# Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Achtes Capitel. Von den Asymptoten.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

# Achtes Capitel.

## Von den Asymptoten.

§. 198.

Wir haben in dem vorhergehenden Capitel mehrere Arten von Asymptoten kennen gelernt, denn wir haben gefunden, daß es außer der geraden Linie noch eine Menge krummliniger Asymptoten giebt, die in der Gleichung $u^{\mu} = Ct^{\nu}$ enthalten sind. Selbst die gerade Linie führte auf andere krummlinige Asymptoten, welchen sich die Curve mehr näherte, als der geraden Linie. Ja so oft gefunden wird, daß eine gerade Linie die Asymptote einer Curve ist, so oft läßt sich auch eine krumme Linie angeben, welche eben die gerade Linie zur Asymptote hat, und welche zugleich eine Asymptote der gegebenen Curve ist. Dergleichen krummlinige Asymptoten drucken aber die Natur der Curve, wovon sie Asymptoten sind, weit genauer aus; denn sie zeigen zugleich die Anzahl der Schenkel, welche sich der geraden Linie immer mehr nähern, so wie auch die Gegend und Seite an, wo solches geschieht, ob oben oder unten, ob vorwärts oder rückwärts?

§. 199.

Am bequemsten ordnet man diese so sehr von einander verschiedene Asymptoten, wenn man der Quelle folgt, aus welcher ihre Kenntniß geschöpft worden ist. Man erhält nemlich einige von ihnen aus den einzeln einander ungleichen

chen Faktoren des höchsten Gliedes; andere hingegen aus je zwey gleichen, noch andere aus drey, noch andere aus vier einander gleichen Faktoren eben dieses Gliedes. Es sey also eine Gleichung von der Ordnung n zwischen den Coordinaten x und y gegeben, und diese Gleichung sey $P + Q + R + S +$ rc. $= 0$. Ferner sey P das höchste Glied, welches also alle Glieder der Gleichung von n Dimensionen, Q das zweyte Glied, welches daher alle Glieder der Gleichung von $n - 1$ Dimensionen in sich begreift, und auf eine ähnliche Art sey R das dritte, S das vierte Glied, rc.

## §. 200.

Nun sey $ay - bx$ ein einfacher Faktor von P, und zugleich der einzige, den P von dieser Art hat. Setzt man also $P = (ay - bx)M$, so wird M eine homogene Funktion von $n - 1$ Dimensionen, die nicht durch $ay - bx$ theilbar ist. Ferner sey, Fig. 35, AZ eine Axe, ihre Abscisse $AP = x$, und die Applicate $PM = y$. Damit man den Faktor $ay - bx$ genau auszudrucken im Stande seyn möge, so nehme man noch eine andere Axe AX an, welche die vorhergehende in dem Anfangspunkte der Abscissen A schneide, und mit ihr einen Winkel XAZ mache, dessen Tangente $= \frac{b}{a}$, und folglich sein Sinus $= \frac{b}{\sqrt{(aa + bb)}}$, so wie sein Cosinus $= \frac{a}{\sqrt{(aa + bb)}}$ sey. In dieser Axe nehme man die Abscisse $AQ = t$, und die Applicate $QM = u$; so wird, wenn man Pg und Pf den neuen Coordinaten u und t parallel zieht, $Pg = Qf = \frac{bx}{\sqrt{(aa + bb)}}$; $Ag = \frac{ax}{\sqrt{(aa + bb)}}$; $Mf = \frac{ay}{\sqrt{(aa + bb)}}$; $Pf = Qg =$

$\frac{by}{\sqrt{(aa + bb)}}$; und folglich $t = Ag + Qg = \frac{ax + by}{\sqrt{(aa + bb)}}$; und $u = Mf - Qf = \frac{ay - bx}{\sqrt{(aa + bb)}}$. Es ist also die Applicate u nunmehr ein Faktor des höchsten Gliedes P.

§. 201.

Umgekehrt ist $y = \frac{au + bt}{\sqrt{(aa + bb)}}$, und $x = \frac{at - bu}{\sqrt{(aa + bb)}}$. Bringt man diese Werthe in die Gleichung $P + Q + R +$ rc. $= 0$; so erhält man eine andere Gleichung für eben dieselbe Curve, wobey AX die Axe, und t und u die Coordinaten sind. Um aber die Weitläuftigkeit bey den Coefficienten zu vermeiden, mögen die Buchstaben $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, rc. ihre Stelle vertreten. Auf diese Art erhält man durch die gedachte Substitution

$$M = \alpha t^{n-1} + \alpha t^{n-2}u + \alpha t^{n-3}u^2 + \text{rc.}$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \text{rc.}$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \text{rc.}$$
$$S = \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \text{rc.}$$
$$T = \varepsilon t^{n-4} + \varepsilon t^{n-5}u + \varepsilon t^{n-6}u^2 + \text{rc.}$$
rc.

Weil man aber, um die Asymptote zu finden, die Absciſſe t unendlich groß annehmen muß, so verschwinden in jedem dieser Glieder die folgenden Theile gegen den ersten. Wenn also der erste Theil da ist, so können die übrigen aus der Acht gelassen werden. Fehlt der erste, so nimmt man den zweyten, und fehlen der erste und der zweyte, so fängt man von dem dritten an, u. s. w.

§. 202.

Da u die Funktion M nicht theilt, so kann der erste Theil von M nicht fehlen, und es wird also $\alpha t^{n-1}u + \beta t^{n-1} = 0$.

Hier-

Hieraus ergiebt sich für u ein endlicher Werth, den wir $= c$ setzen wollen; d. h. eine gerade Linie, die mit der AX parallel läuft, und von ihr allenthalben um c entfernt ist, ist die Asymptote. Um nun die krummlinige Asymptote, welche sich der gegebenen Curve stärker nähert, zu finden, setze man allenthalben, außer im ersten Gliede, anstatt u, c. Hierdurch erhält man die Gleichung

$$\alpha t^{n-1}u + \beta t^{n-1} + t^{n-2}(\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \text{etc.} = 0.$$

Oder, weil $\alpha u + \beta = u - c$ ist,

$$(u - c)t^{n-1} + t^{n-2}(\alpha c^2 + \beta c + \gamma) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + \text{etc.} = 0.$$

Wenn also das zweyte Glied nicht fehlt, so können alle folgenden aus der Acht gelassen werden, und dann ist

$$(u - c) + \frac{A}{t} = 0$$

Fehlt das zweyte, so nehme man das dritte, wo denn

$$(u - c) + \frac{A}{tt} = 0$$

Fehlt auch das dritte, so erhält man durch das vierte

$$(u - c) + \frac{A}{t^3} = 0, \text{ etc.}$$

Fehlen alle bis auf das letzte beständige Glied, so würde

$$(u - c) + \frac{A}{t^{n-1}} = 0;$$

und fehlte auch dieses nebst allen übrigen, so wäre die ganze Gleichung durch $u - c$ theilbar, und dann wäre also die gerade Linie $u - c = 0$ selbst ein Theil der Curve.

## §. 203.

Setzt man $u - c = z$, d. h. nimmt man die Abscissen auf der geradlinigen Asymptote selbst, so sind alle krummlinigen

Asym-

Asymptoten, welche der einzige Faktor des höchsten Gliedes P an die Hand giebt, in der allgemeinen Gleichung $z = \frac{C}{t^k}$ enthalten, worin k jede ganze Zahl, die kleiner als n ist, bedeutet. Jetzt wollen wir untersuchen, wie diese krummlinigen Asymptoten beschaffen sind, wenn die Abscisse $t = \infty$ wird. Es sey also Fig. 36, XY, die geradlinige Asymptote, die Axe, und A der Anfangspunkt der Abscissen. Zieht man die Linie CD, so entstehen vier Gegenden, die wir mit den Buchstaben P, Q, R und S bezeichnen wollen. Nun sey zuvörderst $z = \frac{C}{t}$. Da bey dieser Voraussetzung z allezeit negativ wird, wenn man t negativ nimmt: so hat in diesem Falle die Curve zwey Schenkel EX und FY, welche sich in den entgegenstehenden Gegegenden P und S der geraden Linie XY immer mehr und mehr nähern; und eben dieses wird statt finden, so lange k irgend eine ungerade Zahl bedeutet. Ist aber $k = 2$, oder irgend eine andere gerade Zahl, so bleibt z, man mag t positiv oder negativ nehmen, beständig positiv, und es hat alsdann die Curve zwey Schenkel EX und FY, Fig. 37, die mit der geraden Linie XY in den Gegenden P und Q convergiren. Je größer aber k angenommen wird, desto stärker convergiren EX und FY mit XY.

§. 204.

Nun habe das höchste Glied P zwey einander gleiche Faktoren $ay - bx$. Verändert man hier eben so wie vorhin die Axe, so wird

$$P = \qquad + \alpha t^{n-2}u^2 + \alpha t^{n-3}u^3 + \text{ꝛc.}$$
$$Q = \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \beta t^{n-4}u^3 + \text{ꝛc.}$$
$$R = \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \text{ꝛc.}$$
$$S = \delta t^{n-2} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 + \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Hier-

Hieraus entspringen, je nachdem der erste Theil des Gliedes Q da ist oder fehlt, die beyden Gleichungen,

I.

$$\alpha t^{n-2}u^2 + \beta t^{n-1} = 0$$

oder

$$\alpha u^2 + \beta t = 0$$

II.

$$\alpha t^{n-2}u^2 + \beta t^{n-2}u + \gamma t^{n-2} = 0$$

oder

$$\alpha u^2 + \beta u + \gamma = 0.$$

Findet also die erste Gleichung $\alpha u^2 + \beta t = 0$ statt, so wird die Asymptote eine Parabel, mit deren beyden Schenkeln die beyden Schenkel der Curve im Unendlichen zusammenfallen. Die Curve hat daher, Fig. 38., in den beyden Gegenden P und R Schenkel, die mit der Parabel EAF endlich zusammenkommen.

## §. 205.

Ergiebt sich aber die andere Gleichung $\alpha uu + \beta u + \gamma = 0$, so muß man untersuchen, ob sie zwey reelle Wurzeln hat, oder nicht. Ist das letztere, so erkennt man daran, daß die Curve gar keine ohne Ende fortlaufende Schenkel hat. Sind aber beyde Wurzeln reell und einander ungleich, also einmal $u = c$, und zweytens $u = d$ so hat die Curve zwey geradlinige einander parallele Asymptoten. Wie eine jede davon beschaffen sey? soll es wird auf eben die Art, wie vorhin, untersucht. Setzt man nemlich, da $\alpha uu + \beta u + \gamma = (u - c)(u - d)$ ist, allenthalben, nur in dem Faktor $u - c$ nicht, $u = c$: so erhält man $(c - d)t^{n-2}(u - c) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \epsilon)$ + ꝛc. $= 0$. Ist nun das zweyte Glied nicht $= 0$, so verschwinden

schwinden die übrigen Glieder, wenn man $t = \infty$ setzt, und es wird also die Asymptote

$$(u - c) + \frac{A}{t} = 0$$

Fehlt das zweyte Glied, so wird sie

$$(u - c) + \frac{A}{t^2} = 0, \text{ rc.}$$

Fehlen alle bis auf das letzte beständige Glied, so erhält man dafür

$$(u - c) + \frac{A}{t^{n-2}} = 0$$

Die Gestalten dieser Curven aber, für den Fall, wenn $t = \infty$, haben wir bereits vorhin [§. 203.] insgesammt beschrieben.

§. 206.

Wenn aber die beyden Wurzeln der Gleichung, $\alpha uu + \beta u + \gamma = 0$, einander gleich, oder $\alpha uu + \beta u + \gamma = (u - c)^2$ ist, so erhält man, weil $u = c$ ist, durch diese Substitution die Gleichung: $t^{n-2}(u - c)^2 + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4}(\alpha c^4 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \epsilon)$ + rc. $= 0$. Hieraus ergeben sich, je nachdem, das erste Glied ausgenommen, das zweyte, oder bey der Abwesenheit des ersten das dritte, oder bey dem Fehlen des zweyten und dritten das vierte nicht fehlt, folgende Gleichungen für die Asymptoten

$$(u - c)^2 + \frac{A}{t} = 0$$

$$(u - c)^2 + \frac{A}{tt} = 0$$

$$(u - c)^2 + \frac{A}{t^3} = 0$$

bis zu

(u —

$$(u-c)^2 + \frac{A}{t^{n-2}} = 0$$

wenn außer dem letzten beständigen Gliede alle übrige Glieder fehlen. Wenn aber auch das letzte Glied verschwände, so würde $(u-c)^2 = 0$ werden, und folglich die gerade Linie ein Theil der Curve, und die Linie selbst eine complexe Linie seyn.

§. 207.

Ob gleich auf diese Art alle Fälle berührt zu seyn scheinen, welche bey zwey gleichen Faktoren statt finden, so kann doch die letzte Gleichung noch andere Formen annehmen, und daraus folgen denn auch noch andere Asymptoten. Dies findet statt, wenn der Faktor der Potestät $t^{n-3}$ durch $u-c$ theilbar ist. Denn behält man alsdann darin, so wie im ersten Gliede, $u-c$ bey, und fügt außerdem das zunächst folgende daseyende Glied dazu, so ergeben sich folgende Gleichungen.

$$(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{B}{tt} = 0$$

$$(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{B}{t^3} = 0$$

bis zu

$$(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{B}{t^{n-2}} = 0$$

Wenn aber das zweyte Glied gänzlich fehlet oder durch $(u-c)^2$ theilbar ist, so betrachte man das dritte Glied; und wenn dasselbe durch $u-c$ theilbar ist, so lasse man darin $u-c$, und füge überdem das zunächst folgende Glied hinzu. Dadurch entstehen folgende Gleichungen:

$$(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{tt} + \frac{B}{t^3} = 0$$

$$(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{tt} + \frac{B}{4} = 0$$

bis

bis zu

$$(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{tt} + \frac{B}{t^{n-2}} = 0.$$

Wenn auch das dritte Glied fehlt, und das vierte durch $u-c$ theilbar ist, oder wenn auch dieses fehlt, das fünfte, u. so entsteht für die krummlinige Asymptote die Gleichung

$$(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$$

worin der Exponent $p$ allemal kleiner ist als $q$, und $q$ kleiner als $n-1$.

## §. 208.

Setzt man $u-c=z$, so sind alle diese Gleichungen in der Form:

$$zz - \frac{Az}{t^p} + \frac{B}{t^q} = 0$$

enthalten. Bey der Entwickelung dieser Formel aber sind drey Fälle zu betrachten; der erste, wenn $q$ größer als $2p$, der andere, wenn $q=2p$, und der dritte, wenn $q$ kleiner als $2p$ ist.

Im ersten Falle, wenn $q$ größer ist als $2p$, enthält jene Gleichung diese beyden:

$$z - \frac{A}{t^p} = 0; \text{ und } Az - \frac{B}{t^{q-p}} = 0$$

denn eine jede dieser Gleichungen thut ihr, wenn $t=\infty$ genommen wird, ein Genüge. Setzt man nemlich $z=\frac{A}{t^p}$, so verwandelt sich jene Gleichung in

$$\frac{A^2}{t^{2p}} - \frac{A^2}{t^{2p}} + \frac{B}{t^q}, \text{ oder } A^2 - A^2 + \frac{B}{t^{q-2p}}$$

und dies ist richtig, weil $q$ größer als $2p$ ist. Es ist aber $p$ kleiner als $\frac{n-2}{2}$.

Wenn

Wenn hingegen $z = \frac{B}{At^{q-p}}$ ist, so erhält man

$$\frac{BB}{A^2t^{2q-2p}} - \frac{B}{t^q} + \frac{B}{t^q} \text{ oder } \frac{BB}{A^2t^{q-2p}} - B + B - 0$$

und dies ist wahr, weil das erste Glied verschwindet, wenn $t = \infty$ wird. In diesem Falle hat man also über einer und derselben geradlinigen Asymptote zwey krummlinige, und also vier ohne Ende fortlaufende Schenkel.

Der zweyte Fall, wenn $q = 2p$ ist, giebt die Gleichung

$$zz = \frac{Az}{t^p} + \frac{B}{t^{2p}} = 0$$

die entweder imaginär ist, wenn $AA$ kleiner ist als $4B$, und dann giebt es keine Asymptote; oder auf zwey ähnliche Asymptoten $z = \frac{C}{t^p}$ führt, wenn $AA$ größer als $4B$ ist.

Im dritten Falle, wenn $q$ kleiner als $2p$ ist, verschwindet das mittlere Glied allemal, wenn man von $t = \infty$ nimmt, und man erhält also die Gleichung

$$zz + \frac{B}{t^q} = 0$$

für eine Asymptote. Die Beschaffenheit der vorhergehenden Asymptoten haben wir bereits auseinander gesetzt, und wir wollen daher nun die Asymptoten, die in der Form $zz = \frac{C}{t^k}$ enthalten sind, betrachten.

## §. 209.

Wenn also die Axe auf der geradlinigen Asymptote $u = c$ selbst genommen, und die Applicate $u - c = z$ gesetzt wird, so sind jene krummlinigen Asymptoten insgesammt in der Gleichung

$$zz = \frac{C}{t^k}$$

enthalten, wo $k$ eine ganze Zahl bedeutet, die kleiner als $n-1$ ist. Mit den ohne Ende fortlaufenden Schenkeln dieser Curven aber verhält es sich auf folgende Art. Wenn $k=1$, oder $zz=\frac{C}{t}$ ist, so hat die Curve, weil $t$ nicht negativ werden kann, zwey Schenkel $EX$ und $FX$, Fig. 39, die auf den Seiten $P$ und $R$ ohne Ende fortlaufen; und eben dieses findet statt, wenn $k$ irgend eine ungerade Zahl ist. Bedeutet hingegen $k$ eine gerade Zahl, z. B. 2, so daß $zz=\frac{C}{tt}$ wird, so muß man vor allen Dingen untersuchen, ob $C$ negativ oder positiv ist. Im ersten Falle kann die Gleichung nicht reell seyn, und die Curve hat also alsdenn keinen ohne Ende fortlaufenden Schenkel. Im andern Falle hat die Curve vier unendliche Schenkel, die mit der Asymptote $XY$, Fig. 40, zusammenlaufen, nemlich $EX$, $FX$, $GY$ und $HY$ auf den Seiten $P$, $Q$, $R$ und $S$.

## §. 210.

Angenommen, daß das höchste Glied der Gleichung $P$ drey gleiche Faktoren habe, und daß die Gleichung auf die Coordinaten $t$ und $u$ gebracht worden, und $u$ jener dreyfache Faktor von $P$ sey; so ist

$$
\begin{aligned}
P &= \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + \alpha t^{n-3}u^3 + \alpha t^{n-4}u^4 + \text{etc.}\\
Q &= \beta t^{n-1} + \beta t^{n-2}u + \beta t^{n-3}u^2 + \beta t^{n-4}u^3 + \beta t^{n-5}u^4 + \text{etc.}\\
R &= \gamma t^{n-2} + \gamma t^{n-3}u + \gamma t^{n-4}u^2 + \gamma t^{n-5}u^3 + \gamma t^{n-6}u^4 + \text{etc.}\\
S &= \delta t^{n-3} + \delta t^{n-4}u + \delta t^{n-5}u^2 + \delta t^{n-6}u^3 + \delta t^{n-7}u^4 + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

etc.

Hieraus ergeben sich nach den verschiedenen Beschaffenheiten der Glieder $Q$ und $R$ folgende Gleichungen:

I.

$$\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-1} = 0$$

II.

$$\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-2}u + \gamma t^{n-2} = 0$$

III.

$$\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-3}u^2 + \gamma t^{n-2} = 0$$

IV.

$$\alpha t^{n-3}u^3 + \beta t^{n-3}u^2 + \gamma t^{n-3}u + \delta t^{n-3} = 0$$

§. 211.

Die erste Gleichung läßt sich in $\alpha u^3 + \beta t^2 = 0$ verwandeln, und es ist daher diese Asymptote eine Linie der dritten Ordnung, deren Gestalt die 41ste Figur zeigt, wenn die Abscissen t auf der Axe XY von dem Punkte A an genommen werden. Sie hat nemlich zwey ohne Ende fortlaufende Schenkel E und F auf den Seiten P und Q.

Die zweyte Gleichung giebt $\alpha u^3 + \beta tu + \gamma t = 0$. Aus dieser Gleichung kann u, wenn man $t = \infty$ setzt, einen doppelten Werth, einen endlichen oder einen unendlichen, bekommen, und es läßt sich dieselbe daher in diese beyde Gleichungen, $\beta u + \gamma = 0$, und $\alpha uu + \beta t = 0$ auflösen. Die letzte Gleichung ist, wie wir oben gesehen haben, die Gleichung für die Parabel, und es hat demnach die Curve zwey ohne Ende fortlaufende einer Parabel sich nähernde Schenkel. Die erste Gleichung hingegen gebe $u - c = 0$, welches die Gleichung für die geradlinige Asymptote ist, deren Natur gefunden wird, wenn man allenthalben, außer in $\beta u + \gamma = u - c$, c statt u setzt. Es wird also

$$t^{n-2}(u - c) + t^{n-3}(\alpha c^3 + \beta c^2 + \gamma c + \delta) + t^{n-4} \times (\alpha c^4 + \beta c^3 + \gamma c^2 + \delta c + \varepsilon) + \text{2c.} = 0$$

und daraus fließt, wie §. 205, daß entweder

$$(u - c) + \frac{A}{t} = 0, \text{ oder } (u - c) + \frac{A}{tt} = 0$$

2c.

seyn wird, und die letzte Gleichung, welche entstehen kann, ist

$$(u-c) + \frac{A}{t^{n-2}} = 0$$

In diesem Falle hat also die Curve eine doppelte Asymptote, die eine ist von der hier beschriebenen Art, und die andere eine Parabel.

## §. 212.

Die dritte Gleichung $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma t = 0$ kann nicht bestehen, wenn man $t = \infty$ annimmt, wofern nicht zugleich $u = \infty$ ist. Es verschwindet daher das Glied $\beta u^2$ gegen $\alpha u^3$, und man erhält diese Gleichung der dritten Ordnung, $\alpha u^3 + \gamma t = 0$, für die Asymptote, die also auf den beyden entgegengesetzten Seiten P und S, Fig. 42, zwey ohne Ende fortlaufende Schenkel AE und AF hat.

Die vierte Gleichung $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta$ giebt entweder eine oder drey geradlinige, einander parallele, Asymptoten, wofern nicht zwey oder auch alle unter sich gleich sind. Um die Natur derselben zu erforschen, sey zuvörderst $u = c$ eine Wurzel der Gleichung, und von den übrigen keine ihr ähnlich, und zugleich

$$\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = (u-c)(fu^2 + gu + h)$$

Setzt man hier allenthalben, den Factor $u - c$ ausgenommen, $u = c$, so erhält man eine Gleichung von der Form

$$t^{n-3}(u-c) + At^{n-4} + Bt^{n-5} + Ct^{n-6} + \text{rc.} = 0$$

und daher ergiebt sich eine Asymptote von der Form $u - c = \frac{K}{t^k}$, wo k eine Zahl bedeutet, die kleiner als $n-2$ ist.

## §. 213.

Wenn die Gleichung $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = 0$ zwey gleiche Wurzeln hat, so daß

$$\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = (u-c)^2 (fu + g)$$

ist: so gelangt man, wenn man, die Glieder ausgenommen, worin $u-c$ ein Faktor ist, $u=c$ setzt, zu folgender Gleichung

$$(u-c)^2 + \frac{A(u-c)}{t^p} + \frac{B}{t^q} = o$$

wo $q$ kleiner als $n-2$, und $p$ kleiner als $q$ ist; allein diesen Fall haben wir bereits vorhin §. 207. f. betrachtet. Es ist also nur der noch übrig, wenn die Gleichung, $\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta = o$, drey reelle Wurzeln, nemlich $(u-c)^3$ hat, und man folgende Gleichung erhält:

$$(u-c)^3 t^{n-3} + P t^{n-4} + Q t^{n-5} + R t^{n-6} + \text{rc.} = o.$$

Ist $P$ nicht durch $u-c$ theilbar, so setze man $u=c$, wo denn

$$(u-c)^3 + \frac{A}{t} = o$$

wird. Enthält hingegen $P$ den Faktor $u-c$ einmal, so setze man allenthalben, außer in diesem Faktor, $u=c$, wodurch sich eine Gleichung von dieser Form

$$(u-c)^3 + \frac{A(u-c)}{t} + \frac{B}{t^q} = o$$

ergeben wird, wo $q$ kleiner als $n-2$ ist, und $\frac{B}{t^q}$ das Glied bedeutet, welches zunächst auf das zweyte folgt, und nicht verschwindet, wenn man $u=c$ setzt. Wenn $P$ durch $(u-c)^2$ theilbar ist, $Q$ aber den Faktor $u-c$ nicht hat, so bekommt man eine Gleichung von der Form

$$(u-c)^3 + \frac{A(u-c)^2}{t} + \frac{B}{tt} = o.$$

Wenn aber das zweyte Glied durch $(u-c)^3$ getheilt werden kann, so muß man bis zu einem Gliede fortgehen, welches nicht durch $(u-c)^3$ theilbar ist; und hat dasselbe den Faktor (u — c), so muß man noch weiter fortgehen, bis man zu einem durch u — c nicht theilbaren Gliede gekommen ist. Läßt sich aber jenes Glied durch $(u-c)^2$ theilen, so geht man bis zu einem solchen Gliede fort, welches entweder durch u — c nicht getheilt werden kann, oder diese Größe zum Faktor hat. Im ersten Falle endigt man die Gleichung; im letzten Falle aber geht man weiter, bis man zu einem durch u — c nicht theilbaren Gliede gelangt ist. Auf diese Art erhält man allemal eine Gleichung, die unter diese allgemeine Form gehört:

$$(u-c)^3 + \frac{A(u-c)^2}{t^p} + \frac{B(u-c)}{t^q} + \frac{C}{t^r} = 0$$

wo r kleiner als n — 2; q kleiner als r, und p kleiner als q ist.

## §. 214.

In dieser Gleichung stecken entweder drey Gleichungen von der Form $(u-c) = \frac{K}{t^k}$; oder eine von eben dieser Form, und $(u-c)^2 = \frac{K}{t^k}$; oder die einzige $(u-c)^3 = \frac{K}{t^k}$. Dies letzte findet statt, wenn 3p größer als r, und 3q größer als 2r ist. Dann kann es sich auch ereignen, daß beyde Gleichungen unmöglich werden, und also dadurch die Abwesenheit der Asymptoten anzeigen. Uebrigens haben wir die Gestalten dieser Asymptoten bis auf die letzte, welche durch die Gleichung $(u-c)^3 = \frac{K}{t^k}$ ausgedruckt wird, bereits beschrieben. Was aber diese Gleichung betrifft, so führt dieselbe, wenn k eine ungerade Zahl ist, auf Linien, wie Fig. 36. abgebildet sind, wo zwey

Schen-

Schenkel EX und FY auf den entgegengesetzten Seiten P und S ohne Ende fortlaufen. Wenn hingegen k eine gerade Zahl ist, so entsteht die 37ste Figur, wo die beyden Schenkel EX und FY auf eben der Seite der geradlinigen Asymptote XY, oder auf den Seiten P und Q ohne Ende fortgehen.

§. 215.

Da sich hieraus die Art und Weise, die Asymptoten zu erforschen, wenn das höchste Glied der Gleichung vier oder mehr einfache gleiche Faktoren hat, leicht erkennen läßt: so verweile ich dabey nicht, sondern beschließe dieses Capitel mit der Anwendung der gegebenen Regeln auf einen besondern Fall.

Exempel.

Es sey also eine krumme Linie gegeben, die durch die Gleichung:

$$y^3xx(y-x) - xy(yy+xx) + 1 = 0,$$

deren höchstes Glied $y^3xx(y-x)$ den einfachen Faktor $y-x$, den quadralischen Faktor $xx$, und den cubischen $y^3$ enthält, ausgedruckt wird.

Zuvörderst wollen wir den einfachen Faktor $y-x$ betrachten. Da man daher, wenn man $y = x$ setzt,

$$y - x - \frac{2}{x} = 0$$

erhält, so wird, wegen $x = \infty$,

$$y - x = 0$$

und dies ist die Gleichung für eine geradlinige Asymptote BAC, Fig. 43, die mit der Axe XY in dem Anfangspunkte der Abscissen einen Winkel von $45^\circ$ = BAY macht. Diese Linie nehme man für die Gleichung zur Axe an, indem man

$$y = \frac{u + t}{\sqrt{2}}; \text{ und } x = \frac{t - u}{\sqrt{2}}$$

setzt, so bekömmt man die Gleichung

$$\frac{(u + t)(tt - uu)^2 u}{4} + \frac{(tt - uu)(tt + uu)}{4} + 1 = 0$$

oder, wenn man mit 4 multiplicirt,

$$\begin{aligned} 0 = & \; t^5 u + t^4 uu - 2t^3 u^3 - 2ttu^4 + tu^5 + u^6 \\ & - 2t^4 \qquad\qquad\qquad\qquad + 2u^4 \\ & + 4 \end{aligned}$$

Aus dieser Gleichung findet man, wenn man $t = \infty$ setzt, $u = 0$, und es verschwinden daher alle übrige Glieder außer $t^5 u - 2t^4$, und man hat also für die krummlinige Asymptote

$$u = \frac{2}{t}.$$

Wegen des Faktors $x - y$ hat daher die gesuchte Curve die beyden ohne Ende fortlaufenden Schenkel bB und cC.

§. 216.

Nun nehme man die beyden gleichen Faktoren $x^2$, so erhält man, da

$$xx = \frac{xy(yy + xx) - 1}{y^3(y - x)}$$

ist, wenn man die gerade Linie AD auf die vorige XY senkrecht stellt, wodurch $y = t$, und $x = u$ wird, die Gleichung:

$$\begin{aligned} 0 = & \; t^4 u^2 - t^3 u^3 \\ & - t^3 u - tu^3 \\ & + 1 \end{aligned}$$

Diese Gleichung verwandelt sich, wenn man $t = \infty$ setzt, in

$$t^4 u^2 - t^3 u + 1 = 0$$

und hieraus ergeben sich folgende

$$u = \frac{1}{t}; \text{ und } u = \frac{1}{t^3}.$$

Es führt also der Faktor $x^2$ auf vier ohne Ende fortlaufende Schenkel, nemlich dD und eE, wegen der Gleichung $u = \frac{1}{t}$, und $\delta$D und $\varepsilon$E, welche auf eben den Seiten liegen, wegen der Gleichung $u = \frac{1}{t^3}$.

§. 217.

Für die drey gleichen Faktoren $y^3$ wird XY selbst zur Axe angenommen, und dadurch $t = x$, und $y = u$. Man hat also hier die Gleichung

$$o = - t^3u^3 + ttu^4 - t^3u - tu^3 + 1$$

die, wenn man $t = \infty$ setzt,

$$t^3u^3 + t^3u = o, \text{ oder } u(uu + 1) = o$$

giebt. Da die Gleichung $uu + 1 = o$ unmöglich ist, so findet man hier die einzige Asymptote $u = o$, die mit der Axe XY zusammenfällt, und deren Natur durch die Gleichung

$$t^3u = 1, \text{ oder } u = \frac{1}{t^3}$$

ausgedruckt wird. Es führt also der dreyfache Faktor $y^3$ nur auf zwey ohne Ende fortlaufende Schenkel yY und xX; und überhaupt wird daher die gesuchte Curve acht ohne Ende fortlaufende Schenkel haben, von welchen aber hier nicht der Ort ist zu zeigen, wie sie in dem endlichen Raume unter einander verbunden werden können.

§. 218.

Aus diesem und dem vorhergehenden Capitel läßt sich daher die Mannigfaltigkeit der ohne Ende fortlaufenden

Schenkel sehr deutlich erkennen. Denn einmal nähern sich entweder diese Schenkel der Curven einer geraden Linie als ihrer Asymptote, wie bey der Hyperbel, oder es kommt denselben keine geradlinige Asymptote zu, wie bey der Parabel. Im ersten Falle werden die Schenkel der Curven hyperbolische, im andern parabolische genannt. Ferner begreift jede dieser Classen eine unzählige Menge von Arten unter sich. So werden z. B. die Arten der hyperbolischen Schenkel durch folgende Gleichungen zwischen t und u, wovon t unendlich gesetzt wird, ausgedruckt:

$$u = \frac{A}{t};\ u = \frac{A}{tt};\ u = \frac{A}{t^3};\ u = \frac{A}{t^4};\ \text{ꝛc.}$$

$$u^2 = \frac{A}{t};\ u^2 = \frac{A}{tt};\ u^2 = \frac{A}{t^3};\ u^2 = \frac{A}{t^4};\ \text{ꝛc.}$$

$$u^3 = \frac{A}{t};\ u^3 = \frac{A}{tt};\ u^3 = \frac{A}{t^3};\ u^3 = \frac{A}{t^4};\ \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Die Arten der parabolischen Schenkel hingegen werden durch folgende Gleichungen angezeigt:

$$u^2 = At;\ u^3 = At;\ u^4 = At;\ u^5 = At;\ \text{ꝛc.}$$

$$u^3 = At^2;\ u^4 = At^2;\ u^5 = At^2;\ u^6 = At^2;\ \text{ꝛc.}$$

$$u^4 = At^3;\ u^5 = At^3;\ u^6 = At^3;\ u^7 = At^3;\ \text{ꝛc.}$$

ꝛc.

Es giebt aber eine jede von diesen Gleichungen zum wenigsten zwey ohne Ende fortlaufende Schenkel, wenn die Exponenten von t und u nicht beyde gerade Zahlen sind; dagegen, wenn sowohl der Exponent von t als der Exponent von u eine gerade Zahl ist, entweder gar kein ohne Ende fortlaufender Schenkel, oder vier dergleichen statt finden: jenes, wenn die Gleichung unmöglich, dieses, wenn sie reell ist.

---

Neuntes