Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Siebenzehntes Capitel. Von der Erfindung der Curven aus andern Eigenschaften.

Siebenzehntes Capitel.

Von der Erfindung der Curven aus andern Eigenschaften.

§. 391.

Die Aufgaben, womit wir uns im vorhergehenden Capitel beschäfftiget haben, waren von der Art, daß es sehr leicht war, Gleichungen zwischen rechtwinkligen oder schiefwinkligen Coordinaten zu finden, die ihre Auflösung enthielten. Jetzt wollen wir daher solche Eigenschaften betrachten, die sich nicht unmittelbar auf einander parallele Applicaten beziehen; wohin z. B. der Fall gehört, wenn eine gewisse Beschaffenheit gerader Linien, die aus einem gewissen Punkte nach der Curve gezogen worden, gegeben ist. Es sey C, Fig. 81, ein solcher Punkt, und aus demselben nach der Curve die geraden Linien CM und CN gezogen, und dabey eine gewisse auf diese Linie sich beziehende Eigenschaft gegeben. Hier muß man von dem bisherigen Verfahren, die Natur der Curve durch die Coordinaten auszudrucken, auf die Art abgehen, daß man die gedachten geraden Linien in die Gleichung bringt.

§. 392.

Da nun die Natur der Linien auf sehr viele andere Arten durch Gleichungen zwischen zwey veränderlichen Größen ausgedruckt werden kann, so kann man bey der gegenwärtigen Untersuchung die gerade Linie CM, die aus dem Punkte C nach der Curve gezogen worden, die Stelle der einen veränderlichen Größe vertreten lassen. Alsdann aber muß man noch eine andere veränderliche Größe haben, wodurch die Lage dieser geraden Linie CM bestimmt wird. Nimmt man nun zu diesem Zwecke eine durch den Punkt C gezogene gerade Linie CA zur Axe an, so kann der Winkel ACM, oder eine Größe, die von diesem Winkel abhängt, sehr füglich diese andere veränderliche Größe seyn. Es sey die gerade Linie $CM = z$, der Winkel $ACM = \phi$, und sein Sinus oder seine Tangente in der Gleichung befindlich: so ist offenbar, daß jede Gleichung zwischen z und $\sin.\phi$, oder $\tang.\phi$ die Natur der Curve AMN bestimmen werde. Es wird nemlich dadurch für jeden Winkel ACM die Lage der geraden Linie CM, und folglich der Punkt M der Curve bestimmt.

§. 393.

Wir müssen aber diese Art, die Curven auszudrucken, genauer erwägen, und es sey daher zuvörderst die gerade Linie $CM = z$ irgend eine Funktion des Sinus des Winkels ϕ. Ist diese Funktion einförmig, so könnte es scheinen, daß die gerade Linie CM der Curve nur in einem Punkte M begegnen werde, weil dem Winkel $ACM = \phi$ nur ein einziger Werth der geraden Linie CM zugehört. Allein wenn der Winkel ϕ um zwey rechte Winkel vergrößert wird, so bleibt die Lage der geraden Linie CM, die durch den Punkt C gezogen ist, dieselbe, nur daß sie nach der entgegengesetzten Seite zu gerichtet ist: und es giebt daher noch einen andern Durchschnittspunkt der geraden Linie CM mit der Curve, wenn auch gleich z durch eine einförmige Funktion des Sinus des Winkels ϕ bestimmt wird.

Es

Es sey nemlich P diese Funktion des sin. ϕ, so daß der Punkt M, Fig. 82, durch die Gleichung $z = P$ angegeben werde. Ferner werde ϕ um zwey rechte Winkel vergrößert, oder sein Sinus negativ genommen, und dadurch P in Q verwandelt, so daß nun $z = Q$ sey. Ist dieses geschehen, so giebt es einen neuen Durchschnitt eben der geraden aber verlängerten Linie CM mit der Curve, nemlich m, wenn man $Cm = Q$ nimmt.

§. 394.

Ob daher gleich P eine einförmige Funktion des Sinus des Winkels ϕ ist, so begegnet dennoch die gerade Linie CM, die unter einem gegebenen Winkel $ACM = \phi$ durch den Punkt C gezogen ist, der Curve in zwey Punkten M und m, es müßte denn $Q = - P$ seyn. Soll daher die gerade Linie CM der Curve nur in einem Punkte begegnen, so muß die Größe P eine ungerade Funktion des sin. ϕ seyn. Allein eben dieses findet statt, wenn P eine ungerade Funktion des cos. ϕ ist; und es sind demnach alle Curven, die von den aus dem Punkte C gezogenen geraden Linien in einem einzigen Punkte geschnitten werden, in der Gleichung $z = P$ enthalten, wenn P eine ungerade Funktion des Sinus oder des Cosinus des Winkels $ACM = \phi$ ist.

§. 395.

Da also die Curven, die von den aus dem Punkte C, Fig 81, gezogenen geraden Linien in einem einzigen Punkte geschnitten werden, in der Gleichung $z = P$ enthalten sind, wenn P eine ungerade Funktion des Sinus oder Cosinus des Winkels ϕ, oder eine solche Funktion ist, die einen negativen Werth bekommt, wenn man den Sinus oder den Cosinus des Winkels ϕ negativ nimmt: so läßt sich hieraus sehr leicht für dergleichen Curven eine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten finden. Fällt man nemlich aus dem Punkte M nach der Axe CA die senkrechte Linie MP herab, und setzt man dabey $CP = x$, und $PM = y$: so ist

$$\frac{y}{z} = \sin. \varphi; \text{ und } \frac{x}{z} = \cos. \varphi$$

Wenn also P eine ungerade Funktion von $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$ ist, so sind alle jene Curven in dieser Gleichung, $z = P$, enthalten, und es wird demnach, um von dem einfachsten Falle anzufangen

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y};$$

und, wenn man zu den höhern Potestäten fortgeht,

$$z = \frac{\alpha x}{z} + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma z}{x} + \frac{\delta z}{y} + \frac{\varepsilon x^3}{z^3} + \frac{\zeta x^2 y}{z^3} + \frac{\eta x y^2}{z^3} + \frac{\vartheta y^3}{z^3} + \frac{\iota xx}{yz} + \frac{\varkappa yy}{xz} + \frac{\lambda yz}{xx} + \text{ꝛc.}$$

§. 396.

Wenn man diese Gleichung durch z dividirt, so kommen allenthalben bloß gerade Potestäten von z vor, und da $z = \sqrt{(xx + yy)}$ ist, so bleibt, wenn man nun z wegschafft, keine Irrationalität weiter übrig, und man erhält eine Gleichung zwischen x und y. Es ist daher die allgemeine Gleichung so beschaffen, daß die Einheit, oder die beständige Größe, einer Funktion von -1 Dimensionen von x und y gleich ist. Ist P eine solche Funktion, so wird $C = P$, und also $\frac{1}{C} = \frac{1}{P}$. Aber $\frac{1}{P}$ ist eine Funktion von einer Dimension von x und y. Wenn also eine Funktion von einer Dimension von x und y einer beständigen

Größe

Größe gleich ist, so ist dieses eine Gleichung für Curven, die von den aus dem Punkte C gezogenen geraden Linien in einem einzigen Punkte geschnitten werden.

§. 397.

Wenn P eine Funktion von n Dimensionen von x und y, und Q eine Funktion von n + 1 Dimensionen ist, so ist $\frac{Q}{P}$ eine Funktion von einer Dimension; und es sind demnach alle Curven, die wir hier untersuchen, in der Gleichung

$$\frac{Q}{P} = c;\ \text{oder}\ Q = cP$$

enthalten. Bedeutet also n irgend eine Zahl, so ist die allgemeine Gleichung für diese Curven

$$\alpha x^{n+1} + \beta x^n y + \gamma x^{n-1} y^2 + \delta x^{n-2} y^3 + \varepsilon x^{n-3} y^4 + \text{etc.}$$
$$= c(Ax^n + Bx^{n-1}y + Cx^{n-2}y^2 + Dx^{n-3}y^3 C + \text{etc.})$$

und daher werden die Linien der einzelnen Ordnungen, die von den aus dem Punkte C gezogenen geraden Linien in nicht mehr als in einem einzigen Punkte geschnitten werden, durch folgende Gleichungen ausgedruckt:

I.

$$\alpha x + \beta y = c$$

II.

$$\alpha x^2 + \beta xy + \gamma yy = c(Ax + By)$$

III.

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma xy^2 + \delta y^3 = c(Ax^2 + Bxy + Cyy)$$

IV.

$$\alpha x^4 + \beta x^3 y + \gamma x^2 y^2 + \delta xy^3 + \varepsilon y^4 = c \times$$
$$(Ax^3 + Bx^2 y + Cxy^2 + Dy^3)$$

etc.

§. 398.

Zuvörderst also thut die gerade Linie der Aufgabe ein Genüge, und man weiß auch ohnehin von ihr, daß sie von andern aus einem gegebenen Punkte gezogenen geraden Linien in nicht mehr als in einem Punkte geschnitten werden kann. Die zweyte Gleichung ist die allgemeine Gleichung für die Kegelschnitte, wenn dieselben durch den Punkt C gehen; aber diesen Durchschnittspunkt rechnet man, weil er allen aus ihm gezogenen geraden Linien gemein ist, nicht mit. Da nun alle Kegelschnitte von einer geraden Linie in nicht mehr als in zwey Punkten geschnitten werden, so giebt aus dem angeführten Grunde jede gerade durch den Punkt C, wo er auch in der Curve genommen wird, gezogene Linie nur einen einzigen Durchschnittspunkt. Die Linien der folgenden Ordnungen gehen insgesammt durch den Punkt C, und auch bey ihnen wird dieser Durchschnittspunkt, da er allen durch C gezogenen geraden Linien gemein ist, nicht mitgerechnet. Dieserwegen sind in den angeführten Gleichungen von den Linien der höhern Ordnungen bloß diejenigen enthalten, welche von den aus dem Punkte C gezogenen geraden Linien nur in einem Punkte geschnitten werden. Auf diese Art haben wir also alle algebraische Curven angeführt, welche von den durch einen gegebenen Punkt C gezogenen geraden Linien in nicht mehr als in einem einzigen Punkte geschnitten werden.

§. 399.

Nun wollen wir uns zur Untersuchung solcher Curven wenden, die von den geraden Linien, welche aus einem gegebenen Punkt C gezogen werden, entweder in zwey Punkten, oder gar nicht geschnitten werden, welches letztere statt findet, wenn die Wurzeln der Gleichung, die den dop-

pel-

pelten Durchschnittspunkt anzeigt, imaginär werden. Da also die gerade Linie CM = z für einen jeden Winkel ACM = ϕ einen doppelten Werth bekommen muß, so wird dieselbe durch eine quadratische Gleichung bestimmt werden. Es sey also

$$zz - Pz + Q = 0$$

wo P und Q Funktionen des Winkels ϕ oder seines Sinus oder Cosinus bedeuten. Da nun die gerade Linie CM die Curve nur in zwey Punkten M und N schneiden soll, so müssen nicht nur P und Q einförmige Funktonen des Winkels ϕ seyn, sondern es dürfen auch, wenn man den Winkel ϕ um zwey rechte Winkel vergrößert, keine neue Durchschnittspunkte entstehen. Dieses findet statt, wenn P eine ungerade Funktion des Sinus oder des Cosinus von ϕ ist, so daß es negativ wird, wenn man den Sinus oder Cosinus negativ nimmt; Q aber muß eine gerade Funktion eben desselben Sinus oder Cosinus seyn.

§. 400.

Setzt man nun die rechtwinkligen Coordinaten CP = x, und PM = y, so wird $\frac{y}{z} = \sin. \phi$; und $\frac{x}{z} = \cos. \phi$, und es muß folglich

P eine ungerade Funktion von $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$; und

Q eine gerade Funktion von $\frac{x}{z}$ und $\frac{y}{z}$

seyn. Hieraus erhellet, daß $\frac{P}{z}$ eine rationale Funktion von x und y, und also eine homogene Funktion von -1 Dimensionen, und auf ähnliche Art, daß $\frac{Q}{zz}$ eine rationale

und

und homogene Funktion von x und y von -2 Dimensionen seyn werde. Wenn also

$$\left.\begin{array}{l} L \text{ eine homogene Funktion von } n+2 \text{ Dimensionen} \\ M \text{ eine homogene Funktion von } n+1 \text{ Dimensionen und} \\ N \text{ eine homogene Funktion von } n \text{ Dimensionen} \end{array}\right\} \text{von } x \text{ u. } y$$

ist: so giebt der Bruch

$$\frac{M}{L} \text{ eine passende Funktion für } \frac{P}{z}, \text{ und}$$

$$\frac{N}{L} \text{ eine passende Funktion für } \frac{Q}{zz}.$$

Da nun

$$zz - Pz + Q = 0$$

ist, so wird

$$1 - \frac{P}{z} + \frac{Q}{zz} = 0:$$

und es ist daher die allgemeine Gleichung für die Curven, die von den durch den Punkt C gezogenen geraden Linien in zwey Punkten geschnitten werden,

$$1 - \frac{M}{L} + \frac{N}{L} = 0, \text{ oder } L - M + N = 0$$

und darin $P = \frac{Mz}{L}$, und $Q = \frac{Nzz}{L} = \frac{N(xx+yy)}{L}$, und also P eine irrationale Funktion von x und y, weil $z = \sqrt{(xx+yy)}$, und Q eine rationale Funktion von keiner Dimension.

§. 401.

Hiernach ist es schon leicht, aus einer jeden Ordnung der Linien diejenigen zu bestimmen, welche von den durch einen gegebenen Punkt C gezogenen geraden Linien in zwey oder in gar keinem Punkte geschnitten werden. Für die zweyte Ord-

nung

nung nemlich setze man $n = 0$, so erhält man die allgemeinste Gleichung für die Kegelschnitte:

$$\alpha xx + \beta xy + \gamma yy - \delta x - \epsilon y + \zeta = 0$$

Man mag also den Punkt C annehmen, wo man will, so schneidet jede dadurch gezogene gerade Linie den Kegelschnitt entweder in zwey Punkten oder nirgends. Es kann sich indeß ereignen, daß ein Kegelschnitt von einer geraden Linie in nicht mehr als in einem Punkte geschnitten werde; allein da sich dieses unter den unzähligen durch den Punkt C möglichen geraden Linien nur in einem oder zwey Fällen zutragen kann, so ist diese Ausnahme von keiner Wichtigkeit; und dann kann man auch sagen, daß der zweyte Durchschnittspunkt unendlich weit entfernt sey, so daß daher wider die Allgemeinheit des obigen Satzes nichts fließt.

§. 402.

Damit aber deutlich werde, in welchen Fällen jene Ausnahme eintrete, so wollen wir die Gleichung zwischen x und y auf eine Gleichung zwischen z und den Winkel φ zurückführen, welche, da $y = z. \sin. \varphi$, und $x = z. \cos. \varphi$ ist, folgende seyn wird:

$$z^2 (\alpha (\cos. \varphi)^2 + \beta \sin. \varphi : \cos. \varphi + \gamma (\sin. \varphi)^2) - z \times$$
$$(\delta. \cos. \varphi + \epsilon. \sin. \varphi.) + \zeta = 0.$$

Hieraus erhellet, daß nur ein Durchschnittspunkt statt findet, wenn der Coefficient von z^2 gleich 0 wird, und dieses geschiehet, wenn

$$\alpha + \beta. \mathrm{tang}. \varphi + \gamma (\mathrm{tang}. \varphi)^2 = 0$$

ist. Wenn also diese Gleichung zwey reelle Wurzeln hat, so schneidet die durch den Punkt C gezogene gerade Linie die Curve nur in einem einzigen Punkte. Da aber die Wurzeln eben dieser Gleichung die Asymptoten der Curve anzeigen, so erhellet, daß die Hyperbeln von den geraden Linien, die der einen Asymptote parallel sind, nur in einem einzigen Punkte geschnitten werden, und dergleichen durch C gehende Linien giebt es nicht mehr als zwey; bey der Parabel hingegen gehöret bloß eine mit der Axe parallel gezogene gerade Linie unter die Ausnahme. Ist der Kegelschnitt eine Ellipse, so mag man den Punkt C annehmen wo man will, es schneidet jede durch ihn gezogene gerade Linie die Curve entweder gar nicht oder in zwey Punkten.

§. 403.

Die Linien der dritten Ordnung, die jene Eigenschaft haben, findet man, wenn man $n = 1$ setzt, und sie sind also in folgender Gleichung enthalten:

$$\alpha x^3 + \beta x^2 y + \gamma x y^2 + \delta y^3 - \varepsilon x^2 - \zeta x y - \eta y^2 + \vartheta x + \iota y = 0$$

Diese Gleichung begreift alle Linien der dritten Ordnung unter sich, und sie gehören insgesammt hieher, wofern nur der Punkt C in der Curve selbst genommen wird; denn macht man $x = 0$, so verschwindet zugleich auch y. Auf ähnliche Art muß bey den Linien der vierten Ordnung, die hieher gehören, der Punkt C nicht bloß in der Curve liegen, sondern auch ein doppelter Punkt derselben seyn; und es thun daher alle Linien der vierten Ordnung der Aufgabe ein Genüge, die einen doppelten Punkt haben, wenn der Punkt C in dem doppelten Punkte angenommen wird. Auf gleiche Art gehören hieher die Linien der fünften Ordnung, die einen dreyfachen Punkt haben, wenn C in diesem dreyfachen Punkte genommen wird, u. s. w. Dabey aber muß man bemerken, daß es allemal nicht mehr als einen Durchschnittspunkt gebe, wenn die durch C gezogene gerade Linie einer geradlinigen Asymptote oder der Axe einer para-

parabolischen Asymptote parallel ist, indem alsdann der andere Durchschnittspunkt unendlich weit entfernt liegt.

§. 404.

Dieses stimmt mit der Natur der Linien, die zu einer jeden Ordnung gehören, aufs vollkommenste überein. Denn da jede zu irgend einer Ordnung gehörige Linie in so viel Punkten von einer geraden Linie geschnitten werden kann, als der Exponent der Ordnung Einheiten enthält; (und sie wird auch davon in der That jedesmal in so viel Punkten geschnitten, wofern nicht einige Durchschnittspunkte imaginär werden, oder unendlich weit sich entfernen) und da wir hier alle Durchschnittspunkte, sie mögen reell oder imaginär seyn, in Rechnung bringen, und bloß diejenigen nicht mitzählen, die in den Punkt C fallen: so ist, da jede Linie von der Ordnung n in n Punkten geschnitten wird, klar, daß der Punkt C in einem so vielfachen Punkte, als die Zahl $n - 2$ Einheiten enthält, angenommen werden muß, wenn man einen doppelten Durchschnittspunkt erhalten will.

§. 405.

Nach diesen Betrachtungen ist es leicht, von den Aufgaben, die das Verhältniß jeder zweyer Werthe von z, CM und CN, betreffen, entweder die Auflösung zu finden, oder die Unmöglichkeit zu zeigen. Denn da die beyden Werthe von z, CM und CN, die Wurzeln der Gleichung

$$zz - Pz + Q = 0$$

sind, so ist ihre Summe $CM + CN = P$, und das Rechteck zwischen ihnen $CM.CN = Q$. Sollten daher zuvörderst Curven gesucht werden, wobey allenthalben die Summe $CM + CN$ eine beständige Größe wäre:

so müßte P eine beständige Größe seyn. Da aber wegen der Natur der Aufgabe jede durch C gezogene gerade Linie die Curve bloß in zwey Punkten schneiden darf, so muß nach § 399 nothwendiger Weise

$$P = \frac{Mz}{L} = \frac{M\sqrt{(xx + yy)}}{L}$$

seyn, und diese Größe kann als eine Irrational-Größe nie eine beständige werden. Es giebt daher keine Curve, die dieser Aufgabe ein Genüge thäte.

§. 406.

Wenn aber die Bedingung, daß die durch C gezogenen geraden Linien die Curve bloß in zwey Punkten schneiden sollen, weggelassen, und also solche Curven gesucht werden, bey welchen es zwar mehrere Durchschnittspunkte, aber darunter zwey, M und N, von der Beschaffenheit giebt, daß $CM + CN$ eine beständige Größe wird: so lassen sich unzählige Curven von dieser Art finden, wenn man $P =$ jener beständigen Größe $CM + CN = a$ setzt. Es wird nemlich alsdann

$$zz - az + Q = 0$$

wo Q die Funktion $\frac{Nzz}{L}$ bedeutet: und weil diese Gleichung irrational ist, so erhält man daraus durch Wegbringung der Irrationalität

$$a^2z^2 = (zz + Q)^2 \text{ oder } a^2 = zz(1 + \frac{N}{L})^2$$

oder

$$a^2L^2 = (xx + yy)(L^2 + 2LN + NN)$$

worin L eine homogene Funktion von $n + 2$, N aber eine homogene Funktion von n Dimensionen von x und y ist. Die einfachste Curve, wodurch die jetzige Aufgabe aufgelöset wird, findet man daher, wenn man

L

$$L = xx + yy;\ \text{und}\ N = \pm bb$$

setzt; und man bekömmt dadurch

$$aa(xx + yy) = (xx + yy \pm bb)^2$$

welches eine Gleichung für eine complexe Linie der vierten Ordnung ist, indem sie zwey Kreise ausdruckt, die den Mittelpunkt C gemein haben. Die einfachsten continuirlichen Curven aber, die dem Verlangten ein Genüge thun, gehören zu der sechsten Ordnung, und man findet sie, wenn man

$$L = \alpha xx + \beta xy + xy^2;\ \text{und}\ N = \pm bb$$

setzt. Dadurch erhält man

$$aa(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy)^2 = (xx + yy)(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy \pm bb)^2$$

Es sey $\alpha = 1$; $\beta = 0$; und $\gamma = 0$; so wird

$$yy + xx = \frac{aax^4}{x^4 \pm 2bbxx + b^4}$$

oder

$$y = \frac{x\sqrt{(aaxx - x^4 \mp 2bbxx - b^4)}}{xx \pm bb}$$

§. 407.

Wenn aber diese Auflösungen, wobey die durch C gezogenen geraden Linien die Curven in mehr als zwey Punkten schneiden, ausgeschlossen werden; und die Natur der Aufgabe scheint solches zu erfordern: so giebt es gar keine Curven, die der Aufgabe eine Genüge thun; und es läßt sich daher keine krumme Linie denken, welche von den durch C gezogenen geraden Linien bloß in zwey Punkten M und N so geschnitten würden, daß CM + CN eine beständige Größe wäre. Werden hingegen Durchschnittspunkte von der Art verlangt, daß das Rechteck CM . CN eine beständige Größe sey; eine Beschaffenheit, die dem Kreise allemal zukommt, der Punkt C mag angenommen werden, wo man will: so lassen sich unzählige Curven finden, wobey dergleichen statt haben. Denn es soll alsdann Q eine beständige Größe, und gleich dem Rechtecke CM . CN seyn, welches wir $= aa$ setzen wollen; allein diese Forderung enthält, da $Q = \frac{Nzz}{L}$, und folglich eine rationale Funktion von x und y ist, nichts widersprechendes.

§. 408.

Es sey also $\frac{Nzz}{L} = aa$, oder $L = \frac{Nzz}{aa} = \frac{N(xx+yy)}{aa}$; so sind alle Curven, die dieser Aufgabe ein Genüge thun, in der Gleichung:

$$\frac{N(xx+yy)}{aa} - M + N = 0$$

oder

$$Maa = N(xx+yy+aa)$$

enthalten, wo M eine homogene Funktion von $n+1$ Dimensionen, N aber eine homogene Funktion von n Dimensionen von x und y bedeutet, so daß $\frac{M}{N} = \frac{xx+yy+aa}{aa}$ eine Funktion von einer Dimension von x und y ist. Diese Gleichung begreift demnach alle Curven in sich, welche von den durch C gezogenen geraden Linien bloß in zwey Punkten M und N so geschnitten werden, daß das Rechteck CM . CN allenthalben eine beständige Größe und $= aa$ ist.

§. 409.

Da also $\frac{M}{N}$ eine homogene Funktion von einer Dimension von x und y ist, so findet man den einfachsten Fall, wenn man

$$\frac{M}{N} = \frac{\alpha x + \beta y}{a}$$

setzt. Dadurch bekommt man die Gleichung:

$$xx + yy - a(\alpha x + \beta y) + aa = 0$$

die allemal dem Kreise zugehört; und da sie eine allgemeine Gleichung zwischen rechtwinkligen Coordinaten ist, so fällt in die Augen, daß der Kreis der Aufgabe ein Genüge thut, wo man auch den Punkt C annehmen mag. Von den Kegelschnitten außer dem Kreise kann keiner hieher gerechnet werden. Aus den übrigen Ordnungen der Linien aber läßt sich eine unzählige Menge von Curven finden, so daß man zugleich alle erhält, die aus jeglicher Ordnung hieher gehören. So sind z. B. die Linien der dritten Ordnung, welche dieser Aufgabe ein Genüge thun, in der Gleichung enthalten:

$$\frac{\alpha xx + \beta xy + \gamma yy}{a(\delta x + \varepsilon y)} = \frac{xx + yy + aa}{aa}$$

oder

$$(\delta x + \varepsilon y)(xx + yy) - a(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy) + aa(\delta x + \varepsilon y) = 0.$$

Auf eine ähnliche Art lassen sich die Gleichungen der Linien der übrigen Ordnungen, die hieher gehören, finden.

§. 410.

Nun werde verlangt, von allen Curven, die von den durch C gezogenen geraden Linien in zwey Punkten geschnitten werden, diejenigen zu bestimmen, wo die Summe der Quadrate $CM^2 + CN^2$ eine beständige Größe $= aa$ ist. Da

$$CM + CN = P; \text{ und } CM.CN = Q$$

ist, so wird

$$CM^2 + CN^2 = PP - 2Q$$

und es muß folglich

$$PP - 2Q = 2aa; \text{ oder } Q = \frac{PP - 2aa}{2}$$

seyn. Nun ist

$$P = \frac{Mz}{L}; \text{ und } Q = \frac{Nzz}{L}$$

und es wird demnach

$$\frac{2Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} - 2aa$$

und folglich

$$N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz}$$

Da L eine Funktion von $n + 2$, M eine Funktion von $n + 1$, und N eine Funktion von n Dimensionen von x und y ist, so findet hierbey keine Schwierigkeit statt. Setzt man also für L und M dergleichen Funktionen, so wird $N = \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz}$, und es ist daher die allgemeine Gleichung für die Curven, die der Aufgabe ein Genüge thun:

$$L - M + \frac{MM}{2L} - \frac{aaL}{zz} = 0$$

oder

$$2LL(xx + yy) - 2LM(xx + yy) + MM(xx + yy) - 2aaLL = 0.$$

Wenn $M = 0$ ist, so giebt diese Gleichung den Kreis, und da der Mittelpunkt desselben in C fällt, so ist von selbst klar, daß er die Aufgabe auflöst.

§. 411.

Es sey $n + 1 = 0$, so daß M eine beständige Größe $= 2b$, und $L = \alpha x + \beta y$ werde. Alsdann entsteht eine Linie der vierten Ordnung, und ihre Gleichung ist:

$$(\alpha x + \beta y)^2 (xx + yy - aa) - 2b(\alpha x + \beta y)(xx + yy) + 2bb(xx + yy) = 0.$$

Eine andere Linie der vierten Ordnung erhält man, wenn man

$$L = xx + yy; \text{ und } M = 2(\alpha x + \beta y)a$$

setzt; denn alsdann giebt die Gleichung, durch $2xx + 2yy$ dividirt,

$$(xx + yy)^2 - 2a(\alpha x + \beta y)(xx + yy) + 2aa(\alpha x + \beta y)^2 - aa(xx + yy) = 0.$$

Wofern aber die Division durch $xx + yy$ sich nicht vornehmen läßt, so gehört die gefundene Gleichung (wenn man $2M$ für M setzt) nemlich

$$LL(xx + yy) - 2LM(xx + yy) + 2MM(xx + yy) - aaLL = 0$$

allemal zur Ordnung $2n + 6$; und man kann daher aus jeder geraden Ordnung Gleichungen für Curven finden, welche der Aufgabe ein Genüge thun. Ist aber L durch $xx + yy$ theilbar, d. h. ist $L = (xx + yy)N$, wenn N eine homogene Funktion von n Dimensionen von x und y bedeutet: so ergiebt sich noch eine andere allgemeine Gleichung, nemlich

$$NN(xx + yy)^2 - 2MN(xx + yy) + 2MM - aaNN \times (xx + yy) = 0:$$

und da diese zu der Ordnung $2n + 4$ gehört, so hat man für jede gerade Ordnung zwey Gleichungen für Curven, welche die angeführte Eigenschaft haben. Aus der sechsten Ordnung gehören z. B. die Curven hieher, die in folgenden zwey allgemeinen Gleichungen enthalten sind:

$$(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy)^2 (xx + yy - aa) - 2a(\delta x + \varepsilon y)(xx + yy)(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy - a(\delta x + \varepsilon y)) = 0$$

und

$$(\delta x + \varepsilon y)^2 (xx + yy)(xx + yy - aa) =$$
$$2a(\alpha xx + \beta xy + \gamma yy)((\delta x + \varepsilon y)(xx + yy) - a(\alpha xx + \beta yy + \gamma yy))$$

In den ungeraden Ordnungen der Linien giebt es also keine Curven, die dieser Aufgabe ein Genüge thäten.

§. 412.

Wenn nunmehr Curven gesucht werden sollen, worin nicht bloß die Summe der Quadrate, $CM^2 + CN^2$, sondern $CM^2 + CM.CN + CN^2$, oder überhaupt

$$CM^2 + n.CM.CN + CN^2$$

eine beständige Größe ist: so läßt sich diese Aufgabe auf eine ähnliche Art auflösen. Denn da

$$CM^2 + n.CM.CN + CN^2 = P^2 + (n-2)Q$$

ist, so wird, wenn man $P^2 + (n-2)Q = aa$ setzt,

$$Q = \frac{aa - PP}{n-2}$$

und diese Gleichung ist von allen Unbequemlichkeiten frey. Da also

$$P = \frac{Mz}{L}; \text{ und } Q = \frac{Nzz}{L}$$

ist, so wird

$$\frac{M^2z^2}{L^2} + \frac{(n-2)Nzz}{L} = aa$$

und folglich

$$N = \frac{aaL}{(n-2)zz} - \frac{M^2}{(n-2)L}.$$

Nun ist [§ 408] die Gleichung für die Curve

$$L - M + N = 0$$

und es ergiebt sich also für die Bedingung, daß $CM^2 + n.CM.CN + CN^2$ eine beständige Größe $= aa$ seyn soll, die Gleichung:

$$(n-2)LLzz-(n-2)LMzz+aaLL-M^2zz=0$$

oder, da $zz = xx + yy$ ist,

$$aaLL+(xx+yy)((n-2)L^2-(n-2)LM-M^2)=0$$

wo L eine Funktion von $m+2$, und M eine Funktion von $n+1$ Dimensionen von x und y ist. Läßt man N irgend eine homogene Funktion von m Dimensionen bedeuten, und setzt man dabey

$$L = (xx+yy)N$$

so findet man eine andere allgemeine Gleichung, nemlich:

$$aa(xx+yy)N^2+(n-2)(xx+yy)^2N^2$$
$$-(n-2)(xx+yy)MN-M^2=0.$$

§. 413.

Wenn $n=2$ gesetzt wird, und also $(CM+CN)^2 = aa$ seyn soll, so wird entweder

$$aaLL = (xx+yy)MM;\ \text{oder}\ MM = aa(xx+yy)N^2.$$

Da beyde Gleichungen homogen sind, so enthält jede von ihnen zwey oder mehr Gleichungen von dieser Form: $\alpha y = \beta x$; und es kann daher das Verlangte nicht anders als von zwey oder mehr durch den Punkt C gezogenen geraden Linien erfüllt werden. Da nun dieses dem Sinne der Aufgabe nicht gemäß ist, so erhellet, daß der gedachte Fall gar nicht statt finden kann; auch ist diese Unmöglichkeit schon vorher [§ 405] berührt worden, weil $CM+CN$ der beständigen Größe a gleich seyn müßte. Wird hingegen $n=-2$ gesetzt, so daß die Differenz MN selbst eine beständige Größe seyn würde, so ergeben sich diese zwey Gleichungen:

$$aaLL = (xx+yy)(2L-M)^2$$

und

$$aa(xx+yy)NN = (2(xx+yy)N-M)^2$$

Der einfachste Fall ist demnach der, wenn $N = 1$, und $M = 2bx$ gesetzt wird. Es wird nemlich alsdann

$$aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2$$

oder, wenn man $aa = 8cc$ nimmt,

$$(xx + yy)^2 = 2(cc + bx)(xx + yy) - bbxx;$$

folglich

$$xx + yy = cc + bx \pm c\sqrt{(cc + 2bx)}$$

und

$$y = \sqrt{(cc + bx - xx \pm c\sqrt{(cc + 2bx)})}.$$

§. 414.

Es giebt also unzählige Curven, die von den durch C gezogenen geraden Linien so in zwey Punkten M und N geschnitten werden, daß die Größe MN allenthalben dieselbe bleibt. Zuvörderst fällt in die Augen, daß dahin der Kreis gehört, dessen Mittelpukt in C liegt, indem dabey MN allenthalben dem Durchmesser gleich ist. Man findet aber diesen Kreis aus den allgemeinen Gleichungen, wenn man $M = 0$ setzt. Nach dem Kreise sind hieher zu rechnen die Linien der vierten Ordnung, die durch die Gleichungen:

$$aa(xx + yy) = 4(xx + yy - bx)^2$$

und

$$aaxx = (xx + yy)(2x - 2b)^2$$

ausgedruckt werden. Will man indeß diese Linien genauer kennen lernen, so muß man die angeführten Gleichungen auf andere zwischen z und dem Winkel ϕ zurückführen. Da also $xx + yy = zz$; $x = z. \cos. \phi$, und $y = z. \sin. \phi$ ist: so wird, wenn man $a = 2c$ setzt, einmal

$$cczz = (zz - bz. \cos. \phi)^2$$

oder

$$b. \cos. \phi \pm c = z;$$

und zweytens

$$cc(\cos.\phi)^2 = (z.\cos.\phi - b)^2$$

oder

$$z = \frac{b}{\cos.\phi} \pm c.$$

Hiernach lassen sich diese Curven sehr leicht construiren.

§. 415.

Soll nemlich die Curve, welche durch die Gleichung

$$z = b.\cos.\phi \pm c$$

ausgedruckt wird, construirt werden: so ziehe man durch C, Fig. 83, die gerade Linie ACB, und nehme darauf CD = b, und von D aus auf beyden Seiten DA = DB = c; wo denn zuvörderst die Punkte A und B in der gesuchten Curve liegen. Darauf fälle man auf eine durch C nach Belieben gezogene gerade Linie NCM aus D die Linie DL senkrecht, und schneide zu beyden Seiten LM = LN = c ab: so sind auch die Punkte M und N in der gesuchten Curve, und folglich allemal, wie in der Aufgabe verlangt wird, MN = 2c.

Hier muß bemerkt werden, daß die Curve, wenn CD = b kleiner als c ist, in C einen zugehörigen Punkt hat, Fig. 83.

Wenn aber b = c ist, so hat die Curve in C eine Spitze, und AC verschwindet, Fig. 84.

Und ist endlich b kleiner als c, so fällt der Punkt A zwischen C und B, und die Curve hat in C einen Knoten oder einen doppelten Punkt, Fig. 85. Uebrigens ist der Durchmesser dieser Curven die gerade Linie ACB, und die auf ihr senkrecht stehende gerade Linie ECF = 2c.

§. 416.

Außer diesen wieder in sich zurückkehrenden Curven der vierten Ordnung, thun auch die Linien mit unendlichen

Schen-

Schenkeln von eben dieser Ordnung der Aufgabe eine Genüge, welche in der Gleichung

$$z = \frac{b}{\cos.\varphi} \pm c$$

enthalten sind. Ihre Construction erhält man auf folgende Art. Man ziehe durch C, Fig. 86, eine gerade Linie CAB, mache CD = b, und DA = DB = c, wo denn die Punkte A und B in der Curve liegen. Darauf lege man durch D die gerade Linie EDF senkrecht auf CAB, und ziehe CL nach Belieben. Setzt man nun den Winkel DCL = φ, so wird

$$CL = \frac{b}{\cos.\varphi}$$

und macht man fortgesetzt LM = LN = c, so bestimmen die Punkte M und N die gesuchte Curve.

Aus dieser Construction erhellet, daß die auf die gedachte Art beschriebene Curve die Conchoide der Alten ist, in C den Pol, und die gerade Linie EF zur Asymptote hat, der sich vier ohne Ende fortlaufende Schenkel nähern. Es wird aber der Theil hBh die äußere, und gAg die innere Conchoide genannt, und überdem ist in C ein zugehöriger Punkt.

§. 417.

Dies sind die Curven der vierten Ordnung, welche der Aufgabe ein Genüge thun; es ist aber leicht, auch die Curven den höhern Ordnungen, die hieher gehören, darzustellen. Denn ist P eine ungerade Funktion des Sinus oder des Cosinus des Winkels φ, so giebt die Gleichung

$$z = bP \pm c$$

eine continuirliche Curve, die von allen durch C gezogenen geraden Linien in zwey Punkten M und N so geschnitten

wird

wird, daß allemal $MN = 2c$ ist. Es können aber diese Curven insgesammt zu dem Geschlechte der Conchoiden gerechnet werden, wenn man anstatt der Directrix EF die Curve setzt, welche durch die Gleichung $z = bP$ ausgedruckt wird. Nun haben wir oben [§ 394] gesehen, daß diese Gleichung die Curven in sich schließt, die von den durch C gezogenen geraden Linien in nicht mehr als in einem Punkte geschnitten werden. Da also die Größe c willkührlich ist, so lassen sich aus jeder Curve $z = bP$ unzählige Curven, die zu der gegenwärtigen Absicht sich schicken, darstellen.

418.

Man nehme nemlich nach Gefallen eine Curve CEDLF, Fig. 87, welche von allen durch den Punkt C gezogenen geraden Linien allemal nur in einem Punkte, z. B. D oder L, geschnitten werde. Dann schneide man auf diesen geraden verlängerten Linien CL, von L aus gleiche Stücke $LM = LN = c$ ab, wo denn die Punkte M und N in der gesuchten Curve liegen werden. Auf diese Art kann man durch eine stetige Bewegung die Curve AMPCQBNRC beschreiben, die von den durch C gezogenen geraden Linien so geschnitten wird, daß allenthalben MN eine beständige Größe, und $= 2c$ wird. Hierbey ist anzumerken, daß die beschriebene Curve, wenn die Curve CEDF eine aus C gezogene Kreislinie ist, eben dieselbe Linie der vierten Ordnung seyn wird, die wir zuerst, § 414, gefunden haben.

§. 419.

So haben wir also die Aufgabe aufgelöset, welche Curven AMN, Fig. 81, zu suchen befahl, die von den durch C gezogenen geraden Linien in den beyden Punkten M und N so geschnitten würden, daß allenthalben CM — CN

oder

oder $CM^2 - 2CM.CN + CN^2$ eine beständige Größe wäre. Jetzt wollen wir noch kürzlich den Fall erwägen, wenn

$$CM^2 + CM.CN + CN^2$$

eine beständige Größe seyn soll. Man muß dann in dem 412ten § $n = 1$ setzen, und dadurch erhält man entweder

$$aaLL = (xx + yy)(L^2 - LM + M^2)$$

wo L eine Funktion von $m + 1$, und M eine Funktion von m Dimensionen von x und y bedeutet; oder

$$aa(xx + yy)NN = (xx + yy)^2 NN - (xx + yy)MN + MM$$

wo M eine Funktion von einer um 1 höhern Dimension als N ist.

§ 420.

Zuvörderst fällt in die Augen, daß sich hier, wenn $M = 0$ gesetzt wird, ein Kreis ergiebt, dessen Mittelpunkt in dem Punkte C liegt; und da darin alle aus C nach der Curve gezogene gerade Linien gleich sind, so thut derselbe auch allen Aufgaben dieser Art ein Genüge. Für den gegenwärtigen Fall aber sind die einfachsten Curven nach dem Kreise die, die in der Gleichung enthalten sind, welche man aus der ersten durch die Setzung $M = b$, und $L = x$ enthält, nemlich

$$aaxx = (xx + yy)(xx - bx + bb)$$

oder

$$yy = \frac{xx(aa - bb + bx - xx)}{bb - bx + xx}.$$

Setzt man in der andern Gleichung $N = 1$ und $M = bx$, so bekommt man ebenfalls eine Linie der vierten Ordnung

$$aa(xx + yy) = (xx + yy)^2 - bx(xx + yy) + bbxx$$

oder

$$xx + yy = \tfrac{1}{2}bx + \tfrac{1}{2}aa \pm \sqrt{(\tfrac{1}{4}a^4 + \tfrac{1}{2}aabx - \tfrac{3}{4}bbxx)}$$

die

die eben sowohl als die vorige der Aufgabe ein Genüge thut.

§. 421.

Nach diesen Aufgaben wollen wir die höhern Potestäten der beyden Werthe von z aus der Gleichung $zz - Pz + Q = 0$ betrachten, wenn $P = \frac{Mz}{L}$, und $Q = \frac{Nzz}{L}$ ist, L eine homogene Funktion von $n + 2$, M eine homogene Funktion von $n + 1$, und N eine homogene Funktion von n Dimensionen von x und y bedeutet, und $x =$ der Abscisse CP, und $y =$ der Applicate PM ist. Es sey also die Aufgabe: Zwey Durchschnittspunkte M und N von der Art zu finden, daß $CM^3 + CN^3 = a^3$ sey. Da also wegen der Natur der Gleichung $zz - Pz + Q = 0$

$$CM^3 + CN^3 = P^3 - 3PQ$$

ist: so müßte

$$P^3 - 3PQ = a^3$$

seyn, allein diese Gleichung kann nicht statt finden, da P^3 und PQ irrationale Größen sind. Es läßt also diese Aufgabe, wenn man sie im strengsten Verstande nimmt, keine Auflösung zu. Bleibt indeß die Anzahl der Durchschnittspunkte unbestimmt, so daß auch mehr als zwey da seyn können: so lassen sich unzählige unter diese Aufgabe gehörige Curven finden, wenn man $Q = \frac{P^3 - a^3}{3P}$ setzt, und für P irgend eine Funktion des Sinus oder Cosinus des Winkels $ACM = \phi$ annimmt.

§. 422.

Wenn dagegen Curven gesucht werden, worin

$$CM^4 + CN^4 = a^4$$

ist, so muß man

$$P^4 - 4P^2Q + 2QQ = a^4$$

setzen, und diese Gleichung enthält, da darin keine Irrationalität ist, nichts widersprechendes. Es muß demnach

$$Q = PP + \sqrt{(\tfrac{1}{2}P^4 + \tfrac{1}{2}a^4)}$$

seyn, und diese Funktion kann man, des Wurzelzeichens ungeachtet, als eine einförmige Funktion betrachten, indem $\sqrt{(\tfrac{1}{2}P^4 + \tfrac{1}{2}a^2)}$ nicht negativ genommen werden darf, weil sonst die Werthe von z imaginär werden würden. Es ist daher

$$\frac{Nzz}{L} = \frac{MMzz}{LL} + \sqrt{\left(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \tfrac{1}{2}a^4\right)}$$

und da die Gleichung für die Curve $L - M + N = 0$, oder $zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{Nzz}{L} = 0$ ist, so wird

$$zz - \frac{Mzz}{L} + \frac{MMzz}{LL} + \sqrt{\left(\frac{M^4z^4}{2L^4} + \tfrac{1}{2}a^4\right)} = 0$$

Bringt man folglich die Irrationalität weg, so wird

$$\frac{z^4}{L^4}(LL - LM + MM)^2 = \frac{M^4z^4}{2L^4} + \tfrac{1}{2}a^4$$

oder

$$(xx + yy)^2(2(LL - LM + MM)^2 - M^4) = a^4L^4.$$

Diese Gleichung schließt alle hieher gehörige Curven in sich.

§. 423.

Sowohl diese Aufgabe als die ihr ähnlichen lassen sich auf eine andere leichtere Art auflösen, als oben § 372. Denn da $CM.CN = Q$ ist, so muß, wenn man die eine von diesen Linien $= z$ setzt, die andere $= \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$ werden, weil $Q = \frac{Nzz}{L}$ ist. Wenn daher

$$CM^n + CN^n = a^n$$

seyn

seyn soll, so wird

$$z^n + \frac{N^n z^n}{L^n} = a^n$$

und folglich

$$z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$$

und diese Gleichung ist rational und thut dem Verlangten ein Genüge, wenn n eine gerade Zahl ist. Ist aber n eine ungerade Zahl, so muß man, um die Irrationalität wegzuschaffen, die Quadrate nehmen; wodurch aber die Anzahl der Durchschnittspunkte verdoppelt wird, und eine Curve entsteht, welche die Aufgabe nicht in dem Sinne auflöset, als gefordert wird. Soll z. B.

$$CM^2 + CN^2 = a^2$$

seyn, so wird

$$zz = xx + yy = \frac{aaLL}{LL + NN}$$

und diese Gleichung stimmt mit der oben § 410 gefundenen

$$xx + yy = \frac{aaLL}{(L - M)^2 + LL}$$

überein, weil $L - M + N = 0$ ist. Ueberhaupt also erhält man, wenn

$$CM^n + CN^n = a^n$$

seyn soll, und n eine gerade Zahl ist, die Gleichung:

$$z^n = (xx + yy)^{\frac{n}{2}} = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n} = \frac{a^n L^n}{L^n + (L - M)^n}$$

wo L eine Funktion von $m + 2$, M eine Funktion von $m + 1$, und N eine Funktion von m Dimensionen von x und y bedeutet.

§. 424.

Eben diese Auflösung läßt sich auch aus der Betrachtung der Summe $CM + CN = P$ herleiten. Denn wenn man von den beyden Größen CM und CN die eine $= z$ setzt, so wird die andere $= P - z$. Soll nun $CM^n + CN^n$ eine beständige Größe seyn, so wird

$$z^n + (P - z)^n = a^n.$$

Wir haben aber gesehen, daß $P = \frac{Mz}{L}$, und $Q = \frac{Nzz}{L}$ ist, so daß $L - M + L = 0$ wird; und daraus fließt

$$z^n + \frac{z^n (M - L)^n}{L^n} = a^n$$

oder

$$z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + (M - L)^n}$$

oder

$$z^n = \frac{a^n L^n}{L^n + N^n}$$

oder, wenn man L wegschafft,

$$z^n = \frac{a^n M - N)^n}{(M - N)^n + N^n}.$$

Diese Gleichungen erfüllen die festgesetzte Bedingung, wenn n eine gerade Zahl ist, genau. Wenn aber n eine ungerade Zahl bedeutet, so giebt es zwar zwey Durchschnittspunkte M und N von der Art, daß $CM^n + CN^n = a^n$ ist; allein es sind dann auch noch zwey andere Durchschnittspunkte da, welchen eben diese Eigenschaft zukommt, so daß jede durch C gezogene gerade Linie das Verlangte zweymal thut.

§. 425.

Nach diesen Auseinandersetzungen ist es leicht, andere sehr schwere Aufgaben aufzulösen. Soll z. B. eine Curve gefunden werden, welche alle durch C gezogene gerade Linien so in zwey Punkten M und N schneiden, daß

CMn

$$CM^n + CN^n + \alpha . CM . CN (CM^{n-2} + CN^{n-2}) + \beta . CM^2 . CN^2 \times (CM^{n-4} + CN^{n-4}) \text{ ꝛc.}$$

eine beständige Größe $= a^n$ wird: so setze man den einen Werth $CM = z$, wodurch denn der andere $CN = \frac{Q}{z} = \frac{Nz}{L}$ wird. Gebraucht man nun diese Werthe, so ist die Gleichung, welche die Natur der gesuchten Curve ausdruckt, folgende:

$$z^n (L^n + N^n) + \alpha L N (L^{n-2} + N^{n-2}) + \beta . L^2 N^2 \times (L^{n-4} + N^{n-4}) + \text{ꝛc.} = \alpha^n L^n$$

Es ist aber $L - M + N = 0$, und L, M und N sind homogene Funktionen von x und y von $m + 2$, $m + 1$ und von m Dimensionen, so wie wir sie oben [§ 400] beschrieben haben. Hiernach ist entweder $L = M - N$, oder $N = M - L$, und so lassen sich unzählige Auflösungen hieraus ableiten.

§. 426.

Wir gehen zur Untersuchung solcher Curven fort, die von den durch den angenommenen Punkt C gezogenen geraden Linien in drey Punkten geschnitten werden. Die allgemeine Gleichung für diese Curven ist:

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$$

wo z die Entfernung eines jeden Punkts der Curve von dem Punkte C, und P, Q und R Funktionen des Sinus oder Cosinus des Winkels $ACM = \phi$ bedeuten. Es erhellet aber aus eben den Gründen, die wir oben [§ 394] gebraucht haben, daß, wenn nicht mehr als drey Durchschnittspunkte entstehen sollen, P und R ungerade, Q aber eine gerade Funktion von $\sin. \phi$ und $\cos. \phi$ seyn müssen. Setzt man daher die rechtwinkligen Coordinaten $CP = x$, und $PM = y$, so daß $xx + yy = zz$ wird, und läßt man

K, L, M, und L homogene Funktionen von x und y von $n + 3$, $n + 2$, $n + 1$ und von n Dimensionen bedeuten: so wird

$$P = \frac{Lz}{K};\ Q = \frac{Mzz}{K};\ \text{und}\ R = \frac{Nz^3}{K};$$

und dann hat man für die gesuchten Curven die allgemeine Gleichung:

$$K - L + M - N = 0$$

woraus erhellet, daß C ein so vielfacher Punkt der Curve seyn wird, als n Einheiten enthält.

§. 427.

Zuvörderst gehören also hieher alle Linien der dritten Ordnung, man mag den Punkt C außer der Curve annehmen, wo man will. Ferner begreift diese Gleichung auch alle Linien der vierten Ordnung unter sich, wenn der Punkt C in der Curve selbst angenommen wird. Drittens müssen dazu alle Linien der fünften Ordnung gerechnet werden, die einen doppelten Punkt haben, so bald der Punkt C in diesem doppelten Punkte angenommen wird. Und überhaupt thun alle Linien der folgenden höhern Ordnungen, die, wenn $n + 3$ die Ordnung der Gleichung anzeigt, einen so vielfachen Punkt haben, als n Einheiten enthält, dieser Bedingung ein Genüge.

§. 428.

Es seyn p, q und r die drey Werthe, welche z aus der Gleichung

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$$

für einen jeden Werth des Winkels $CAM = \phi$ erhält; so ist wegen der Natur der Gleichungen

$$P = p + q + r;\ Q = pq + pr + qr;\ \text{und}\ R = pqr.$$

Da also schon P und R durch x und y nicht rational ausgedruckt

druckt werden können, so ist offenbar, daß keine solche Curven möglich sind, worin entweder $p + q + r$, oder pqr eine beständige Größe wäre; und überhaupt kann keine ungerade Funktion von p, q und r einer beständigen Größe gleich gesetzt werden. Die geraden Funktionen hingegen können ohne alle Schwierigkeit einen beständigen Werth bekommen. Soll z. B.

$$pq + pr + qr = aa$$

seyn, so wird $Q = \frac{Mzz}{K} = aa$, und folglich

$$M(xx + yy) = aaK.$$

Bringt man diesen Werth in die Gleichung

$$K - L + M - N = o$$

so findet man die Gleichung, welche alle mit der gedachten Eigenschaft begabte Curven in sich begreift, nemlich:

$$M(xx + yy) - aaL + aaM - aaN = o$$

oder, wenn man M wegschafft,

$$(xx + yy)K - (xx + yy)L + aaK - (xx + yy)N = o.$$

§. 429.

Auf gleiche Art lassen sich auch andere ähnliche Aufgaben sehr leicht auflösen; z. B. wenn eine Curve gefunden werden soll, welche von den durch C gezogenen geraden Linien so in drey Punkten geschnitten wird, daß

$$p^2 + q^2 + r^2 = a^2$$

ist. Denn da

$$p^2 + q^2 + r^2 = P^2 - 2Q$$

und

$$P = \frac{Lz}{K}, \text{ und } Q = \frac{Mzz}{K}$$

ist, so wird

$$\frac{L^2 z^2}{K^2} - \frac{2 M z z}{K} = aa$$

oder

$$(xx + yy)L^2 - 2(xx + yy)KM = aaKK.$$

Nun haben wir aber für die Curven, die eine dreyfache Durchschneidung zulassen, die allgemeine Gleichung

$$K - L + M - N = 0$$

die von der Art ist, daß die höchste Zahl der Dimensionen von x und y die niedrigste um 3 übertrifft. Um also eine solche Gleichung zu bekommen, und zugleich

$$(xx + yy) L^2 - 2(xx + yy) KN = aaKK$$

zu erhalten, multiplicire man jene Gleichung durch $2(xx + yy)K$, um M wegbringen zu können. Dadurch erhält man folgende allgemeine dem gegenwärtigen Falle entsprechende Gleichung:

$$2(xx + yy)KK - 2(xx + yy)KL + (xx + yy) \times L^2 - aaKK - 2(xx + yy)KN = 0.$$

Es ist nemlich $2(xx + yy)KK$ das Glied, welches die meisten Dimensionen enthält, und zwar ist die Anzahl der Dimensionen von x und y, die darin vorkommen, $= 2n + 8$: und dagegen hat das Glied mit den wenigsten Dimensionen, oder $2(xx + yy)KN$ deren $2n + 5$, so wie es die Natur der Sache erfordert.

§. 430.

Da nun weder das höchste noch das niedrigste Glied verschwinden kann, so wollen wir, um die einfachste Curve zu finden, $n = 0$ setzen, und dabey sey

$$N = b^3;\ K = x(xx + yy);\ \text{und}\ L = 0.$$

Auf diese Art bekommt man die Gleichung:

$$2(xx + yy)^3 x^2 - aaxx(xx + yy)^2 - 2b^3 x(xx + yy)^2 = 0$$

die, durch $2x(xx + yy)^2$ dividirt,

$$x(xx + yy) - \tfrac{1}{2}aax - b^3 = 0$$

und also eine Gleichung vom dritten Grade giebt. Nimmt man hingegen

$$L \text{ nicht } = 0, \text{ sondern } L = 2c(xx + yy)$$

so erhält man folgende Gleichung des vierten Grades:

$$xx(xx + yy) - 2cx(xx + yy) + 2cc(xx + yy) - \tfrac{1}{2}aaxx - b^3x = 0$$

oder

$$xx(xx + yy) + (2c - x)^2(xx + yy) = aaxx + 2b^3x.$$

Auf ähnliche Art lassen sich aus den höhern Ordnungen eine Menge anderer Curven finden, die der Aufgabe ein Genüge thun.

§. 431.

Auf ähnliche Art kann man auch die Curven kennen lernen, worin

$$p^4 + q^4 + r^4$$

eine beständige Größe ist. Da nemlich

$$p^4 + q^4 + r^4 = P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR$$

ist, so muß man

$$P^4 - 4P^2Q + 2QQ + 4PR = c^4$$

setzen. Es wird also

$$z^4(L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2 + 4K^2LN) = c^4K^4$$

und folglich

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - z^4(L^4 - 4KL^2M + 2K^2M^2)$$

Setzt man nun den hieraus für N entstehenden Werth in die Gleichung

$$K - L + M - N = 0$$

so bekommt man eine allgemeine Gleichung für die Curven, welche der angeführten Bedingung ein Genüge thun.

§. 432.

Es kann aber außer der Bedingung, daß

$$p^4 + q^4 + r^4 = c^4$$

seyn soll, auch zugleich die erfüllt werden, daß

$$p^2 + q^2 + r^2 = a^2$$

sey. Wegen dieser muß nemlich

$$zzL^2 - 2zzKM = aaKK$$

und folglich

$$2zzKM = zzL^2 - aaKK$$

seyn. Da nun ferner

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 - L^4z^4 + 4KL^2Mz^4 - 2K^2M^2z^4$$

ist, so wird

$$4K^2LNz^4 = c^4K^4 + L^4z^4 - 2aaK^2L^2z^2 - 2K^2M^2z^4$$

und

$$4K^2LMz^4 = 2KL^3z^4 - 2aaK^3Lzz.$$

Bringt man diese Werthe statt M und N in die Gleichung

$$K - L + M - N = 0$$

oder

$$4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 4K^2LMz^4 - 4K^2LNz^4 = 0$$

so erhält man folgende Gleichung für die Curven:

$$4K^3Lz^4 - 4K^2L^2z^4 + 2KL^3z^4 - 2a^2K^3Lzz - c^4K^4$$
$$- L^4z^4 + 2a^2K^2L^2zz + 2K^2M^2z^4 = 0$$

Allein wegen

$$KMzz = \tfrac{1}{2}L^2zz - \tfrac{1}{2}aaKK$$

ist

$$2K^2M^2z^4 = \tfrac{1}{2}L^4z^4 - aaK^2L^2zz + \tfrac{1}{2}a^4K^4$$

und so ergiebt sich für die gesuchten Curven diese allgemeine Gleichung:

$$8K^3Lz^4 - 8K^2L^2z^4 + 4KL^3z^4 - 4a^2K^3Lzz - 2c^4K^4$$
$$- L^4z^4 + 2a^2K^2L^2zz + a^4K^4 = 0$$

§. 433.

Da K eine homogene Funktion von x und y seyn muß, worin die Zahl der Dimensionen um 1 größer ist als in L; so findet man die einfachste Curve mit drey Durchschnittspunkten, wobey

$$p^2 + q^2 + r^2 = a^2$$

und

$$p^4 + q^4 + r^4 = c^4$$

ist, wenn man $K = zz$, und $L = bx$ setzt. Es ist demnach

$$8bxz^6 - 8bbxxz^4 + 4b^3x^3z^2 - 4a^2bxz^4 - 2c^4z^4 - b^4x^4 + 2a^2b^2x^2z^2 + a^4z^4 = 0$$

Da $zz = xx + yy$ ist, so ist diese Gleichung rational, und giebt eine Linie der siebenten Ordnung, worin der Punkt C ein vierfacher Punkt ist. Man findet aber noch eine andere Linie der siebenten Ordnung, wenn man $K = x$, und $L = b$ setzt. Es wird nemlich dadurch

$$8bx^3z^4 - 8bbxxz^4 + 4b^3xz^4 - 4aabx^3zz - 2c^4x^4 - b^4z^4 + 2aabbxxzz + a^4x^4 = 0$$

oder

$$z^4 = \frac{4aabx^3zz - 2aabbxxzz + 2c^4x^4 - a^4x^4}{8bx^3 - 8bbxx + 4b^3x - b^4}$$

und hieraus wird

$$zz = \frac{2aabx^3 - aabbxx}{b(2x-b)(4xx-2bx+bb)} \pm \frac{xx\sqrt{(2bx-bb)(2c^4(bb-2bx+4xx)-2a^4(bb-2bx+2xx))}}{b(2x-b)(4xx-2bx+bb)}.$$

§. 434.

Nun könnten wir fortgehen zu Curven, die von den durch den Punkt C gezogenen geraden Linien in vier

Punkten geschnitten würden, und darunter diejenigen bestimmen, welche gewisse gegebene Eigenschaften hätten. Allein, so bald der Weg, den wir bisher gegangen sind, deutlich vor Augen gestellt wird: so kann sich dabey nicht die geringste Schwierigkeit finden: und man wird die hier denkbaren Aufgaben entweder mit leichter Mühe auflösen, oder sogleich entdecken, daß sie keine Auflösung zulassen. Ich verweile daher hierbey nicht länger, sondern gehe zu einer andern Untersuchung über die krummen Linien fort.

Acht-