Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Achtzehntes Capitel. Von der Aehnlichkeit und Verwandschaft der Curven.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Achtzehntes Capitel.

Von der Aehnlichkeit und Verwandschaft der Curven.

§. 435.

Eine jede Gleichung, durch welche eine Curve ausgedruckt werden soll, muß außer den rechtwinkligen Coordinaten x und y eine oder mehre beständige Größen, z. B. a, b, c, rc. enthalten, die beständige Linien bezeichnen, und mit den veränderlichen Größen x und y zusammen genommen allenthalben eine und dieselbe Anzahl von Dimensionen ausmachen. Denn wenn irgend ein Glied ein Produkt aus n Linien enthält, so müssen auch in jedem andern Gliede eben so viel Linien in einander multiplicirt worden seyn, weil, wenn dies nicht wäre, heterogene Größen mit einander verglichen werden müßten, welches nicht möglich ist. Es müssen also in jeder Gleichung, wodurch eine Curve ausgedruckt werden soll, die beständigen Linien mit den veränderlichen allenthalben eine und dieselbe Anzahl von Dimensionen hervorbringen; es wäre denn, daß eine oder die andere von den beständigen durch die Einheit oder eine andere absolute Zahl ausgedruckt worden wäre. Dies vorausgesetzt, so würden, wenn in einer Gleichung keine beständige Linien vorkämen, x und y allein allenthalben dieselbe Anzahl von Dimensionen geben, und folglich eine homogene Funktion ausmachen. Wir haben aber schon oben gesehen, daß solche Gleichungen keine Curven ausdrucken, sondern

Glei-

Gleichungen für mehrere gerade Linien sind, die sich einander in einem und demselben Punkte schneiden.

§. 436.

Wir wollen also eine Gleichung betrachten, worin außer den beyden veränderlichen Größen x und y nicht mehr als die einzige beständige Linie a vorkommt, so daß darin die drey Linien a, x, und y allenthalben dieselbe Anzahl von Dimensionen haben. Eine solche Gleichung giebt, je nachdem der beständigen Linie a dieser oder jener Werth beygelegt wird, unzählige Curven, die sich von einander bloß durch die Größe unterscheiden, und übrigens durchaus einander ähnlich sind. Alle Curven, die auf diese Art in einer und derselben Gleichung enthalten sind, müssen nothwendig zu einem Geschlecht gerechnet, und als ähnliche Curven betrachtet werden; und es findet sich bey ihnen kein anderer Unterschied, als der, den man bey Kreisen von verschiedenen Halbmessern wahrnimmt.

§. 437.

Um diesen Begriff von der Aehnlichkeit der Curven an einem Beyspiele zu erläutern, wollen wir eine einzelne Gleichung betrachten, welche außer den veränderlichen Größen x und y nur eine beständige Linie a enthält, die Parameter heißen mag; folgende nemlich:

$$y^3 - 2x^3 + ayy - aax + 2aay = 0.$$

Es sey AC, Fig. 88, der Werh des Parameters a, und bey $AC = a$ die Linie AMB die Curve, welche in der Gleichung enthalten ist, wenn man die gerade Linie AB zur Axe nimmt, und die Coordinaten $AP = x$, und $PM = y$ setzt. Nun gebe man dem Parameter a irgend einen andern Werth $ac = a$, Fig. 89, und dabey sey amb die Curve, wel-

welche nunmehr durch die angeführte Gleichung ausgedruckt wird. Unter diesen Voraussetzungen sind die beyden Curven AMB und amb einander ähnlich. Denn bleibt

$$AC = a;\ AP = x;\ \text{und}\ PM = y;$$

und setzt man

$$ac = \frac{1}{n} AC = \frac{a}{n}$$

so wird, wenn man $ap = \frac{1}{n} AP = \frac{x}{n}$ nimmt,

$$pm = \frac{1}{n} PM = \frac{y}{n}.$$

Setzt man nemlich in der gegebenen Gleichung $\frac{a}{n}$, $\frac{x}{n}$, und $\frac{y}{n}$ für a, x, und y, und multiplicirt darauf alle Glieder durch n^3: so bringt man eben dieselbe Gleichung wieder hervor.

§. 438.

Es haben also die ähnlichen Curven diese Eigenschaft, daß dabey, wenn man die Abscissen AP, ap in dem Verhältnisse der Parameter AC und ac nimmt, die Applicaten PM und pm in eben demselben Verhältnisse stehen; und dies dient zugleich, um die Natur der Aehnlichkeit deutlicher vor Augen zu legen. Nimmt man nemlich

$$AP : ap = AC : ac$$

so wird auch

$$PM : pm = AC : ac.$$

Da nun hieraus $AP : PM = ap : pm$ ist; so sind diese Curven in eben dem Sinne einander ähnlich, in welchem man überhaupt geometrischen Figuren Aehnlichkeit beylegt, und haben, die Größe ausgenommen, alle übrige Eigenschaften mit einander gemein. Denn macht man AP

und

und ap homolog, oder den Parametern AC und ac proportional: so stehen nicht nur auch PM und pm in dem Verhältnisse der Parameter, sondern auch alle andere auf ähnliche Art gezogene Linien: ja es ist selbst der Bogen $AM : am = AC : ac$. Ferner ist das Verhältniß der Räume APM und apm zwiefach so hoch als das Verhältniß der Parameter, oder

$$APM : apm = AC^2 : ac^2$$

und wenn man zwey homologe Punkte O und o nimmt, so daß

$$AO : ao = AC : ac$$

ist; und aus denselben unter gleichen Winkeln AOM, aom nach den Curven die geraden Linien OM und om zieht: so ist auch

$$OM : om = AC : ac.$$

Endlich sind auch wegen der Aehnlichkeit die Tangenten für die homologen Punkte M und m gegen die Axe unter einerley Winkel geneigt, und selbst die Krümmungshalbmesser haben zu einander das Verhältniß der Parameter AC und ac.

§. 439.

Hieraus erhellet, daß alle Kreise ähnliche Figuren sind, da sie insgesammt durch die Gleichung $yy = 2ax - xx$ ausgedruckt werden; und auf gleiche Art sind auch alle in der Gleichung $yy = ac$ enthaltene Curven, oder alle Parabeln ähnliche Figuren. Bestimmt man nun aus solchen Gleichungen, als wir jetzt für ähnliche Curven gehabt haben, und worin die Coordinaten x und y mit dem Parameter a allenthalben einerley Anzahl von Dimensionen hervorbringen, den Werth von y: so findet man dafür eine homogene Funktion von a und x von einer Dimension. Umgekehrt muß also auch die Gleichung:

y=

$$y = P$$

wenn P eine homogene Funktion von a und x von einer Dimension bedeutet, unzählige einander ähnliche Curven enthalten, welche man findet, wenn man dem Parameter a nach und nach verschiedene Werthe beylegt. Auf ähnliche Art wird auch die Abscisse x aus solchen Gleichungen eine homogene Funktion von a und y von einer Dimension, und der Parameter eine Funktion von einer Dimension von x und y.

§. 440.

Ist aber irgend eine Curve AMB gegeben, so lassen sich auf sehr leichte Art unzählige andere ihr ähnliche beschreiben. Man nehme irgend ein Verhältniß, welches die homologen Seiten der gegebenen und der zu beschreibenden Curve haben sollen, und setze dasselbe $= 1 : n$. Wird nun die Curve AMB durch die Coordinaten x und y auf die Axe AB bezogen, so schneide man auf der ähnlichen Axe ab die Abscisse ap so ab, daß

$$AP : ap = 1 : n$$

werde, und errichte dann aus p die senkrechte Applicate pm, so, daß auch

$$PM : pm = 1 : n$$

sey. Ist dies geschehen, so liegt der Punkt m in der ähnlichen Curve amb, so, daß M und m homolog sind. Oder man kann auch von irgend einem festen Punkte O ausgehen. Denn nimmt man in der Curve, die man beschreiben will, einen ähnlichen festen Punkt o an, und macht dabey beständig den Winkel $aom = AOM$, und om so groß, daß $OM : om = 1 : n$ ist: so liegt der Punkt m ebenfalls in der ähnlichen Curve amb. Auf diese Art lassen sich also, nachdem man das Verhältniß $1 : n$ nach Belieben

lieben angenommen hat, ähnliche Curven beschreiben; man hat aber zu diesem Zwecke mechanische Instrumente erfunden, wodurch man, wenn Figuren gegeben sind, andere diesen ähnliche von jeder Größe auf eine bequemere Weise darstellen kann.

§. 441.

Wenn also die Natur einer Curve AM durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten $AP = x$, und $PM = y$ ausgedruckt wird, so läßt sich daraus sehr leicht die Gleichung für die ähnliche Curve am finden. Denn setzt man die homologe Abscisse $ap = X$, und die Applicate $pm = Y$, so ist aus der Construction

$$x : X = 1 : n; \text{ und } y : Y = 1 : n$$

und folglich

$$x = \frac{X}{n}; \text{ und } y = \frac{Y}{n}.$$

Bringt man nun diese Werthe in die Gleichung zwischen x und y, so erhalt man dadurch die zwischen X und Y, wodurch die ähnliche Curve ausgedruckt wird. Wenn also in dieser neuen Gleichung bloß die Coordinaten X und Y nebst dem Buchstaben n betrachtet werden, um die Dimensionen zu zählen, so ist die Anzahl der Dimensionen allenthalben $= 0$; oder multiplicirt man die Gleichung, um die Brüche wegzuschaffen, durch irgend eine Potestät von n, so entsteht eine andere, worin die drey Buchstaben X, Y und n allenthalben dieselbe Anzahl von Dimensionen haben. Wir haben aber oben [im Anfange dieses Capitels] gesehen, daß in einer jeden Gleichung für ähnliche Curven die beyden Coordinaten mit der beständigen Größe, durch deren Veränderung ähnliche Curven entstehen, allenthalben dieselbe Anzahl von Dimensionen ausmachen; und es

ist

ist dies also ein Kennzeichen der Gleichungen, welche ähnliche Curven ausdrucken.

§. 442.

Da die homologen Absciſſen und Applicaten bey ähnlichen Curven in gleichem Verhältniſſe wachſen und abnehmen, ſo können die krummen Linien, bey welchen ſich die Absciſſen und Applicaten nach verſchiedenen Verhältniſſen richten, nicht einander ähnlich genannt werden. Da indeſſen zwiſchen dieſen Curven doch noch immer eine gewiſſe Verbindung ſtatt findet, ſo wollen wir ſie verwandte Curven nennen; und es begreift daher die Verwandſchaft der krummen Linien die Aehnlichkeit derſelben als eine Art unter ſich. Es werden nemlich verwandte Curven einander ähnlich, wenn die beyden Verhältniſſe, davon das eine bey den Absciſſen, das andere bey den Applicaten ſtatt fand, gleich werden. Es laſſen ſich daher aus jeder gegebenen Curve AMB, Fig. 88, unzählige verwandte Curven amb, Fig. 89, auf folgende Art finden. Man nehme die Absciſſe ap, ſo, daß

$$AP : ap = 1 : m$$

ſey. Dann errichte man die Applicate pm, ſo daß

$$PM : pm = 1 : n$$

werde. Verändert man nun das eine oder das andere von dieſen Verhältniſſen, oder beyde, ſo findet man dadurch unzählige Curven, die insgeſammt der Curve AMB verwandt ſind.

§. 443.

Es werde die Natur der gegebenen Curve AMB durch irgend eine Gleichung zwiſchen den rechtwinkligen Coordinaten $AP = x$, und $PM = y$ ausgedruckt, und in der auf die gedachte Art beſchriebenen verwandten Curve amb die Abscisse $Ap = X$, und die Applicate $pm = Y$ gesetzt: so wird, weil

$$x : X = 1 : m; \text{ und } y : Y = 1 : n$$

ist

$$x = \frac{X}{m}; \text{ und } y = \frac{Y}{n}.$$

Bringt man daher diese Werthe in die zwischen x und y gegebene Gleichung, so erhält man eine andere zwischen X und Y für die verwandten Curven. Um die Natur dieser Gleichung genauer kennen zu lernen, wollen wir annehmen, die für die Curve AMB gegebene Gleichung sey so beschaffen, daß die Applicate y irgend einer Funktion von x, die wir $= P$ setzen wollen, gleich, und also $y = P$. Wenn man also in P anstatt x den Bruch $\frac{X}{m}$ setzt, so wird P eine Funktion von X und m von keiner Dimension; und es muß daher die allgemeine Gleichung für die verwandten Curven so beschaffen seyn, daß $\frac{Y}{n}$ eine Funktion von keiner Dimension von X und m, oder welches einerley ist, daß eine Funktion von keiner Dimension von Y und n einer Funktion von keiner Dimension von X und m gleich ist.

§. 444.

Dieser **Unterschied** zwischen ähnlichen und verwandten Curven ist **vorzüglich** deswegen zu merken, weil die Curven, die in Rücksicht auf eine Axe oder einen festen Punkt **einander ähnlich** sind, auch in Ansehung aller übrigen **Axen oder** homologen Punkte ähnlich bleiben; dahingegen die Curven, welche bloß zu den einander verwandten gehören, solches nur in Ansehung derer Axen sind, worauf sie bezogen werden, und daß man dabey nicht nach Willkühr an-

andere Axen oder homologe Punkte annehmen darf, um darauf die Verwandschaft zu beziehen. Uebrigens ist zu bemerken, daß, so wie alle ähnliche Curven zu einerley Ordnung, ja selbst zu einem Geschlechte gehören, so auch die verwandten Curven stets unter einem und denselben Geschlechte begriffen sind. Um dies deutlicher zu machen, wollen wir die beschriebne Aehnlichkeit und Verwandschaft an einigen von den bekanntesten Curven erläutern,

§. 445.

Es sey also die gegebene Curve ein Kreis, der auf den Durchmesser bezogen, und durch die Gleichung

$$yy = 2cx - xx$$

ausgedruckt werde. Man setze

$$x = \frac{X}{n}; \text{ und } y = \frac{Y}{n}$$

so enthält die dadurch entstehende Gleichung zwischen X und Y alle ähnliche Curven. Man findet aber durch die angeführten Substitutionen

$$\frac{Y^2}{n^2} = \frac{2cX}{n} - \frac{XX}{nn}$$

oder

$$Y^2 = 2ncX - XX$$

woraus erhellet, daß alle ähnliche Figuren ebenfalls Kreise sind, deren Durchmesser durch $2nc$ ausgedruckt wird. Um aber die dem Kreise verwandten Curven zu finden, setze man

$$x = \frac{X}{m}; \text{ und } y = \frac{Y}{n}.$$

Hiedurch erhält man die Gleichung

$$\frac{Y^2}{n^2} = \frac{2cX}{m} - \frac{XX}{mm}$$

 oder

oder

$$m^2Y^2 = 2mn^2cX - nnXX.$$

Da dieses eine allgemeine Gleichung für die Ellipsen ist, die auf die eine von den Hauptaxen bezogen werden, so erhellet, daß alle Ellipsen dem Kreise verwandte Curven sind; auch werden daher alle Ellipsen unter einander verwandt. Auf eine ähnliche Art findet man, daß auch die Hyperbeln als einander verwandte Curven angesehen werden müssen. Wenn hingegen bey den Ellipsen und Hyperbeln beyde Hauptaxen einerley Verhältniß zu einander haben, so sind sie ähnliche Curven.

§. 446.

Was die durch die Gleichung $yy = cx$ ausgedruckte Parabel betrifft, so ist klar, daß alle ihr ähnliche Curven ebenfalls Parabeln seyn werden, so wie auch, daß alle Parabeln einander ähnliche Curven sind. Betrachtet man aber die verwandten Parabeln, indem man

$$y = \frac{Y}{n}; \text{ und } x = \frac{X}{m}$$

setzt: so erhält man dadurch die Gleichung:

$$Y^2 = \frac{n^2c}{m} X;$$

und da dies ebenfalls eine Gleichung für eine Parabel ist, so erhellet, daß alle verwandte Parabeln auch einander ähnlich sind, so daß in diesem Falle die Aehnlichkeit eben so weit sich erstreckt als die Verwandschaft. Eben dieses findet bey allen Curven statt, deren Natur durch eine Gleichung ausgedrückt wird, welche nur aus zwey Gliedern besteht; dergleichen sind:

$$y^3 = ccx; \; y^3 = cxx; \; y^2x = c^3; \text{ ꝛc.}$$

Bey dergleichen Curven, sie mögen parabolisch oder hyperbo bolisch seyn, findet kein Unterschied zwischen Aehnlichkeit und Verwandschaft statt; allein diese Beschaffenheit findet sich auch nur bey diesen Curven und bey keinen andern, wie wir solches bereits beym Kreise und der Ellipse bemerkt haben.

§. 447.

Legt man, wenn in einer gegebenen Gleichung zwischen x und y mehrere beständige Größen a, b, c rc. befindlich sind, allen diesen beständigen Größen bestimmte Werthe bey: so erhält man daraus nicht mehr als eine einzige Curve; nimmt man aber eine der gedachten beständigen Größen, z. B. a, veränderlich an, und legt derselben nach und nach verschiedene bestimmte Werthe bey, so findet man, da jeder Werth eine besondere Curve giebt, daraus unzählige krumme Linien, die, wenn außer a keine andere beständige Linien in der Gleichung sind, zugleich einander ähnlich, im entgegenstehenden Falle aber einander unähnlich seyn werden. Wenn hingegen außer a auch noch eine andere beständige Größe b veränderlich genommen wird, so entspringen wegen der Veränderlichkeit von b aus jedem Werthe von a unzählige Curven; und man bekommt demnach, wenn zwey beständige Größen a und b veränderlich genommen werden, unendlich mal unendlich viel von einander verschiedene Curven. Wenn außerdem noch eine dritte beständige Größe veränderlich gemacht wird, so wird die Anzahl der dann möglichen Curven noch unendlichmal größer, und überhaupt also die Anzahl dieser Curven durch eine desto höhere Potestät des Unendlichen ausgedruckt, je größer die Menge der beständigen Größen ist, die man zu veränderlichen macht.

§. 448.

Diese unendlich vielen Curven, die sich aus einer Gleichung ergeben, wenn man darin nur eine beständige Linie veränderlich annimmt, wollen wir jetzt etwas genauer betrachten. Man findet aber aus einer solchen Gleichung, wenn man dieselbe Axe und so auch den Anfangspunkt der Absciſſen beybehält, nicht nur die gedachten unzähligen Curven, sondern man lernt daraus auch die Lage derselben kennen, so, daß durch sie ein gewisser Raum ausgefüllet wird, in welchem kein Punkt angegeben werden kann, durch welchen nicht eine von jenen unzähligen Curven gehe. Je nachdem aber jene Gleichung beschaffen ist, je nachdem werden die erwähnten unzähligen Curven auch einander entweder ähnlich oder unähnlich seyn, wie aus dem Vorhergehenden bekannt ist; ja es kann sich ereignen, daß alle diese Curven nicht bloß einander ähnlich, sondern selbst gleich, und bloß in Ansehung ihrer Lage von einander verschieden sind. So giebt die Gleichung:

$$y = a + \sqrt{(2cx - xx)}$$

wenn man a veränderlich annimmt, unzähige gleiche Kreise, deren Halbmesser $= c$ ist, und deren Mittelpunkte in einer geraden auf der Axe senkrechten Linie liegen.

§. 449.

Umgekehrt kann man auch, wenn eine und dieselbe Curve in einer Ebene in unendlich vielen Lagen nach einem bestimmten Gesetze beschrieben wird, die Gleichung finden, wodurch, wenn man darin nur eine beständige Größe veränderlich annimmt, alle diese unzählige einander gleiche Curven ausgedruckt werden. Es sey diese in unendlich vielen Bogen dargestellte Curve ein Kreis mit dem Halbmesser $= c$, und mit unendlich vielen Lagen von der Beschaffenheit, daß die

Schei-

Scheitelpunkte A, a, in einer gegebenen Curve AaL, Fig. 90, welche man die Directrix nennt, liegen, die Durchmesser ab aber der Axe AB parallel bleiben. Um die Gleichung für diese unzähligen Kreise zu finden, nehme man in der Directrix irgend einen Punkt a an, und fälle aus demselben auf die Hauptaxe die senkrechte Linie aK. Man setze AK = a; und da die Directrix gegeben ist, so ist auch Ka durch a gegeben. Es sey also Ka = A, wo denn A eine gegebene Funktion von a seyn wird. Dann ziehe man aus a, der Hauptaxe parallel, die Linie ab, welche der Durchmesser des Kreises seyn wird, der den Scheitelpunkt in dem Punkte der Directrix a hat; und ferner aus einem beliebigen Punkte m die Applicate mP = y zu der Abscisse AP = x. Ist dieses geschehen, so hat man

$$ap = x - a; \text{ und } pm = y - A$$

Setzt man nun ap = t; und pm = u; so ist wegen der Natur des Kreises

$$uu = 2ct - tt$$

und da $t = x - a$, und $u = y - A$ ist, so ergiebt sich daher

$$(y - A)^2 = 2c(x - a) - (x - a)^2$$

und dieses ist die allgemeine Gleichung, welche alle Kreise, die nach der Directrix AaL auf die beschriebene Art liegen, unter sich begreift. Man findet nemlich alle diese Kreise aus der erhaltenen Gleichung, wenn man die Linie a, wovon zugleich A abhängig ist, veränderlich nimmt.

§. 450.

Auf ähnliche Art kennt man, wenn anstatt des Kreises irgend eine andere Curve amb so nach der Directrix AaL bewegt wird, daß ihr Scheitel oder der Anfangspunkt der Abscissen a in der Directrix liegt, und die Axe ab sich stets parallel bleibt, diese in unendlich vielen Lagen beschriebene Curve, und kann auch die Gleichung finden, wodurch die Natur dieser Curven auf einmal ausgedruckt wird. Es sey die Natur dieser so fortbewegten Curve durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten $ap = t$, und $pm = u$ gegeben, und die Hauptaxe, worauf alle Curven zusammengenommen bezogen werden, AB, sey der Axe ab parallel, und zugleich die Axe der Directrix AaL. Setzt man nun, wie vorhin $AK = a$, und $Ka = A$, so daß A eine Funktion von a ist, und macht man die Abscisse $AP = x$, und die Applicate $PM = y$: so wird $t = x - a$, und $u = y - A$. Bringt man ferner diese Werthe von t und u anstatt dieser Größen in die gegebene Gleichung, so bekommt man dadurch eine allgemeine Formel, welche alle Curven amb zusammen unter sich begreift. Denn was man auch dem Buchstaben a für einen Werth geben mag, so findet man allemal eine Curve amb aus der unzähligen Menge derer, die auf die im Anfange gedachte Art sich ergeben. Ist z. B. die Curve amb eine durch die Gleichung $uu = ct$ ausgedruckte Parabel, so sind alle der Menge nach unzählige, übrigens unter einander gleiche Parabeln, deren Scheitelpunkte in der Directrix AaL liegen, und deren Axen der geraden Linie AB parallel sind, in der Gleichung: $(y - A)^2 = c(x - a)$ enthalten.

§. 451.

So wie wir hier angenommen haben, daß sich der Scheitel der Curve A in der gegebenen Directrix auf die Art fortbewege, daß die Axe derselben sich stets parallel bleibt: so kann auch bey dieser Bewegung des Scheitels durch eine gegebene Curve die Lage der Axe nach Gefallen verändert werden; und dann erhält man eine viel allgemeimeinere Gleichung für eben diese Curve, die in einer gegebenen Ebene nach einem bestimmten Gesetze unendlich oft dargestellt werden kann. Um dies deutlicher zu machen, wollen wir zuvörderst annehmen, daß sich der Scheitel der Curve A durch den Bogen Aa, Fig. 91, auf die Art fortbewege, daß die Lage der Axe ab immer nach dem Mittelpunkte des Kreises O hingerichtet sey. Durch diese radförmige Bewegung der Curve AMB mit der Axe BAO um den Punkt O erhält man alle jene unzählige Lagen der Curve AMB, die insgesammt durch eine Gleichung, worin eine beständige Größe, die man veränderlich annimmt, vorkommt, ausgedruckt werden sollen.

§. 452.

Es sey der unveränderliche Halbmesser $AO = aO = c$, und der Winkel $AOa = \alpha$; welcher denn veränderlich angenommen wird. Aus irgend einem Punkte m, der in irgend einer Lage dargestellten Curve amb fälle man auf die gerade Linie OAB, welche zur Hauptaxe angenommen worden ist, die Applicate mP, und dabey sey $OP = x$, und $Pm = y$. Ferner ziehe man aus eben dem Punkte m auf die Axe ab, welche zu der Curve amb gehört, die senkrechte Linie mp, und setze $ap = t$, und $pm = u$. Ist dies geschehen, so hat man eine unveränderliche Gleichung für die Curve amb zwischen den Coordinaten t und u. Nun lege man durch P die Linie Ps der Ob parallel, und ihr begegne die verlängerte Applicate mp in s: so ist

$$ps = x.\sin.\alpha;\ Op - Ps = x.\cos.\alpha$$

desgleichen, weil $Pms = AOa = \alpha$ ist

$$Ps = y.\sin.\alpha;\ \text{und}\ ms = y.\cos.\alpha.$$

Hieraus fließt

$$Op = c + t = x.\cos.\alpha + x.\sin.\alpha;$$

und

$$mp = u = y.\cos.\alpha - x.\sin\alpha$$

Man setze also in der zwischen t und u gegebenen Gleichung

$$t = x.\cos.\alpha + y.\sin.\alpha - c$$

und

$$u = y.\cos.\alpha - x.\sin.\alpha$$

so erhält man die allgemeine Gleichung zwischen den Coordinaten x und y, die, wenn man den Winkel α veränderlich annimmt, alle Curven amb unter sich begreift.

§. 453.

Es bewege sich nunmehr der Scheitel der Curve AMB, Fig. 92, nach irgend einer Directrix AaL, und dabey verändere sich die Lage der Axe ab stets auf die Art, daß der Winkel AOa, wie solches übrigens auch seyn mag, von dem Punkte a abhange. Es sey nemlich, wenn der Scheitel in a ist, AK = a, und Ka = A, und der Winkel AOa = α; wo also, weil die Directrix gegeben ist, A eine bekannte Funktion von a, und der Sinus oder Cosinus des Winkels α ebenfalls eine Funktion von a ist. Dies vorausgesetzt, so ist

$$KO = \frac{A}{\text{tang.}\,\alpha}; \text{ und } Oa = \frac{A}{\sin.\,\alpha}$$

Nun fälle man aus einem beliebigen Punkte m der Curve amb auf die Hauptaxe AO die senkrechte Linie mP, und zugleich auf die eigentliche Axe derselben mp; auch sey AP = x, Pm = y; ap = t, und pm = u. Alsdann hat man eine unveränderliche Gleichung zwischen den Coordinaten t und u, und daraus ist nunmehr die veränderliche Gleichung zwischen x und y, die alle Curven amb unter sich begreift, zu bestimmen.

§. 454.

Um dieses zu leisten, ziehe man aus P auf die verlängerte mp die gerade Linie Ps senkrecht, welche folglich der Axe der Curve abO parallel seyn wird; und da $Pms = AOa = \alpha$ ist, so wird

$$Ps = y.\sin.\alpha; \text{ und } ms = y.\cos.\alpha.$$

Da ferner $OP = a + \frac{A}{\text{tang.}\,\alpha} - x$ ist, so wird

$$ps = a.\sin.\alpha + A.\cos.\alpha - x.\sin.\alpha$$

und

$$Op - Ps = a.\cos.\alpha + \frac{A.\cos.\alpha}{\text{tang.}\,\alpha} - x.\cos.\alpha.$$

Hieraus fließt

$$Op = a.\cos.\alpha + \frac{A.\cos.\alpha}{\text{tang.}\,\alpha} - x.\cos.\alpha + y.\sin.\alpha$$

$$= \frac{A}{\sin.\alpha} - t$$

und es ist also

$$t = A.\sin.\alpha - a.\cos.\alpha + x.\cos.\alpha - y.\sin.\alpha$$

und

$$u = -a.\sin.\alpha - A.\cos.\alpha + x.\sin.\alpha + y.\cos.\alpha.$$

Wenn man daher in der zwischen t und u gegebenen Gleichung

$$t = (x - a)\cos.\alpha - (y - A)\sin.\alpha$$

und

$$u = (x - a)\sin.\alpha + (y - A)\cos.\alpha$$

setzt, so bekommt man die gesuchte Gleichung zwischen x und y. Nach was für einem Gesetze also auch eine und dieselbe Curve amb in einer Ebene unendlichmal beschrieben werden mag, so findet man gleichwohl auf diese Art eine allgemeine Gleichung, welche alle diese Curven ohne Ausnahme unter sich begreift.

§. 455.

Auf diese Weise werden unzählige durchaus einander gleiche, und nur in der Lage von einander verschiedene Curven in eine Gleichung zusammen gefaßt, wenn die zwischen t und u gegebene Gleichung unveränderlich ist, und keine beständige, als eine veränderliche zu behandelnde, Größe in sich schließt. Wenn aber eine oder mehr beständige Größen von denen, die sich in der Gleichung zwischen t und u befinden, ebenfalls als von a abhängig angesehen werden, so bekommt man unzählige verschiedene, und einander entweder ähnliche oder unähnliche Curven, die ebenfalls in derselben Gleichung enthalten sind. Aehnlich werden nemlich alle Curven seyn, wenn die Gleichung zwischen t und u so beschaffen ist, daß sie irgend eine homogene Funktion von einer Dimension von t und f ausmacht, und f eine Größe bedeutet, die auf irgend eine Art von a abhängt. Wenn aber das Gegentheil statt findet, so sind die Curven unähnlich.

§ 456.

Um diese Behauptung von den unähnlichen Curven durch ein Beyspiel zu erläutern, wollen wir annehmen, daß diese Curven unzählige Kreise AB, αB, amB, Fig. 93, seyn, die durch einen gegebenen Punkt B gehen, und ihre Mittelpunkte insgesammt in der geraden Linie AE haben. Dergleichen Kreise stellen auf den geographischen Charten die Meridiane vor. Man fälle aus B die Perpendiculärlinie BC auf AC herab, und dabey sey $BC = c$, welche Größe folglich unveränderlich seyn wird. Dann betrachte man einen von den gedachten unzähligen Kreisen amB, und setze, nachdem man eine Applicate mP gezogen hat, $CP = x$, und $Pm = y$, und den Halbmesser dieses Kreises, der in Ansehung

seiner

seiner zwar beständig, in Ansehung aller aber veränderlich ist, aE = BE = a: so ist

$$CE = \sqrt{(aa - cc)} \text{ und } PE = x + \sqrt{(aa - cc)}$$

Da nun $PE^2 + Pm^2 = aa$ ist, so wird

$$y^2 + x^2 + 2x\sqrt{(aa - cc)} + aa - cc = aa$$

oder

$$yy = cc - 2x\sqrt{(aa - cc)} - xx$$

Wenn aber der Raum CE anstatt der beständigen veränderlichen Größe in die Gleichung gebracht, und CE = a gesetzt wird, so bekommt man folgende einfachere Gleichung

$$yy = cc - 2ax - xx$$

welche wegen der Veränderlichkeit von a alle durch B gezogene Kreise, die ihre Mittelpunkte in der geraden Linie AE haben, ohne Ausnahme unter sich begreift. Auf ähnliche Art wird aber jede unendliche Menge von Curven, die nach einem gewissen Gesetze gelegt sind, auf eine Gleichung zurückgebracht, wofern nur gehörig auf den Unterschied zwischen den beständigen veränderlichen und unveränderlichen Größen gesehen wird.

Neun=