Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Sechstes Capitel. Von den Arten der Linien der zweyten Ordnung.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Sechstes Capitel.

Von den Arten der Linien der zweyten Ordnung.

§. 131.

Die Eigenschaften, welche wir in dem vorhergehenden Capitel gefunden haben, kommen allen Linien der zweyten Ordnung ohne Ausnahme zu; denn wir haben dabey auf nichts gesehen, wodurch ein Unterschied unter diesen Linien entspringen könnte. Es sind aber die Linien der zweyten Ordnung, dieser allgemeinen Eigenschaften ungeachtet, in Ansehung ihrer Gestalt, sehr von einander unterschieden; und wir müssen daher die Arten derselben aufsuchen, um die mancherley Gestalten der Linien der zweyten Ordnung kennen zu lernen, und die besondern Eigenschaften einer jeden Art entdecken zu können.

§. 132.

Wir haben [§. 109] die allgemeine Gleichung für die Linien der zweyten Ordnung durch bloße Veränderung der Axe und des Anfangspunkts der Abscissen in die Gleichung $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ verwandelt, worin x nnd y rechtwinklige Coordinaten bedeuten. Da diese Gleichung für jedes x ein doppeltes y, beyde von gleicher Größe, aber das eine negativ und das andere positiv, giebt: so theilet die Axe, worauf hier die Abscissen genommen werden, die Curve in zwey gleiche und ähnliche Theile; und es ist daher diese Axe ein rechtwinkliger Durchmesser der Curve und jede Linie der zweyten Ordnung hat einen rechtwinkligen Durchmesser, und ein solcher Durchmesser soll bey der folgenden Untersuchung die Axe seyn.

§. 133.

In der Gleichung, welche wir hier zum Grunde legen, sind drey beständige Größen, α, β, und γ enthalten; und da dieselben auf unzählige Arten unter sich verändert werden können, so entstehen daher auch unendlich viele Verschiedenheiten in den Linien der zweyten Ordnung, die aber auf ihre Gestalt nicht immer gleichen Einfluß haben. Denn einmal kann man eine und dieselbe Figur, so vielmal als man will, aus der Gleichung $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ erhalten, wenn man nemlich den Anfangspunkt der Abscissen in der Axe verändert, oder x um eine gegebene Größe vermehrt oder vermindert. Ferner begreift diese Gleichung auch eine und dieselbe Figur in verschiedener Größe unter sich, so daß daher eine unendliche Anzahl von krummen Linien entsteht, die sich bloß durch die Größe von einander unterscheiden, wie Kreise, die mit verschiedenen beschrieben sind. Hieraus erhellet, daß nicht jede Verschiedenheit der Größen, α, β und γ zu einem Eintheilungsgrunde der Linien der zweyten Ordnung gebraucht werden kann.

§. 134.

Der größte Unterschied der krummen Linien, die unter der Gleichung $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ begriffen sind, beruht auf der Beschaffenheit des Coefficienten γ, je nachdem derselbe positiv oder negativ ist. Denn ist er positiv, so ist auch $\alpha + \beta x + \gamma xx$, wenn $x = \pm \infty$ gesetzt wird, positiv, weil alsdann $\alpha + \beta x$ gegen γxx verschwindet, und folglich für $x = \pm \infty$ auch $y = \pm \infty$ wird. Wenn also γ positiv ist,

ist, so hat die Curve vier ohne Ende fortlaufende Schenkel, davon zwey zu $x = + \infty$, und zwey zu $x = - \infty$ gehören. Dergleichen krumme Linien machen daher Eine Art der Linien der zweyten Ordnung aus, und werden Hyperbeln genannt.

§. 135.

Wenn aber γ negativ ist, so wird, es mag $x = + \infty$ oder $= - \infty$ genommen werden, $\alpha + \beta x + \gamma xx$ negativ, und folglich die Applicate y imaginär. Bey diesen krummen Linien kann also weder die Abscisse noch die Applicate unendlich werden, und es giebt daher bey ihnen keine ohne Ende fortlaufende Schenkel, sondern die ganze Curve ist in einem endlichen und bestimmten Raume enthalten. Diese Art der Linien der zweyten Ordnung nennt man Ellipsen, und ihre Natur wird durch die Gleichung $\alpha + \beta x + \gamma xx$ bestimmt, wenn γ eine negative Größe ist.

§. 136.

Da der Werth von γ, je nachdem derselbe positiv oder negativ ist, einen solchen Einfluß auf die Beschaffenheit der Linien der zweyten Ordnung hat, daß daher zwey ganz von einander verschiedene Arten entstehen: so wird auch die aus $yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$ entspringende Curve, wenn $\gamma = 0$ gesetzt wird, und also einen zwischen dem positiven und dem negativen mitten inne liegenden Werth bekommt, eine Mittelgattung zwischen der Hyperbel und der Ellipse seyn. Man nennt sie Parabel, und ihre Natur wird also durch die Gleichung $yy = \alpha + \beta x$ bestimmt. Hier ist es gleich, ob β eine positive oder eine negative Größe bedeutet; denn die krumme Linie bleibt dieselbe, wenn man auch x negativ nimmt. Wird nun β positiv genommen, so fällt in die Augen, daß die Applicate y, für $x = + \infty$, $= \pm \infty$, für $x = - \infty$ aber imaginär ist. Es hat also die Parabel zwey ohne Ende fortlaufende Schenkel, aber nicht mehrere.

§. 137.

Wir haben also drey wesentlich von einander verschiedene Arten von Linien der zweyten Ordnung, und zwar in Ansehung der ohne Ende fortlaufenden Schenkel. Die Ellipse hat dergleichen gar nicht, sondern ist in einem endlichen Raume enthalten. Die Parabel hat deren zwey, und die Hyperbel viere. Da wir nun in dem vorhergehenden Capitel die allgemeinen Eigenschaften der Kegelschnitte betrachtet haben, so wollen wir jetzt die besondern Eigenschaften einer jeden Art kennen zu lernen suchen.

§. 138.

Wir wollen von der Ellipse anfangen, deren Gleichung $yy = \alpha + \beta x - \gamma xx$ ist, so daß die Abscissen auf einem rechtwinkligen Durchmesser genommen werden. Entfernt man aber den Anfangspunkt der Abscissen, da man denselben annehmen kann, wo man will, um $\frac{\beta}{2\gamma}$; so bekommt man daraus die Gleichung $yy = \alpha - \gamma xx$, wo der Anfangspunkt der Abscissen in den Mittelpunkt der Figur fällt. [§ 109. 110] Nun sey, Fig. 31, C der Mittelpunkt, und AB ein rechtwinkliger Durchmesser, so ist $CP = x$, und $PM = y$. Es wird also $y = 0$, wenn man $x = \pm \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ nimmt, und wenn x diese Grenzen $+\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$, $-\sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ überschreitet, so wird y imaginär, woraus erhellet, daß die

ganze

ganze Curve zwischen diesen Grenzen liegt. Es ist folglich

$CA = CB = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$; $CD = CE = y$ für $x = 0 = \sqrt{\alpha}$.

Man setze $CA = CB = a$, und die halbe zugehörige Axe $CD = CE = b$, so ist $\alpha = bb$, und $\gamma = \frac{bb}{aa}$, und dies giebt für die Ellipse die Gleichung

$$yy = bb - \frac{bbxx}{aa} = \frac{bb}{aa}(aa - xx).$$

§. 139.

Wenn die zu einander gehörigen Halbaxen a und b einander gleich werden, so verwandelt sich die Ellipse, weil alsdann $yy = aa - xx$, oder $yy + xx = aa$, in einen Kreis. Es wird nemlich in diesem Falle $CM = \sqrt{(xx + yy)} = a$, so daß alle Punkte der krummen Linie M von dem Mittelpunkte gleich weit abstehen, und dies ist die Eigenschaft des Kreises. Wenn aber a und b ungleich sind, so wird die Curve länglich, weil alsdann entweder AB größer als DE, oder DE größer als AB ist. Da indeß die zu einander gehörigen Axen AB und DE mit einander verwechselt werden können, und es gleichviel ist, auf welcher man die Absciſſen nehmen will, so mag AB die größere Axe, oder a größer als b seyn. Nimmt man auf dieser Axe $CF = CG = \sqrt{(aa - bb)}$, so werden F und G die Brennpunkte der Ellipse, und der halbe Parameter derselben, oder die in einem von den Brennpunkten senkrecht errichtete Applicate $= \frac{bb}{a}$ [§. 128. 129.]

§. 140.

Zieht man nach irgend einem Punkte der Curve M aus den beyden Brennpunkten die geraden Linien FM und GM,

 so

so ist, aus [§. 128,] $FM = AC - \frac{CF.CP}{AC} = a - \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$, und $GM = a + \frac{x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$ folglich $FM + GM = 2a$. Wenn man also aus beyden Brennpunkten einer Ellipse nach einem Punkte ihres Umfangs M zwey gerade Linien FM und GM zieht, so ist die Summe derselben allezeit der größern Axe $AB = 2a$ gleich. Dies ist eine Haupteigenschaft der Ellipse, und man kann daraus zugleich eine leichte mechanische Beschreibungsart derselben herleiten.

§. 141.

Legt man durch M die Tangente TMt, und verlängert sie, bis sie die Axen in T und t schneidet, so ist, aus §. 118

$$CP : CA = CA : CT; \text{ folglich } CT = \frac{aa}{x};$$

und auf eine ähnliche Art, wenn man die Coordinaten verwechselt,

$$Ct = \frac{bb}{y}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$TP = \frac{aa}{x} - x; \quad TF = \frac{aa}{x} - \sqrt{(aa - bb)} \text{ und}$$

$$TA = \frac{aa}{x} - a;$$

und es ist also

$$TP = \frac{aa - xx}{x} = \frac{aayy}{bbx}, \left[\text{weil } aa - xx = \frac{aayy}{bb} \text{ §. 138}\right]$$

$$TM \left[= \sqrt{(PM^2 + TP^2)}\right] = \frac{y\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}{bbx}; \text{ ferner}$$

$$\text{tang. } CTM = \frac{bbx}{aay}, \quad \text{sin. } CTM = \frac{bbx}{\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}, \text{ und}$$

cos.

$\cos. CTM = \frac{aay}{\sqrt{(b^4xx + a^4yy)}}$; [weil $\tan g. CTM = \frac{PM}{TP}$, $\sin. CTM = \frac{PM}{TM}$, und $\cos. CTM = \frac{TP}{TM}$ ist]. Wenn man daher aus A die Linie AV senkrecht auf die Axe errichtet, und in diesem Falle ist AV zugleich eine Tangente der Curve [§. 129]; so ist

$$AV [= AT. \tan g. CTM] = \frac{a(a-x)}{x} \cdot \frac{bbx}{aay} = \frac{bb(a-x)}{ay} =$$

$b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, weil $ay = b\sqrt{(aa-xx)} = b\sqrt{(a-x)(a+x)}$ ist §. 138.

§. 142.

Da $TF = \frac{aa - x\sqrt{(aa-bb)}}{x}$, §. 141, und $FM = \frac{aa - x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$, §. 140; so ist

$$TF : FM = a : x.$$

Eben so ist $GT [= CT + CG] = \frac{aa + x\sqrt{(aa-bb)}}{x}$ §. 141. 139. und $GM = \frac{aa + x\sqrt{(aa-bb)}}{a}$ §. 140; also auch

$$GT : GM = a : x;$$

und folglich

$$TF : FM = GT : GM.$$

Es ist aber

$$TF : FM = \sin. FMT : \sin. CTM, \text{ und}$$
$$GT : GM = \sin. GMt : \sin. CTM; \text{ folglich}$$
$$\sin. FMT = \sin. GMt, \text{ und also auch } FMT = GMt.$$

Wenn man daher aus den beyden Brennpunkten einer Ellipse nach irgend einem Punkte M ihres Umfangs zwey gerade Linien zieht, so sind diese Linien gegen die durch M gelegte Tangente unter gleichen Winkeln geneigt, und dies ist die Haupteigenschaft der Brennpunkte.

§. 143.

Da $GT : GM = a : x$, §. 142, und $CT = \frac{aa}{x}$, §. 141, so ist auch

$CT : CA = a : x$, und also $GT : GM = CT : CA$. Zieht man daher aus C die gerade Linie CS, welche der Tangente in S begegnet, mit GM parallel, so ist $CS = CA = a$, und eben so die Linie, die aus C parallel mit FM bis zur Tangente gezogen wird, $= CA = a$, [weil auch $FT : FM = GT : GM = a : x = CT : CA$ ist]. Da ferner $TM = \frac{y}{bbx} \sqrt{(b^4xx - a^4yy)}$ [§. 141], und $aayy = aabb - bbxx$ ist, [§. 138,] so ist

$$TM = \frac{y}{bx} \sqrt{(a^4 - xx(aa - bb))};$$

und da $FT.GT = \frac{(a^4 - xx\sqrt{aa - bb})}{xx}$, §. 142, auch

$$TM = \frac{y}{b} \sqrt{FT.GT}.$$

Hieraus ergiebt sich, da $TG : TC = TM : TS$, und also $TS = \frac{TC.TM}{TG}$ ist,

$$TS = \frac{y.CT}{b} \sqrt{\frac{FT}{GT}} = \frac{y.CT.FT}{b\sqrt{FT.GT}} = \frac{yy.CT.FT}{bb.TM};$$

und da $PT = \frac{aayy}{bbx} = \frac{CT.yy}{bb}$ ist, [§. 141,] so wird

$$TS = \frac{PT.FT}{TM}, \text{ und also}$$

$TM : PT = FT : TS$, und die Dreyecke TMP und TFS einander ähnlich, und folglich $FST = R$.

§. 144.

§. 144.

Wenn also aus dem einen Brennpunkte F nach der Tangente eine senkrechte Linie FS gezogen, und der Punkt S mit dem Mittelpunkte C durch eine gerade Linie verknüpft wird: so ist diese gerade Linie CS allezeit der halben großen Axe $AC = a$ gleich. Da ferner $TM : y = TF : FS$, so ist $FS = \frac{y.TF}{TM} = \frac{b.TF}{\sqrt{FT.GT}} = b\sqrt{\frac{FT}{GT}}$, folglich

$$GT : FT = GM : FM = CD^2 : FS^2;$$

und da sich auf eine ähnliche Art ergiebt, daß die aus dem andern Brennpunkte nach der Tangente gezogene senkrechte Linie $= b\sqrt{\frac{GT}{FT}}$ ist, so ist die halbe kleine Axe $CD = b$ die mittlere Proportionallinie zwischen diesen beyden Perpendikeln. Zieht man nun auch aus C die Linie CQ senkrecht auf die Tangente, so ist $FT : FS = CT : CQ$; folglich

$$CQ = \frac{b.CT}{\sqrt{FT.GT}} = \frac{bx.CT}{a\sqrt{FM.GM}}\,{}^{*)} = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}},$$ und

$CQ - FS = \frac{b.CF}{\sqrt{FT.GT}} = CX$, wenn FX mit der Tangente parallel gezogen worden. Hieraus ergiebt sich

$$CQ - CX = \frac{b.FT}{\sqrt{FT.GT}}$$ und

$$CQ + CX = \frac{b.TG}{\sqrt{FT.GT}}$$ und daher

$$CQ^2 - CX^2 = bb, \text{ und } CX = \sqrt{(CQ^2 - bb)};$$

wornach man, wenn die kleine Axe gegeben ist, in der senkrechten Linie CQ den Punkt X findet, der so beschaffen ist, daß eine aus ihm auf CQ senkrecht errichtete Linie durch den Brennpunkt F geht.

*) Es ist nemlich $FT : FM = a : x$, und $GT : GM = a : x$ §. 142 und folglich $FT.GT : FM.GM = aa : xx$. Daher

aber

aber wird $FT . GT = \frac{aa . FM . GM}{xx}$ und $\sqrt{FT . GT} = \frac{a}{x} \sqrt{FM . GM}$.

§. 145.

Nachdem wir diese Eigenschaften der Brennpunkte be-trachtet haben, so wollen wir unser Augenmerk auf je-zwey zu einander gehörige Durchmesser richten. Nun i-CM ein Halbmesser, dessen zugehöriger Halbmesser gefun-den wird, wenn man aus dem Mittelpunkte C mit de-Tangente TM die Linie CK parallel zieht. Es sey al-$CM = p$, $CK = q$, und der Winkel $MCK = CMT =$ s wo denn zuvörderst

$pp + qq = aa + bb$, [§. 119,] und zweytens

$pq . \sin . s = ab$ ist §. 115.

Dann ist

$$pp = xx + yy = bb + \frac{(aa - bb)xx}{aa}, \text{ und}$$

$$qq = aa + bb - pp = aa - \frac{(aa - bb)xx}{aa} =$$

$FM . GM$, und eben so

$pp = FK . GK$.

Ferner ist, da $CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM . GM}}$ [§. 144,]

$$\sin . CMQ = \sin . s \left[= \frac{CQ}{CM}\right] = \frac{ab}{p\sqrt{FM . GM}}, \text{ und}$$

$$TM : TP = \frac{y}{b}\sqrt{FT . GT} : \frac{aayy}{bbx} \text{ [§. 143 und 141]} =$$

$\sqrt{FM . GM} : \frac{ay}{b}$ [Anmerk. z. §. 144] $= CK : CR$; und folglich [weil $\sqrt{FM . GM} = q = CK$ ist,]

$CR = \frac{ay}{b}$, und $KR = \frac{bx}{a}$ *); also $CR . KR\ [= xy] = CP . PM$. Ferner ist

$$\sin. FMS = \frac{b}{\sqrt{GM . FM}} = \frac{b}{q}\ **);$$

und da $x = CP = \frac{a\sqrt{(pp - bb)}}{\sqrt{aa - bb}}$, [aus $pp = bb + \frac{(aa - bb)xx}{aa}$, oben]

und $y = PM = \frac{b\sqrt{(aa - pp)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$, [aus $pp = xx + yy$, wenn man anstatt xx das Quadrat des so eben gefundenen Werthes von x setzt,] desgleichen

$CR = \frac{a\sqrt{(aa - pp)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$, [aus $CR = \frac{ay}{b}$ und dem vorher gefundenen Werthe von y] und

$KR = \frac{b(\sqrt{pp - bb})}{\sqrt{(aa - bb)}}$, [aus $KR = \frac{bx}{a}$ und dem vorhin gefundenen Werthe von x]: so ist, weil $\tang. ACM = \frac{y}{x}$,

$\tang. 2ACM = \frac{2yx}{xx - yy}$ [1stes B. 14tes Cap. §. 249 verbunden mit §. 234] $= \frac{2ab\sqrt{(aa - pp)(pp - bb)}}{(aa + bb)pp - 2aabb}$. Es ist aber $ab = pq . \sin. s$; $aa + bb = pp + qq$; und $\sqrt{(aa - pp)(pp - bb)} = - pq . \cos. s$ ***), und daher also

$$\tang. 2ACM = \frac{- qq \sin. 2s}{pp + qq . \cos 2s},$$

weil der Cosinus von s negativ ist. Endlich ist

$CK^2 = MT . Mt$ ****), und $MV = q\sqrt{\frac{AP}{BP}}$, und

$$AV = b\sqrt{\frac{AP}{BP}} \text{ *****)}; \text{ also}$$

$$AV : MV = b : q = CE : CK.$$

Zieht man daher die Linien AM und EK, so sind dieselb[en] einander parallel.

*) Es ist nemlich $KR = \sqrt{(CK^2 - CR^2)} = \sqrt{(qq - \frac{aayy}{bb})} = \sqrt{\frac{bbxx}{aa}}$, weil $qq = aa - \frac{(aa - bb)xx}{aa}$, und $\frac{aayy}{bb} = aa - xx$, §. 138, ist.

**) Denn es ist $\sin. FMS = \frac{FS}{FM} = \frac{b}{FM}\sqrt{\frac{FT}{GT}} = \frac{b}{FM}\sqrt{\frac{FM}{GM}} = \frac{b}{\sqrt{FM.GM}}$

***) Weil $(aa - pp)(pp - bb) = (aa + bb)p^2 - p^4 - aabb = (p^2 + q^2)p^2 - p^4 - p^2 q^2 \sin. s^2 = p^2 q^2 (1 - \sin. s^2) = p^2 q^2 \cos. s^2$ ist.

****) Es ist nemlich $MT : PM = CK : KR$, und $Mt : PC = TM : TP = CK : CR$, also $MT.Mt : PM.CP = CK^2 : KR.CR$; aber $CP.PM = CR.KR$, wie [...] vorher bewiesen worden.

*****) Denn es ist $MV = \frac{AP.CK}{CR} = \frac{q(a-x)}{ay:b} = \frac{q(a-x)}{\sqrt{(aa-xx)}} = q\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$, so wie $AV = b\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}$ §. 141.

§. 146.

Da $pq.\sin. s = ab$ ist [§. 145,] so ist pq größer als ab, und da $pp + qq = aa + bb$ ist, so ist der Unterschied zwischen p und q kleiner als zwischen a und b, und also sind unter allen zu einander gehörigen Durchmessern die recht-

winkl

winkligen am meisten von einander in Ansehung der Größe unterschieden. Es wird daher auch ein Paar gleiche zu einander gehörige Durchmesser geben; und um sie zu finden, sey $q = p$. Alsdann ist $2pp = aa + bb$; $p = q = \sqrt{\frac{aa + bb}{2}}$; $\sin. s (= \frac{ab}{pq}) = \frac{2ab}{aa + bb}$; $\cos. s = \frac{-aa + bb}{aa + bb}$, und daher wird $\sin. \frac{1}{2} s = \sqrt{\frac{aa}{aa + bb}}$ und $\cos. \frac{1}{2} s = \sqrt{\frac{bb}{aa + bb}}$; also $\tang. \frac{1}{2} s = \frac{a}{b} = \tang. CEB$, und $MCK = 2CEB = AEB$. Ferner ist $CP = \frac{a}{\sqrt{2}}$ und $PM = \frac{b}{\sqrt{2}}$ *), und die zu einander gehörigen gleichen Halbmesser CM, CK sind also den Sehnen AE und BE parallel **).

*) Es ist $CP = \frac{a}{\sqrt{2}}$, wegen $CP = \frac{a\sqrt{(pp - bb)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$, und $pp = \frac{aa + bb}{2}$, so wie $PM = \frac{b}{\sqrt{2}}$, wegen $PM = \frac{b\sqrt{(aa - pp)}}{\sqrt{(aa - bb)}}$ und $pp = \frac{aa + bb}{2}$.

**) Denn da $\frac{CP}{PM} = \frac{a}{b} = \tang. \frac{1}{2} s = \tang. CMP$, und $MPC = R$ ist, so ist $MCE + CEA = 2R$, und also CM parallel AE.

§. 147.

Wenn man die Abscissen vom Scheitel A an rechnet, und $AP = x$, $PM = y$ nimmt: so erhält man, da in diesem Falle $a - x$ ist, was vorher x war, die Gleichung

$$yy = \frac{bb}{aa}(2ax - xx) = \frac{2bb}{a}x - \frac{bb}{aa}xx,$$

wo

wo in die Augen fällt, daß $\frac{2bb}{a}$ der Parameter der Ellipse ist, §. 129. Es sey der halbe Parameter, oder die Applicate in dem Brennpunkte $= c$, und die Entfernung des Brennpunkts vom Scheitel $AF = d$: so ist

$$\frac{bb}{a} = c, \text{ und } a - \sqrt{(aa - bb)} = d = a - \sqrt{(aa - ac)}$$

und daher

$$2ad - dd = ac, \text{ und } a = \frac{dd}{2d - c}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$yy = 2cx - \frac{c(2d - c)xx}{dd},$$

die Gleichung der Ellipse für rechtwinklige Coordinaten, wenn die Abscissen auf der Hauptaxe AB vom Scheitel A an genommen werden. Man erhält dieselbe aus dem Abstande des Brennpunkts vom Scheitel $AF = d$, und dem halben Parameter c; wobey indeß zu merken ist, daß $2d$ immer größer als c seyn muß, weil $AC = a = \frac{dd}{2d - c}$, und $CD = b = d\sqrt{\frac{c}{2d - c}}$ ist.

§. 148.

Wenn also $2d = c$ ist, so ist $yy = 2cx$, und dies ist die Gleichung für die Parabel; denn die Gleichung $yy = \alpha + \beta x$, §. 136 wird auf diese Form gebracht, wenn man den Anfang der Abscissen um $\frac{\alpha}{\beta}$ verändert. Es sey also Fig. 32 MAN eine Parabel, deren Natur für $AP = x$ und $PM = y$ durch die Gleichung $yy = 2cx$ ausgedrückt werde. Hier ist der Abstand des Brennpunkts vom Scheitel $AF = d = \frac{1}{2}c$, der

der halbe Parameter $FH = c$, und allenthalben $PM^2 = 2FH.AP$, so daß also die Applicaten PM und PN mit der Absciſſe AP ohne Ende wachſen, und die Curve ſich zu beyden Seiten der Axe ohne Ende fort verbreitet. Wenn man aber x negativ nimmt, ſo wird die Applicate imaginär, und jenſeit A nach T zu iſt alſo nichts von der Curve.

§. 149.

Da die Gleichung für die Ellipſe in eine Gleichung für die Parabel verwandelt wird, wenn man $2d = c$ ſetzt: ſo kann man die Parabel als eine Ellipſe, deren große Halbaxe $a = \frac{dd}{2d - c}$ unendlich iſt, betrachten; und es läßt ſich daher alles, was von der Ellipſe geſagt worden iſt, auf die Parabel anwenden, wenn man $a = \infty$ ſetzt. Da nun $AF = \frac{1}{2}c$, und alſo $FP = x - \frac{1}{2}c$ iſt, ſo wird, wenn man aus dem Brennpunkte F nach irgend einem Punkte der Curve M die gerade Linie FM zieht,

$$FM^2 = xx - cx + \tfrac{1}{4}cc + yy = xx + cx + \tfrac{1}{4}cc,$$

und folglich

$$FM = x + \tfrac{1}{2}c = AP + AF,$$

welches die Haupteigenſchaft des Brennpunkts der Parabel iſt.

§. 150.

Da die Parabel aus der Ellipſe entſteht, wenn man die große Axe $= \infty$ ſetzt; ſo wollen wir die Parabel als eine Ellipſe anſehen, deren halbe Axe $AC = a$ unendlich groß iſt, ſo daß alſo der Mittelpunkt C unendlich weit von A abſteht. Zieht man nun durch M die Tangente MT, welche der Axe in T begegnet; ſo wird, da $CP : CA = CA : CT$

§. 141. und $CP = a - x$ ist, $CT = \frac{aa}{a - x}$, und also $AT = \frac{ax}{a - x}$. Weil aber $a = \infty$, so verschwindet x dagegen, und es wird daher $a - x = a$, und $AT = x = AP$. Dies läßt sich auch auf diese Art darthun: Es ist $AT = \frac{ax}{a - x}$ oder $AT = x + \frac{xx}{a - x}$. Da nun hier der Nenner des Bruchs eine unendlich große, der Zähler aber eine endliche Größe ist, so verschwindet der Bruch, und es ist daher $AT = AP = x$.

§. 151.

Wenn man daher aus dem Punkte M nach dem unendlich weit entfernten Mittelpunkte der Parabel C die gerade Linie MC zieht, welche wegen der unendlichen Entfernung des Punkts C der Axe AC parallel wird: so ist auch diese Linie MC ein Durchmesser, der alle der Tangente MT parallele Sehnen in zwey gleiche Theile theilet. Wird z. B. die Sehne oder Ordinate mn der Tangente MT parallel gezogen, so wird sie von dem Durchmesser Mp in p halbiret. Es ist daher eine jede in einer Parabel mit der Axe parallel gezogene gerade Linie ein schiefwinkliger Durchmesser. Damit wir die Natur dieser Durchmesser kennen lernen, so sey $Mp = t$, $pm = u$, und msr aus m auf der Axe senkrecht. Dann ist, da $PT = 2x$, und $MT = \sqrt{(4xx + 2cx)}$ ist,

$$\sqrt{(4xx + 2cx)} : 2x = pm : ps, \text{ und}$$
$$\sqrt{(4xx + 2cx)} : \sqrt{2cx} = pm : ms; \text{ folglich}$$

$$ps = \frac{2xu}{\sqrt{(4xx + 2cx)}} = u\sqrt{\frac{2x}{2x + c}}, \text{ und}$$

$$ms = u\sqrt{\frac{c}{2x + c}}; \text{ daher}$$

$$Ar = x + t + u\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}, \text{ und } mr = \sqrt{2cx} + u\sqrt{\frac{c}{2x+c}}.$$

Da aber

$mr^2 = 2c.Ar$ [weil allenthalben $PM^2 = 2FH.AP$, §. 148] so ist

$$2cx + 2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}} + \frac{cuu}{2x+c} = 2cx + 2ct +$$

$$2cu\sqrt{\frac{2x}{2x+c}}, \text{ und also}$$

$uu = 2t(2x + c) = 4FM.t$, oder $pm^2 = 4FM.Mp$.

Ferner ist

$$\sin. mps \left[= \frac{ms}{mp}\right] = \sqrt{\frac{c}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AF}{FM}},$$

$$\cos. mps \left[= \frac{sp}{mp}\right] = \sqrt{\frac{2x}{2x+c}} = \sqrt{\frac{AP}{FM}};$$

also

$$\sin. 2mps = \frac{2\sqrt{2cx}}{2x+c} = \frac{y}{FM} = \sin. MFP,$$

und folglich der Winkel $mps = MTP = \frac{1}{2}MFr$.

§. 152.

Da $MF = AP + AF$, und $AP = AT$ ist, [§. 149 und 150,] so ist $FM = FT$, und also das Dreyeck MFT gleichschenklig, und $MFr = 2MTA$, so wie wir solches eben gefunden haben. Da ferner $MT = 2\sqrt{x(x + \frac{1}{2}c)}$, so ist $MT = 2\sqrt{AP.FM}$, und wenn man daher aus dem Brennpunkte F nach der Tangente die Perpendikulärlinie FS zieht, so ist

$$MS = ST = \sqrt{AP.FM} = \sqrt{AT.TF}, \text{ und folglich}$$

$$AT : TS = TS : TF.$$

Hieraus erhellet, daß der Punkt S in der Linie AS seyn wird, die in A auf der Axe senkrecht steht. Es ist aber

$AS = \frac{1}{2}PM$ $AS : TS = AF : FS$, und

$FS = \sqrt{AF \cdot FM}$ [weil $FS^2 = AF \cdot FT$, und $FT = FM$ ist] also FS die mittlere Proportiallinie zwischen AF und FM. Ueberdies ist

$AS : MS = AS : TS = FS : FM = \sqrt{AF} : \sqrt{FM}$ [weil $FS = \sqrt{AF \cdot FM}$].

Errichtet man aus M senkrecht auf die Tangente die gerade Linie MW, welche die Axe in W schneidet; so ist

$$PT : PM = PM : PW, \text{ oder}$$

$$2x : \sqrt{2cx} = \sqrt{2cx} : PW, \text{ und also}$$

$$PW = c;$$

oder das Stück der Axe PW, welches zwischen der Applicate PM und der Perpendikulärlinie MW liegt, hat eine beständige Größe, und ist dem halben Parameter oder der Applicate FH gleich. Endlich ist

$FW = FT = FM$, und $MW = 2\sqrt{AF \cdot FM}$. [$= 2FS$]

§. 153.

Wir kommen nunmehr zur Hyperbel, deren Natur durch die Gleichung

$$yy = \alpha + \beta x + \gamma xx$$

bestimmt wird, wenn x und y rechtwinklige Coordinaten bedeuten. Verändert man den Anfangspunkt der Abscissen um $\frac{\beta}{2\gamma}$ so erhält man daraus die Gleichung

$$yy = \alpha + \gamma xx,$$

wobey der Anfangspunkt der Abscissen mit dem Mittelpunkt C zusammen fällt, [§. 109. 110.] Es muß aber hier γ eine positive Größe seyn, §. 134, α hingegen kann positiv oder negativ genommen werden; denn verwechselt man die Coordinaten x und y, so wird aus einem positiven α ein negatives, und aus einem negativen ein positives. Es sey also α negativ, und folglich

$$yy = \gamma xx - \alpha;$$

wo sogleich in die Augen fällt, daß y zweymal = o wird, einmal, wenn $x = + \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ und zweytens wenn $x = - \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}}$ ist. Wird also, Fig. 33, C zum Mittelpunkte angenommen, und sind A und B die Punkte, wo die Axe von der Curve geschnitten wird: so ist, wenn man CA = CB = a setzt,

$$a = \sqrt{\frac{\alpha}{\gamma}} \text{ und } \alpha = \gamma aa, \text{ und daher } yy = \gamma xx - \gamma aa.$$

So lange also x^2 kleiner ist als a^2, so lange ist die Applicate imaginär, so daß daher zu der ganzen Axe AB kein Theil der Curve gehört. Wenn aber xx größer als aa ist, so wachsen die Applicaten mit den Abscissen ohne Ende; und es hat daher die Hyperbel vier ohne Ende fortlaufende und einander gleiche und ähnliche Schenkel AI, Ai, BK, Bk, welches das Hauptkennzeichen der Hyperbeln ist.

§. 154.

Weil $yy = -\gamma aa$ ist, wenn x = o wird, so hat die Hyperbel nicht so wie die Ellipse eine zugehörige Axe, indem die Applicate in dem Mittelpunkte C imaginär ist Es ist also die zugehörige Axe eine imaginäre Größe, welche man, um eine Aehnlichkeit mit der Ellipse zu erhalten, $= b\sqrt{-1}$ setzen kann, so daß $\gamma aa = bb$, und $\gamma = \frac{bb}{aa}$ wird. Setzt man nunmehr die Abscisse CP = x und die Applicate PM = y, so wird $yy = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$, und es wird daher die Gleichung für die Ellipse $yy = \frac{bb}{aa}(aa - xx)$ in die Gleichung für die Hyperbel verwandelt, wenn man $-bb$ anstatt bb setzt. Wegen dieser Uebereinstimmung läßt sich das, was bisher von der Ellipse gesagt worden ist, sehr leicht auf die Hyperbel anwenden. Zuvörderst ist der Abstand der Brennpunkte vom Mittelpunkte, der für die Ellipse $= \sqrt{(aa - bb)}$ war, für die Hyperbel $= \sqrt{(aa + bb)} = CF = CG$. Hieraus ergiebt sich

$$FP = x - \sqrt{(aa + bb)} \text{ und } GP = x + \sqrt{(aa + bb)};$$

und da $yy = -bb + \frac{bbxx}{aa}$ ist, so wird

$$FM = \sqrt{\left(aa + xx + \frac{bbxx}{aa} - 2x\sqrt{(aa + bb)}\right)} =$$

$$\frac{x\sqrt{(aa + bb)}}{a} - a, \text{ und}$$

$$GM = \sqrt{\left(aa + xx + \frac{bbxx}{aa} + 2x\sqrt{(aa + bb)}\right)} =$$

$$= \frac{x\sqrt{(aa + bb)}}{a} + a.$$

Zieht man daher aus den beyden Brennpunkten F und G nach einem Punkte M in der Curve die geraden Linien FM und GM, so ist

$$FM + AC = \frac{CP \cdot CF}{AC}, \text{ und } GM - AC = \frac{CP \cdot CF}{AC}, \text{ und}$$

die Differenz dieser beyden Linien $GM - FM = 2AC$. So wie also bey der Ellipse die Summe dieser beyden Linien, so ist bey der Hyperbel die Differenz derselben der Axe AB gleich.

§. 155.

Hieraus läßt sich auch die Lage der Tangente MT bestimmen. Denn da in allen Linien der zweyten Ordnung $CP : CA = CA : CT$ ist, §. 118, woraus sich $CT = \frac{aa}{x}$ und $PT = \frac{xx - aa}{x} = \frac{aayy}{bbx}$, §. 141, ergiebt: so wird

$$MT\left[=\sqrt{(PM^2 + PT^2)}\right] = \frac{y}{bbx}\sqrt{(b^4x^2 + a^4y^2)} =$$

$$\frac{y}{bx}\sqrt{(aaxx + bbxx - a^4)},$$

weil $y^2 = \frac{bb}{aa}(xx - aa)$ ist. Es ist aber

$$FM.GM = \frac{aaxx + bbxx - a^4}{aa},\ \text{§. 154, folglich}$$

$$MT = \frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM}.$$

Ferner ist

$$FT = \sqrt{(aa + bb)} - \frac{aa}{x},\ \text{und}\ GT = \sqrt{(aa + bb)} + \frac{aa}{x},$$

folglich

$FT : FM = a : x$, und $GT : GM = a : x$, woraus

$FT : GT = FM : GM$ folgt; und diese Proportion zeigt an, daß der Winkel FMG von der Tangente in zwey gleiche Theile getheilt wird, und $FMT = GMT$ ist. Wird aber die Linie CM verlängert, so ist sie ein schiefwinkliger Durchmesser, der alle mit MT parallel gezogene Ordinaten in zwey gleiche Theile theilet. [Man vergleiche mit diesen §. den 141 und 142sten].

§. 156.

Zieht man aus dem Mittelpunkte C die gerade Linie CQ auf die Tangente senkrecht, so wird

$$TM : PT = CT : TQ$$

oder

$$\frac{ax}{bx}\sqrt{FM.GM} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{aa}{x} : TQ,$$

und

$TM : PM = CT : CQ$, oder $\frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM} : y = \frac{aa}{x} : CQ$, §. 155; und also

$$TQ = \frac{a^3y}{bx\sqrt{FM.GM}} \text{ und } CQ = \frac{ab}{\sqrt{FM.GM}}.$$

Fällt man eben so aus dem Brennpunkte F die Linie FS senkrecht auf die Tangente, so wird $TM : PT = FT : TS$ oder

$$\frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM} : \frac{aayy}{bbx} = \frac{a.FM}{x} : TS, \text{ und}$$

$TM : PM = FT : FS$, oder

$$\frac{ay}{bx}\sqrt{FM.GM} : y = \frac{a.FM}{x} : FS \text{ §. 155; und daher}$$

$$TS = \frac{aayFM}{bx\sqrt{FM.GM}} \text{ und } FS = \frac{b.FM}{\sqrt{FM.GM}};$$

so wie, wenn man aus dem andern Brennpunkte die Linie Gs senkrecht auf die Tangente fällt,

$$Ts = \frac{aay.GM}{bx\sqrt{FM.GM}}, \text{ und } Gs = \frac{b.GM}{\sqrt{FM.GM}}$$

wird. Hieraus erhält man

$$TS.Ts = \frac{a^4yy}{bbxx} = \frac{aa(xx-aa)}{xx} = CT.PT, \text{ und}$$

$TS : CT = PT : Ts$; und $FG.Gs = bb$.

Da ferner $QS = Qs$ ist, so ist

$$QS = \frac{TS+Ts}{2} = \frac{aay(FM+GM)}{2bx\sqrt{(FM.GM)}} = \frac{ay\sqrt{(aa+bb)}}{b\sqrt{FM.GM}}$$

$= Qs$, [weil $FM + GM = \frac{2x\sqrt{(aa+bb)}}{a}$ ist, §. 154]; und hieraus fließt

$$CS^2 = CQ^2 + QS^2 = \frac{aab^4 + a^4yy + aabbyy}{bb.FM.GM} =$$

aab⁴

$$\frac{aab^4 + (aa+bb)(bbxx - aabb)}{bb.FM.GM} = \frac{(aa+bb)xx - a^4}{FM.GM}$$
$= aa$ *).

Es ist also auch hier, wie in der Ellipse, die gerade Linie $CS = a = CA$. Weiter ist

$$CQ + FS = \frac{bx\sqrt{(aa+bb)}}{a\sqrt{FM.GM}}$$

und also

$$(CQ+FS)^2 - CQ^2 = \frac{bbxx(aa+bb) - a^4b^2}{aa.FM.GM} = bb.$$

Wenn man daher aus F die Linie FX der Tangente parallel zieht, und dieselbe die senkrechte Linie CQ in X schneidet; so ist

$$CX = \sqrt{(bb + CQ^2)};$$

eine Eigenschaft, von welcher wir bey der Ellipse eine ähnliche gehabt haben. §. 144.

*) Man kann hier auch folgenden Gang nehmen. Es ist $CS^2 = CQ^2 + QS^2 = \frac{aabb}{FM.GM} + \frac{aayy}{bb} \cdot \frac{aa+bb}{FM.GM}$ $= \frac{aabb}{FM.GM} + \frac{(xx-aa)(aa+bb)}{FM.GM}$, weil $\frac{aayy}{bb} = xx - aa$ ist §. 154. Dies giebt ferner $\frac{(aa+bb)xx - a^4}{FM.GM}$, weil $(xx-aa)(aa+bb) = (aa+bb)xx - a^4 - aabb$, und das übrige folgt, weil $FM.GM = \frac{(aa+bb)xx - a^4}{aa}$ ist §. 154.

§. 157.

Wenn man in den Scheitelpunkten A und B auf der Axe senkrechte Linien errichtet, und selbige verlängert, bis sie der Tangente in V und v begegnen: so wird, weil $AT = \frac{a(x-a)}{x}$, $BT = \frac{a(x+a)}{x}$, und $PT : PM = AT : AV = BT : Bv$ ist,

$$AV = \frac{bb(x-a)}{ay}, \text{ und } Bv = \frac{bb(x+a)}{ay}; \text{ also}$$

$$AV.Bv = \frac{b^4(xx-aa)}{aayy} = bb = FS.Gs. \text{ §. 156.}$$

Außerdem ist auch

$$PT : TM = AT : TV = BT : Tv; \text{ und folglich}$$

$$TV = \frac{b(x-a)}{xy}\sqrt{FM.GM}, \text{ und } Tv = \frac{b(x+a)}{xy}\sqrt{FM.GM}$$

daher denn

$$TV.Tv = \frac{aa}{xx}.FM.GM = FT.GT. \text{ [weil } \frac{a}{x}FM = FT, \text{ und } \frac{a}{x}GM = GT \text{ ist §. 142].}$$

§. 158.

Da $CT = \frac{aa}{x}$ ist §. 141, so muß CT, oder das Stück der Axe zwischen der Tangente und dem Mittelpunkte desto kleiner seyn, je größer x genommen wird, und also die Tangente, wenn die Curve ins unendliche fortgezogen worden, durch den Mittelpunkt gehen, und $CT = 0$ werden. Weil nun $\text{tang.} PTM = \frac{PM}{PT} = \frac{bbx}{aay}$ [weil $PT = \frac{aayy}{bbx}$ §. 155] und $y = \frac{b}{a}\sqrt{(xx-aa)}$ §. 154, so wird, wenn $x = \infty$, $y = \frac{bx}{a}$, und $\frac{bbx}{aay} = \frac{b}{a}$, und die Tangente geht alsdann durch den Mittelpunkt, und macht mit der Axe den Winkel

ACD

ACD dessen Tangente $= \frac{b}{a}$ ist. Errichtet man daher aus A senkrecht auf die Axe die gerade Linie AD $=$ b: so wird die Linie CD, so weit man sie auch verlängert, die Curve nie schneiden, aber ihr immer näher und näher kommen, und nur nach einer unendlichen Verlängerung mit CI zusammenfallen. Eben das gilt von dem Theile Ck und dem Schenkel Bk. Zieht man auf der andern Seite unter eben dem Winkel die gerade Linie KCi, so erreicht auch sie die Schenkel BK und Bi nicht anders als nach einer unendlichen Verlängerung. Dergleichen Linien nun, denen sich eine Curve immer mehr und mehr nähert, ohne sie doch eher als nach einer unendlichen Verlängerung zu erreichen, werden Asymptoten genannt, und es sind also die geraden Linien ICk und KCi zwey Asymptoten der Hyperbel.

§. 159.

Es durchschneiden sich also die Asymptoten der Hyperbel in dem Mittelpunkte C, und machen mit der Axe den Winkel ACD $=$ ACd, dessen Tangente $= \frac{b}{a}$, so wie die Tangente des doppelten Winkels oder tang. DCd $= \frac{2ab}{aa - bb}$ [§. 249 des 1sten B. verbunden mit §. 234]. Wenn daher b $=$ a ist, so ist der Winkel DCd, unter welchem sich die Asymptoten schneiden, ein rechter Winkel, und in diesem Falle wird die Hyperbel eine gleichseitige Hyperbel genannt. Da aber AC $=$ a, AD $=$ b ist, so ist CD $=$ Cd $= \sqrt{(aa + bb)}$; und wenn man daher aus dem Brennpunkte G auf eine von den beyden Asymptoten die Perpendikulärlinie GH herabfällt, so wird, weil CG $= \sqrt{(aa + bb)}$ ist, CH $=$ AC $=$ BC $=$ a, und GH $=$ b.

§. 160.

Verlängert man die Ordinate MPN $= 2y$, bis sie die Asymptoten in m und n schneidet, so wird

$$Pm = Pn = \frac{bx}{a}, \text{ und}$$

$$Cm = Cn = \frac{x\sqrt{(aa + bb)}}{a} = FM + AC = GM - A$$

Ferner ist

$$Mm = Nn = \frac{bx - ay}{a}; Nm = Mn = \frac{bx + ay}{a} \text{ und d}$$

$$Mm.Nm = Mm.Mn = \frac{bbxx - aayy}{aa} = bb,$$

weil $aayy = bbxx - aabb$ ist, §. 154; und daher allenthalben

$$Mm.Nm = Mm.Mn = Nn.Nm = Nn.Mn =$$

$bb = AD^2$. Zieht man nun aus M die Linie Mr der Asymptote Cd parallel: so ist

$$2b : \sqrt{(aa + bb)} = Mm : mr\ (Mr); \text{ folglich}$$

$$mr = Mr = \frac{(bx - ay)\sqrt{(aa + bb)}}{2ab}, \text{ und}$$

$$Cm - mr = Cr = \frac{(bx + ay)\sqrt{(aa + bb)}}{2ab};$$

und daraus ergiebt sich

$$Mr.Cr = \frac{(bbxx - aayy)(aa + bb)}{4aabb} = \frac{aa + bb}{4},$$

weil $bbxx - aayy = aabb$, §. 154.

Zieht man daher aus A die Linie AE der Asymptote Cd parallel, so ist

$AE = CE\ [= \frac{1}{2} Cd] = \frac{1}{2}\sqrt{(aa + bb)}$ §. 159, und folglich

$$Mr.Cr = AE.CE,$$

welches

welches eine Haupteigenschaft der Hyperbel in Beziehung auf die Asymptoten ist.

§. 161.

Werden also, Fig. 34, die Abscissen $CP = x$ auf der einen von den Asymptoten vom Mittelpunkte aus, und die Applicaten $PM = y$ der andern Asymptote parallel genommen: so ist

$$yx = \frac{aa + bb}{4},$$

wenn man nemlich $AC = BC = a$, und $AD = Ad = b$ setzt, oder $yx = hh$, und $y = \frac{hh}{x}$, wenn man $AE = CE = h$ annimmt. Wird daher $x = o$, so wird $y = \infty$, so wie hinwiederum $y = o$ ist, wenn $x = \infty$ genommen wird. Zieht man nun durch irgend einen Punkt der Curve M eine gerade Linie $QMNR$, welche der nach Belieben gezogenen geraden Linie GH parallel ist, und nimmt dabey $CQ = t$, und $QM = u$ an: so ist

$GH : CH = u : PQ$; $GH : CG = u : PM$; folglich

$PQ = \frac{CH}{GH} \cdot u$, und $PM = \frac{CG}{GH} \cdot u$; und daher

$y = \frac{CG}{GH} \cdot u$, und $x = t - \frac{CH}{GH} \cdot u$. Bringt man diese Werthe in $yx = hh$, so erhält man daraus

$$\frac{CG}{GH} \cdot tu - \frac{CH.CG}{GH^2} \cdot uu = hh; \text{ oder}$$

$$uu - \frac{GH}{CH} tu + \frac{GH^2}{CH.CG} \cdot hh = o.$$

Es hat also die Applicate u einen doppelten Werth, nemlich QM und QN, und die Summe dieser beyden Werthe

ist

ist $\frac{GH}{CH}.t = QR$, so wie das Rechteck zwischen ihn

$$QM.QN = \frac{GH^2}{CH.CG}.hh.$$

§. 162.

Da also $QM + QN = QR$ ist, so ist $QM = R$ und $QN = RM$. Wenn daher die Punkte M und N zusammenfallen, oder die Linie QR die Curve berührt: so wird sie in diesem Punkte in zwey gleiche Theile getheilt. Berührt nemlich XY die Hyperbel, so liegt der Berührungspunkt Z in der Mitte von XY. Wenn man daher aus Z die gerade Linie ZV der andern Asymptote parallel zieht: so ist $CV = VY$, und dies führt auf eine sehr leichte Art, durch jeden Punkt der Hyperbel eine Tangente zu legen. Man macht nemlich $VY = CV$, und zieht durch Y und Z eine gerade Linie, welche dann die verlangte Tangente ist.

Da nun $CV.ZV = hh = \frac{aa+bb}{4}$ ist, so wird $CX.CY = aa+bb = CD^2 = CD.Cd$, und wenn man also die geraden Linien DX und dY zöge, so würden sie einander parallel seyn. Hierauf beruht eine sehr leichte Art, Tangenten der Curve zu ziehen.

§. 163.

Da ferner das Rechteck $QM.QN = \frac{GH^2}{CH.CG}.hh$ ist, so fällt in die Augen, daß dieses Rechteck QM.QN, wo man auch QR der HG parallel ziehen mag, immer dieselbe Größe haben werde. Es wird daher auch $QM.QN = QM.MR = QN.NR = \frac{GH^2}{CH.CG}.hh$ seyn. Denkt man

sich

sich also eine der QR parallele Tangente, welche innerhalb der Asymptoten in dem Berührungspunkte in zwey gleiche Theile getheilt wird, §. 162, und nennt man die Hälfte derselben q: so wird allezeit

$$QM.QN = QM.MR = RM.RN = RN.NQ = qq.$$

welches eine sehr merkwürdige Eigenschaft der Hyperbeln ist, die zwischen ihren Asymptoten beschrieben worden sind.

§. 164.

Da die Hyperbel aus zwey einander gerade entgegenstehenden Theilen IAi und KBk besteht: so finden diese Eigenschaften nicht bloß alsdann statt, wenn eine gerade Linie auf die Art zwischen den Asymptoten gezogen worden ist, daß sie einen und denselben Theil der Curve in zwey Punkten schneidet; sondern auch, wenn eine gerade Linie von einem Theile der Curve nach dem entgegenstehenden gezogen wird. Zieht man z. B. aus M die gerade Linie Mqrn nach dem entgegenstehenden Theile, und mit ihr die Parallele Gh: so wird, weil die Dreyecke CGh und PMq einander ähnlich sind, wenn man $Cq = t$, und $qM = u$ setzt,

$$PM = y = \frac{CG}{Gh}.u, \text{ und } qP = x - t = \frac{Ch}{Gh}.u; \text{ also}$$

$x = t + \frac{Ch}{Gh}.u$. Dies giebt, da $xy = hh$, § 161,

$$\frac{CG}{Gh}tu + \frac{CG.Ch}{Ch^2}.uu = hh, \text{ oder}$$

$$uu + \frac{Gh}{Ch}.tu - \frac{Gh^2}{CG.Ch}.hh = 0$$

§. 165.

Es hat also die Applicate u einen doppelten Werth, nemlich qM und $-qn$, denn qn ist negativ, weil es auf der an-

andern Seite der Asymptote CP, die zur Axe genommen ist, liegt. Die Summe dieser beyden Wurzeln qM, $-qn$ ist daher $-\frac{Gh}{Ch}.t = -qr$, folglich $qn - qM = qr$, und daher $qM = rn$, und $qn = rM$. Ferner erhellet aus der Gleichung § 164, daß das Produkt dieser Wurzeln $-qM.qn = -\frac{Gh^2}{CG.Ch}.hh$, oder $qM.qn = qM.rM = rn.qn = rn.rM = \frac{Gh^2}{CG.Ch}.hh$ ist. Es sind also diese Rechtecke, wieviel gerade Linien Mn man auch der Gh parallel ziehen mag, immer von einer und derselben Größe. Und dies sind die vornehmsten Eigenschaften der einzelnen Arten der Linien der zweyten Ordnung, welche, wenn man sie mit den allgemeinen Eigenschaften derselben verbindet, zu einer außerordentlichen Menge merkwürdiger Beschaffenheiten führen.