungen von folgender Art vor

$$x^3 - 3px + 3\sqrt[3]{\gamma} = \alpha, \text{ und}$$

$$p^3 - 3px\sqrt[3]{\gamma} + 3\sqrt[3]{\gamma^2} = \beta\text{: so wird}$$

$$x = \sqrt[3]{A} + \sqrt[3]{B} + \sqrt[3]{C}, \text{ und}$$

$$p = \sqrt[3]{AB} + \sqrt[3]{AC} + \sqrt[3]{BC}$$

so daß A, B und C die drey Wurzeln der cubischen Gleichung $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$ sind, wie vorhin. Man kann aber auch den Buchstaben p wegschaffen, und dadurch eine Gleichung zwischen x, α, β und γ finden, deren Wurzeln bekannt sind. Völlig auf dieselbe Art erhält man, wenn folgende zwey Gleichungen vorkommen

$$x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt[4]{\gamma} + 2p^2 = \alpha, \text{ und}$$

$$p^4 - 4p^2x\sqrt[4]{\gamma} + 4p\sqrt{\gamma} + 2x^2\sqrt{\gamma} = \beta$$

diese Bestimmungen

$$x = \sqrt[4]{A} + \sqrt[4]{B} + \sqrt[4]{C}, \text{ und}$$

$$p = \sqrt[4]{AB} + \sqrt[4]{AC} + \sqrt[4]{BC}$$

und es sind auch hier wieder A, B und C die Wurzeln der Gleichung $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma = a$. Um p auf eine leichtere Art wegzuschaffen, setze man

$$x^2 - 2p = R; \text{ und } p^2 - 2x\sqrt[4]{\gamma} = S$$

so

so wird

$$R^2 - 2S = \alpha \text{ und } S^2 - 2R\sqrt{\gamma} = \beta.$$

Hierdurch bekommt man aus jenen beyden Gleichungen nach Wegschaffung des Buchstabens p,

$$x^4 = 2Rx^2 + 8x\sqrt[4]{\gamma} + 4S - R^2$$

und vergleicht man diese Gleichung mit

$$x^4 = ax^2 + bx + c: \text{ so wird}$$

$$R = \frac{a}{2};\ \sqrt[4]{\gamma} = \frac{b}{8}, \text{ oder } \gamma = \frac{b^4}{4096}$$

$$\text{und } S = \frac{c}{4} + \frac{a^2}{16}.$$

Da man auf diese Art

$$\alpha = \frac{a^2}{8} - \frac{c}{2}, \text{ und } \beta = \frac{c^2}{16} + \frac{a^2c}{32} + \frac{a^4}{256} - \frac{ab^2}{64}$$

bekömmt: so werden A, B und C die drey Wurzeln der Gleichung

$$x^3 = (\frac{a^2}{8} - \frac{c}{2})z^2 - (\frac{a^4}{256} + \frac{a^2c}{32} + \frac{c^2}{16} - \frac{ab^2}{64})z + \frac{b^4}{4096}$$

und dieses stimmt mit dem aufs genaueste überein, was wir oben §. 7. gefunden haben.

§. 18.

So oft sich daher bey der Rechnung zwey Gleichungen ergeben, welche die unbekannten Größen z und p enthalten und unter die §. 15. gefundenen Formen gehören: so oft ist man im Stande, den Werth von beyden anzugeben, die eine eliminirte Gleichung mag so zusammengesetzt seyn, als sie will. In diesen Fällen ist es daher besser, daß man anstatt Eine Gleichung zu suchen, zwey, die beyden unbekannten Größen enthaltende Gleichungen beybehält, und untersucht, ob sie unter jenen Formen begriffen sind. Wenn man den Calcul gehörig anstellt, so findet solches öfters statt.

§. 19.

So wie wir die resolvirenden Gleichungen $z^2 = \alpha z - \beta$, und $z^3 = \alpha z^2 - \beta z + \gamma$ behandelt haben, so kann man auch die Gleichung

$$z^4 = \alpha z^3 - \beta z^2 + \gamma z - \delta$$

behandeln. Läßt man nemlich die Wurzeln dieser Gleichung A, B, C und D seyn, und setzt man

$$\sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D} = x$$

$$\sqrt[n]{AB} + \sqrt[n]{AC} + \sqrt[n]{AD} + \sqrt[n]{BC} + \sqrt[n]{BD} + \sqrt[n]{CD} = p$$

und

$$\sqrt[n]{ABC} + \sqrt[n]{ABD} + \sqrt[n]{ACD} + \sqrt[n]{BCD} = q$$

und sucht daraus Ausdrücke für $\sqrt[n]{A^m} + \sqrt[n]{B^m} +$ ꝛc., desgleichen für $\sqrt[n]{A^m B^m} + \sqrt[n]{A^m C^m} +$ ꝛc.: so findet man allemal je drey Gleichungen, welche x, p und q für jeden Werth von m enthalten. Da diese drey Gleichungen auf ähnliche Art sich darstellen, so bekommt man dadurch jene drey unbekannte Größen.

§. 20.

Ich glaube aber, daß sich, wenn man $x = \sqrt[n]{A} + \sqrt[n]{B} + \sqrt[n]{C} + \sqrt[n]{D}$ setzt, eine rationale Gleichung werde finden lassen, in welcher x die fünfte Potestät nicht übersteigt, ohnerachtet solches fast nicht möglich zu seyn scheint. Denn so wie wir §. 17. aus den Gleichungen

$$x^4 - 4px^2 + 4x\sqrt[4]{\gamma} + 2p^2 = \alpha, \text{ und}$$

$$p^4 - 4p^2x\sqrt[4]{\gamma} + 4p\sqrt{\gamma} + 2x^2\sqrt{\gamma} = \beta$$

durch die Wegschaffung der Größe p eine Gleichung von nicht mehr als 4 Dimensionen fanden: so ist es vielleicht

durch

durch einen ähnlichen Kunstgriff möglich, daß man die Auflösung der Gleichung des fünften Grades $x^5 = ax^3 + bx^2 + cx + d$ endlich entdecke. Ein sehr wichtiger Umstand ist dabey, daß man, wie ich glaube, bloß α, β, γ und δ aus a, b, c und d zu bestimmen nöthig haben wird, und nicht auch diese Buchstaben aus jenen; denn in diesem Falle würde die Gleichung zu einem höhern Grade aufsteigen. Ich überlasse aber dieses Geschäfte andern, oder verschiebe es wenigstens auf eine andere Zeit, indem ich mich für jetzt damit begnüge, daß ich vielleicht durch das Bisherige auf den rechten Weg geleitet habe.
