Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Zwanzigstes Capitel. Von der Construktion der Gleichungen.

Zwanzigstes Capitel.

Von der Construction der Gleichungen.

§. 486.

Die Untersuchungen des vorhergehenden Capitels über die Durchschnittspunkte der Curven gebraucht man vorzüglich bey der Construction der höhern Gleichungen. Denn so wie wir, wenn zwey Curven gegeben waren, eine Gleichung fanden, deren Wurzeln die Durchschnittspunkte zu erkennen gaben: so lassen sich auch umgekehrt die Durchschnittspunkte zweyer Curven zur Beurtheilung der Wurzeln der Gleichungen benutzen; und diese Methode ist insbesondere dann sehr vortheilhaft, wenn die Wurzeln einer Gleichung durch Linien ausgedruckt werden sollen. Denn hat man die beyden Curven, die zu dieser Absicht nöthig sind, beschrieben, so lassen sich die Durchschnittspunkte sehr leicht bemerken; und fällt man aus ihnen auf die Axe Applicaten herab, so zeigen die Abscissen die wahren Wurzeln der Gleichung an. Wenn aber die oben erwähnte Unbequemlichkeit statt findet, so geben zwar alle auf diese Art gefundene Abscissen Wurzeln an, allein es kann auch seyn, daß die Gleichung noch mehr Wurzeln hat, als man durch eine solche Construction kennen lernt.

§. 487.

§. 487.

Wenn also eine algebraische Gleichung gegeben ist, welche die unbekannte Größe x enthält, und die Wurzeln derselben bestimmt werden sollen, so muß man zwey Gleichungen zwischen den beyden veränderlichen Größen x und y suchen, die so beschaffen sind, daß man daraus durch die Wegschaffung der Applicate y jene Gleichung bekomme. Ist dieses geschehen, so beschreibt man die in diesen beyden Gleichungen enthaltenen Curven über einer gemeinschaftlichen Axe und für denselben Anfangspunkt der Abscissen, und bemerkt die Punkte, in welchen sie sich schneiden. Fällt man nun aus diesen Durchschnittspunkten auf die Axe senkrechte Applicaten herab, so stellen die Abscissen in der Axe die Wurzeln der gegebenen Gleichungen vor. Auf diese Art findet man die wahren Werthe aller Wurzeln der gegebenen Gleichung, wofern nicht dieselbe etwa mehr Wurzeln hat, als Durchschnittspunkte da sind.

§. 488.

Ehe ich aber von der Art und Weise rede, die gedachten beyden Curven, welche zur Construction der Gleichung erfordert werden, zu finden, wollen wir die Gleichungen, deren Auflösung diese Curven nothwendig macht, a Posteriori untersuchen. Zuvörderst mögen die zur Auflösung erforderlichen Linien die sich in M schneidenden geraden Linien EM, FM, Fig 97, seyn. Man nehme die gerade Linie EF zur Axe, und den Punkt A in ihr zum Anfangspunkte der Abscissen an, und die aus ihm senkrecht aufgerichtete gerade Linie ABC schneide die EM in B und die FM in C. Nun sey

$$AE = a;\ AF = b;\ AB = c;\ AC = d$$

und

und dabey setze man die Abscisse $AP = x$, un die Applicate $PM = y$. Dann ist für die erste gerade Linie EM

$$a : c = a + x : y; \text{ oder } ay = c(a + x)$$

und für die andere FM

$$b : d = b - x : y; \text{ oder } by = d(b - x).$$

Schafft man nun aus diesen beyden Gleichungen y weg, so bekommt man

$$bc(a + x) = ad(b - x)$$

oder

$$x = \frac{abd - abc}{bc + ad} = \frac{ab(d - c)}{bc + ad}.$$

Es läßt sich also vermittelst des Durchschnittspunkts zweyer geraden Linien die einfache Gleichung

$$x = \frac{ab(d - c)}{bc + ad}$$

construiren, auf deren Form man alle einfache Gleichungen ohne Ausnahme zurückbringen kann.

§. 489.

Nach den geraden Linien ist der Kreis am leichtesten zu beschreiben, und daher wollen wir sehen, was für Gleichungen vermittelst der Durchschnittspunkte einer geraden Linie und eines Kreises construirt werden können. Es sey also, Fig. 98, nachdem man AP zur Axe und den Punkt A zum Anfangspunkte der Abscissen angenommen hat, die gerade Linie EM beschrieben worden: so ist, wenn man

$$AE = a; AB = b; AP = x; PM = y$$

setzt,

$$a : b = a + x : y; \text{ und folglich } ay = b(a + x)$$

die Gleichung für die gerade Linie. Ferner sey der Halbmesser des Kreises $CM = c$, und, nachdem man aus dem

Mit-

Mittelpunkte desselben C auf die Axe die perpendiculäre Linie CD herabgefällt hat,

$AD = f$; $CD = g$; und folglich $DP = x - f$; und

$$PM - CD = y - g.$$

Da nun wegen der Natur des Kreises

$$CM^2 = DP^2 + (PM - CD)^2$$

ist, so ist die Gleichung für den Kreis folgende:

$$cc = xx - 2fx + ff + yy - 2gy + gg = (x-f)^2 + (y-g)^2.$$

Nun giebt aber die Gleichung für die gerade Linie

$$y = \frac{ab + bx}{a}$$

daher denn

$$y - g = \frac{a(b-g) + bx}{a} = b - g + \frac{bx}{a}$$

wird; und setzt man diesen Werth von y in die andere Gleichung, so bekommt man

$$cc = xx - 2fx + ff + (b-g)^2 + \frac{2b(b-g)x}{a} + \frac{bbxx}{a}$$

oder

$$\begin{array}{l} +aa \\ +bb \end{array} xx \; \begin{array}{l} +2ab(b-g) \\ -2aaf \end{array} x \; \begin{array}{l} +aa(b-g)^2 \\ +aaff \\ -aacc \end{array} = 0.$$

Die Wurzeln dieser Gleichung findet man also durch die Durchschnittspunkte einer geraden Linie und eines Kreises, so daß, wenn man aus diesen Durchschnittspunkten M und m nach der Axe die Perpendikel MP, mp herabfällt, die Werthe von x durch AP und Ap ausgedruckt werden.

§. 490.

Da in dieser Gleichung alle quadratische Gleichungen enthalten sind, so läßt sich daher eine allgemeine Construction der quadratischen Gleichungen ableiten. Es sey nem-

nemlich folgende quadratische Gleichung

$$Axx + Bx + C = 0$$

gegeben, die man denn zuvörderst auf die obige Form auf die Art bringen muß, daß die ersten Glieder übereinstimmen, also durch die Multiplication mit $\frac{aa + bb}{A}$,

$$(aa + bb)xx + \frac{B(aa + bb)x}{A} + \frac{C(aa + bb)}{A} = 0.$$

Setzt man nun die übrigen Glieder gleich, so wird

$$2Aab(b - g) - 2Aaaf = B(aa + bb)$$

und also

$$af = b(b - g) - \frac{B(aa + bb)}{2Aa}.$$

Da nun

$$aa(b - g)^2 + aaff - aacc = \frac{C(aa + bb)}{A}$$

ist, so wird

$$(aa + bb)(b - g)^2 - \frac{Bb(b - g)(aa + bb)}{Aa} +$$

$$\frac{BB(aa + bb)^2}{4A^2a^2} - aacc = \frac{C(aa + bb)}{A}$$

und also

$$(b - g)^2 = \frac{Bb(b - g)}{Aa} - \frac{B(aa + bb)}{4A^2a^2} +$$

$$\frac{aacc}{aa + bb} + \frac{C}{A}$$

folglich

$$b - g = \frac{Bb}{2Aa} \pm \sqrt{\left(\frac{aacc}{aa + bb} + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4AA}\right)}.$$

Es bleiben also noch drey Größen a, b und c unbestimmt, doch muß man dieselben so annehmen, daß $\frac{aacc}{aa + bb} + \frac{C}{A}$

—

$-\frac{B^2}{4AA}$ eine positive Größe wird, weil sonst $b - g = AB - CD$, und also CD imaginär seyn würde.

§. 491.

Es hindert uns also nichts, $b = 0$ zu setzen, und dann ist

$$g = \surd\left(cc - \frac{BB + 4AC}{4AA}\right), \text{ und } f = \frac{-B}{2A}.$$

Da ferner die gegebene Gleichung $Axx + Bx + C = 0$ keine reelle Wurzeln hat, wofern nicht BB größer als $4AC$ ist: so ist in diesem Falle $\frac{BB - 4AC}{4AA}$ eine positive Größe; und setzt man derselben cc gleich, so daß $c = \frac{\surd(BB - 4AC)}{2A}$ ist, so wird auch $g = 0$, und a fällt gänzlich aus der Rechnung weg. Es fällt also die gerade Linie EM in die Axe AB, und der Mittelpunkt des Kreises C muß in dem Punkte D angenommen werden, wenn $AD = \frac{-B}{2A}$ ist. Beschreibt man aus diesem Mittelpunkte mit dem Halbmesser $c = \frac{\surd(BB - 4AC)}{2A}$ einen Kreis, so zeigen die Durchschnittspunkte desselben mit der Axe die Wurzeln der gegebenen Gleichung an. Damit aber hier keine Construction einer Irrational-Formel nöthig werde, so setze man

$$g = c - \frac{k}{2A}, \text{ daß } cc - \frac{2ck}{2A} + \frac{kk}{4AA} = cc - \frac{BB + 4AC}{4AA}$$

werde. Dann ist

$$c = \frac{kk + BB - 4AC}{4kA}; \text{ und } g = \frac{BB - 4AC - kk}{4kA}.$$

Es

Es bleibt also die Bestimmung der Größe k unserer Willkühr überlassen, und hat man dieselbe auf irgend eine Art angenommen, so muß, da die gerade Linie CM in die Axe fällt, der Kreis auf folgende Art beschrieben werden. Man nehme $AD = \frac{-B}{2A}$, mache die senkrechte Linie $CD = \frac{BB - 4AC - kk}{2Ak}$, und beschreibe aus dem Mittelpunkte C einen Kreis, dessen Halbmesser $= \frac{BB - 4AC + kk}{4AC}$ ist. Die Durchschnittspunkte dieses Kreises mit der Axe zeigen die Wurzeln der gegebenen Gleichung an. Wenn man aber $k = -B$, und, nachdem man $AD = \frac{-B}{2A}$ genommen, $CD = \frac{C}{B}$ gemacht hat, und der Halbmesser des aus C zu beschreibenden Kreises $= \frac{-BB + 2AC}{2AB} = \frac{-B}{2A} + \frac{C}{B}$ ist: so ist daher auch der Halbmesser des Kreises $= AD + CD$; und diese Construction ist für die Praxis die bequemste.

§. 492.

Nun wollen wir zwey sich schneidende Kreise, Fig. 99, betrachten, und für den ersten $AD = a$, $CD = b$, und den Halbmesser $CM = c$ setzen, wo denn, wenn man $AP = x$, und $PM = y$ macht,

$$DP = a - x, \text{ und } CD - PM = b - y$$

und wegen der Natur des Kreises

$$xx - 2ax + aa + yy - 2by + bb = cc$$

wird. Auf ähnliche Art sey für den andern Kreis $Ad = f$, $dc = g$, und sein Halbmesser $cM = h$, so ist

$$xx - 2fx + ff + yy - 2gy + gg = hh$$

Zieht

Zieht man nun diese beyden Gleichungen von einander ab, so bleibt

$$2(f-a)x + aa - ff - 2(b+g)y + bb - gg = cc - hh$$

übrig; und es ist demnach

$$y = \frac{aa + bb - ff - gg - cc + hh - 2(a-f)x}{2(b+g)}$$

und daher

$$b - y = \frac{bb + 2bg - aa + ff + gg + cc - hh + 2(a-f)x}{2(b+g)}$$

und

$$a - x = \frac{2a(b+g) - 2(b+g)x}{2(b+g)}$$

Da nun $(a-x)^2 + (b-y)^2 = cc$ ist, so wird nach vorgenommener Substitution

$$\left.\begin{array}{l} +4(a-f)^2 \\ +4(b+g)^2 \end{array}\right\} xx \begin{array}{l} -4(a+f)(b+g)^2 + (b+g)^4 \\ -4(a-f)(aa-ff)x + 2(aa-cc)(b+g)^2 \\ +4(a-f)(cc-bb) + 2(ff-hh)(b+g)^2 \\ \qquad\qquad + (aa-cc-ff-hh)^2 \end{array} = 0$$

Vermittelst dieser Gleichung läßt sich die vorhin §. 490 angeführte Gleichung, nemlich

$$Axx + Bx + C = 0$$

auf unzählige Arten construiren; und zugleich erhellet daraus, daß keine Gleichung, die zu einem höhern Grade als dem zweyten gehört, durch zwey sich schneidende Kreise construirt werden kann, weil sich zwey Kreise in nicht mehr als in zwey Punkten schneiden können. Da aber eben diese quadratische Gleichung, vermittelst einer geraden Linie und eines Kreises, welche sich schneiden, construirt werden kann, so verdient diese Construction vor derjenigen, wozu zwey Kreise erfordert werden, mit Recht den Vorzug; es müßte sich denn in einigen einzelnen Fällen von selbst eine leichte Bestimmung der Linien a, b, f, g, c, und h darbieten.

§. 493.

Jetzt werde ein Kreis von einer Parabel geschnitten. Es sey nemlich, nachdem man, Fig. 100, aus dem Mittelpunkte des Kreises C auf die Axe AP die senkrechte Linie CD herabgefällt hat, $AD = a$, $CD = b$, und der Halbmesser $CM = c$; so ist die Gleichung zwischen den rechtwinkligen Coordinaten $AP = x$, $PM = y$ für den Kreis

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = cc.$$

Die Axe der Parabel FB aber nehme man auf der angenommenen Axe AP senkrecht, und dabey sey $AE = f$, $EF = g$, und der Parameter der Parabel $= 2h$: so ist, wegen der Natur der Parabel,

$$EP^2 = 2h(EF + PM)$$

oder, algebraisch ausgedruckt,

$$(x - f)^2 = 2h(g + y)$$

und also

$$y = \frac{(x - f)^2}{2h} - g$$

und

$$y - b = \frac{(x - f)^2}{2h} - (b + g)$$

Setzt man diesen Werth in die erste Gleichung, und schafft daraus y weg, so wird

$$\frac{(x-f)^4}{4hh} - \frac{(b+g)(x-f)^2}{h} + (b+g)^2 + (x-a)^2 = cc$$

oder

$$\begin{array}{lllll} & & & & + f^4 \\ & + 6ff & & - 4f^3 & - 4ffh(b+g) \\ x^4 - 4fx^3 & - 4h(b+g)x^2 & & + 4fh(b+g)x & + 4hh(b+g)^2 = 0 \\ & + 4hh & & - 8ahh & + 4aahh \\ & & & & - 4cchh \end{array}$$

und

und die Wurzeln dieser Gleichung sind die Abscissen AP, Ap, Ap, Ap, daher denn die Applicaten durch die Durchschnittspunkte M, m, m, m gehen.

§. 494.

In dieser Gleichung befinden sich sechs beständige Größen, a, b, c, f, g, und h, davon aber zwey $b + g$ für eine zu rechnen sind, so daß man nur fünfe behält, wenn man $b + g = k$ setzt. Macht man nemlich

$$CD + EF = b + g = k$$

so bekommt man folgende Gleichung:

$$\begin{array}{lllll} & & & & + f^4 \\ & & + 6ff & - 4f^3 & - 4ffhk \\ x^4 & - 4fx^3 & - 4hkxx & + 4fhkx & + 4hhkk = 0 \\ & & + 4hh & - 8ahh & + 4aahh \\ & & & & - 4cchh \end{array}$$

Auf diese Form läßt sich aber jede biquadratische Gleichung zurückführen. Denn es sey die Gleichung

$$x^4 - Ax^3 + Bxx - Cx + D = 0$$

gegeben, so ist, wenn man vergleicht,

$$4f = A; \text{ oder } f = \tfrac{1}{4}A$$

$$6ff - 4hk + 4hh = B, \text{ oder } \tfrac{3}{8}AA - 4hk + 4hh = B$$

und daher wird

$$k = \frac{3AA}{32h} + h - \frac{B}{4h}$$

$$4f^3 - 4fhk + 8ahh = C$$

oder

$$\tfrac{1}{16}A^3 - \tfrac{2}{32}A^3 - Ahh + \tfrac{1}{4}AB + 8ahh = C$$

also

$$a = \frac{A^3}{256hh} + \frac{A}{8} - \frac{AB}{32hh} + \frac{C}{8hh}$$

Endlich ist

$$(ff - 2hk)^2 + 4aahh - 4cchh = D.$$

und

$$ff - 2hk = \frac{B}{2} - 2hh - \frac{AA}{16}$$

und

$$2ah = \frac{A^3}{128h} + \frac{Ah}{4} - \frac{AB}{16h} + \frac{C}{4h}.$$

Substituirt man nun diese Werthe, so bekommt man eine Gleichung, die c und h enthält, die man deswegen aus ihr auf die bequemste Art bestimmen muß, so nemlich, daß jede dieser Größen einen reellen Werth bekommt.

§. 495.

Da aber aus jeder biquadratischen Gleichung das zweyte Glied leicht weggebracht werden kann, so wollen wir annehmen, daß solches bereits geschehen sey, und daß also folgende Gleichung

$$x^4 * + Bxx - Cx + D = 0$$

construirt werden solle. Hier ist nun

$$f = 0;\ k = h - \frac{B}{4h};\ a = \frac{C}{8hh}$$

und weil

$$2hk - ff = 2hh - \frac{B}{2};\ \text{und}\ 2ah = \frac{C}{4h}$$

ist, ferner,

$$4h^4 - 2Bhh + \tfrac{1}{4}BB + \frac{CC}{16hh} - 4cchh = D$$

Hieraus wird

$$64cch^4 = CC + 4BBhh - 32Bh^4 + 64h^6 - 16Dhh$$

und also

$$8chh = \sqrt{(4hh(B - 4hh)^2 + CC - 16Dhh)}$$

Da aber insbesondere darauf zu sehen ist, daß sowohl c als h reell sey, so setze man

$$c = h - \frac{B + q}{4h}$$

so wird

$$CC - 16Dhh + 8Bhhq - 32h^4q - 4hhqq = 0.$$

Damit also dem Verlangten ein Genüge geschehe, müssen zwey Fälle unterschieden werden, der eine, wenn D eine negative, und der andere, wenn D eine positive Größe ist. Es sey also

I.

D eine positive Größe $= + EE$, so daß folgende Gleichung zu construiren ist:

$$x^4 * + Bx^2 - Cx + EE = 0.$$

Man setze zu dieser Absicht $q = 0$, daß $c = \frac{4hh - B}{4h}$ sey, so wird

$$hh = \frac{CC}{16EE}, \text{ und } h = \frac{C}{4E};$$

folglich

$$c = \frac{CC - 4BE}{4CE}$$

und

$$k = c = \frac{CC - 4BE}{4CE}; \; a = \frac{2EE}{C}; \text{ und } f = 0$$

II.

Wenn aber D negativ, und $= - EE$ ist, so daß folgende Gleichung construirt werden muß

$$x^4 * + Bx^2 - Cx - EE = 0$$

so wird

$$64cch^4 = CC + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEhh.$$

Diese Gleichung giebt einen reellen Werth für c, man mag h annehmen, wie man will; denn es wird

$$e = \frac{\sqrt{(CC + 4hh(4hh - B)^2 + 16EEhh)}}{8hh}$$

und h kann nach Gefallen angenommen werden. Man nehme es also allemal so, daß man c leicht construiren kann; und ist dies geschehen, so wird, wie vorhin

$$AE = f = o;\ CD + EF = k = \frac{4hh - B}{4h};$$ und

$$AD = a = \frac{C}{8hh}.$$

Setzt man E = o, so ergiebt sich die Construction der cubischen Gleichung

$$x^3 * + Bx - C = o$$

und auf dieser Construction beruht Backers bekannte Regel:

§. 496.

Nun wollen wir überhaupt zwey Linien der zweyten Ordnung oder zwey Kegelschnitte nehmen, deren Gleichungen sich auf eine gemeinschaftliche Axe und auf einerley Anfangspunkt der Abscissen beziehen, und folgende seyn mögen:

$$ayy + byx + cxx + dy + ex + f = o$$
$$\alpha yy + \beta yx + \gamma xx + \delta y + \varepsilon x + \zeta = o.$$

Schafft man hieraus nach der oben erklärten Methode y weg, welches geschiehet, wenn man diese Gleichungen mit den im 479sten § betrachteten, nemlich

$$P + Qy + Ryy = o$$
und
$$p + qy + ryy = o$$

vergleicht: so werden P und p Funktionen der zweyten Ordnung von x; Q und q Funktionen der ersten Ordnung, und R und r beständige Größen; und daher erkennt man, daß die durch die Elimination hervorgebrachte Gleichung eine biqua-

biquadratische seyn wird. Es können demnach durch zwey sich schneidende Linien der zweyten Ordnung keine Gleichungen construirt werden, die zu einem höhern, als dem vierten Grade gehören; aber von diesen Gleichungen wissen wir, daß ihre Construction vermittelst des Kreises und der Parabel zu Stande gebracht werden kann. Eben dieses läßt sich auch aus der Natur der Linien der zweyten Ordnung schließen, weswegen dieselben von einer geraden Linie in zwey Punkten geschnitten werden können. Hiernach können zwey gerade Linien die Linien der zweyten Ordnung in vier Punkten schneiden; und da zwey gerade Linien, wenn man sie in Verbindung mit einander betrachtet, eine Art der Linien der zweyten Ordnung ausmachen: so erhellet, daß sich zwey Linien der zweyten Ordnung in vier Punkten schneiden können.

§. 497.

Sollen, um Durchschnittspunkte zu erhalten, zwey Linien, die eine von der zweyten und die andere von der dritten Ordnung genommen werden, und ihre Gleichungen folgende seyn:

$$P + Qy + Ryy = 0$$

$$p + qy + ryy + sy^3 = 0$$

so ist P eine Funktion von zwey Dimensionen von x, Q eine Funktion von einer Dimension, und R eine beständige Größe; dagegen ist p eine Funktion von drey Dimesionen, q eine Funktion von zwey Dimensionen, r eine Funktion von einer Dimension, und s eine beständige Größe. Sieht man hierauf bey der durch die Elimination nach § 480 gefundenen Gleichung zurück, so erhellet, daß diese Gleichung zum sechsten Grade gehören muß; und es können daher durch eine Linie der dritten Ordnung, welche von einer Linie der zweyten Ordnung geschnitten wird, keine Gleichungen construirt werden, die zu einem höhern Grade als dem sechsten gehören. Eben dieses erkennt man aus der Natur einer jeden Linie der gedachten Ordnungen. Denn da die Linien der dritten Ordnung von einer geraden Linie in drey Punkten geschnitten werden, so werden sie von zwey geraden Linien, die zusammengenommen eine Linie der zweyten Ordnung ausmachen, in sechs Punkten geschnitten.

§ 498.

Wenn man die oben erklärten Eliminationen, und die vorhin gebrauchten Schlüsse von den Durchschnittspunkten, welche von geraden Linien gemacht werden, auf die höhern Ordnungen anwendet, so ist klar, daß durch zwey sich schneidende Curven, wenn sie zu der dritten Ordnung gehören, nur Gleichungen, die den neunten, und wenn sie zu der vierten Ordnung gehören, nur Gleichungen, die den sechszehnten Grad nicht übersteigen, construirt werden können. Ueberhaupt können durch zwey sich schneidende Linien, davon die eine zur Ordnung m, und die andere zur Ordnung n gehört, alle Gleichungen construirt werden, welche nicht über die Ordnung mn hinausgehen. So braucht man, um eine Gleichung vom hundertsten Grade zu construiren, entweder zwey Linien der zehnten Ordnung, oder eine Linie der fünften und eine Linie der zwanzigsten Ordnung, ꝛc. wenn man die Zahl 100 in zwey Faktoren auflöset. Wen aber die höchste Potestät der zu construirenden Gleichung eine Primzahl, oder eine solche Zahl ist, die keine bequeme Faktoren zuläßt: so muß man dafür eine andere größere Zahl setzen, die in bequeme Faktoren zerfällt werden kann; denn die beyden Curven, wodurch sich Gleichungen von höhern Graden construiren lassen, können auch

zur

zur Construction der Gleichungen der niedrigern Grade gebraucht werden. So kann man zur Construction einer Gleichung vom 39sten Grade zwey Curven nehmen, davon die eine zur sechsten und die andere zur siebenten Ordnung gehört, weil man dadurch eine Gleichung vom zwey und vierzigsten Grade construiren kann; und diese Construction ist allerdings einfacher, als wenn man eine Curve von der dritten und eine von der dreyzehnten Ordnung brauchen wollte.

§. 499.

Hieraus erhellet, daß sich eine jede Gleichung auf viele, ja auf unzählige Arten durch zwey einander schneidende Curven so construiren läßt, daß man ihre reellen Wurzeln daraus erkennen kann. Aus diesen unzähligen Arten muß man aber jedesmal diejenige wählen, die sowohl durch die einfachsten als auch zum Entwerfen leichtesten Curven zu Stande gebracht werden; und insbesondere hat man darauf zu sehen, daß man vermittelst der Durchschnittspunkte alle reelle Wurzeln erhalte, welches statt finden wird, wenn man solche Curven wählt, die keine imaginäre Durchschnittspunkte haben. Nun haben wir oben gesehen, daß dergleichen nicht statt finden können, wenn die Applicate y in der einen Gleichung für die Curven einer einförmigen Funktion von x gleich ist; denn alsdann ist es, weil diese Curve keine imaginären Applicaten hat, unmöglich, daß imaginäre Durchschnittspunkte entstehen, wenn auch die Anzahl der imaginären Applicaten der andern Curve noch so groß ist. Man muß daher bey dieser Construction die eine Curve allemal so annehmen, daß ihre Gleichung in der Form

$$P + Qy = 0$$

enthalten ist, wo P und Q Funktionen von x bedeuten.

§. 500.

Ist also eine Gleichung gegeben, so suche man eine Curve, welche durch die Gleichung

$$P + Qy = 0$$

ausgedruckt wird. Und da die Gleichung für die andere Curve so beschaffen seyn muß, daß sich daraus, wenn man in ihr $\frac{-P}{Q}$ für y setzt, die gegebene Gleichung ergebe: so kann man aus der gegebenen Gleichung auch die Gleichung für die andere Curve finden, wenn man darin y für $\frac{-P}{Q}$ setzt. Ist z. B. folgende Gleichung gegeben:

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

so nehme man für die eine Curve die durch die Gleichung

$$ay = xx + bx$$

ausgedruckte Parabel; und da daraus

$$xx = ay - bx$$

wird, so setze man diesen Werth, so oft es beliebt, in die gegebene Gleichung. Alsdann wird

$$\begin{aligned} x^4 &= aayy - 2abxy + bbxx \\ Ax^3 &= \quad\quad\quad + Aaxy - Abxx \end{aligned}$$

und man bekommt demnach folgende Gleichung der zweyten Ordnung:

$$aayy + a(A - 2b)xy + (B - Ab + bb)xx + Cx + D = 0$$

deren Durchschnittspunkte mit der Curve $ay = xx + bx$ die Wurzeln der gegebenen Gleichung anzeigen werden.

§. 501.

Da diese beyden Curven durch willkührliche Bestimmung der beständigen Größen a und b auf unzählige Arten verändert werden können, so läßt sich dadurch eine noch

weit

weit größeree Verschiedenheit erhalten. Denn da aus der ersten quadratischen Gleichung

$$xx - ay + bx = 0$$

ist, so hat man auch

$$acxx - aacy + abcx = 0$$

und addirt man dieses zu der letzten Gleichung, so entsteht eine noch viel weiter sich erstreckende Gleichung für eine Linie der zweyten Ordnung, deren Durchschnittspunkte mit der ersten eben so gut die Wurzeln der gegebenen Gleichung anzeigen. Die beyden Curven, wodurch man die Construction zu Stande bringen kann, sind nemlich

I.

$$ay = xx + bx$$

II.

$$aayy + a(A - 2b)xy + (B - Ab + bb + ac)xx + aacy + (C + abc)x + D = 0$$

und diese letzte Gleichung kann so eingerichtet werden, daß sie jeden Kegelschnitt unter sich begreift. Man darf nur auf die Größe

$$AA - 4B - 4ac$$

sehen. Denn ist diese positiv, so ist die Curve eine Hyperbel; ist sie $= 0$, so ist die Curve eine Parabel; und ist sie negativ, so ist die Curve eine Ellipse. Ein Kreis aber wird diese andere Curve seyn, wenn

$$b = \tfrac{1}{2}A;\ \text{und}\ aa = B - \tfrac{1}{4}AA + ac,$$

oder

$$c = a + \frac{AA}{4a} - \frac{B}{a}$$

ist; denn alsdann ist die Gleichung für denselben

$$aayy + aaxx - \left(a^3 + \frac{AAa}{4} - Ba\right)y + \left(C + \frac{Aaa}{2} + \frac{A^3}{8} - \frac{AB}{2}\right)x + D = 0$$

oder

oder

$$\left(y - \frac{a}{2} - \frac{AA}{8a} + \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(x + \frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa}\right)^2$$
$$=$$
$$\left(\frac{a}{2} + \frac{AA}{8a} + \frac{B}{2a}\right)^2 + \left(\frac{C}{2aa} + \frac{A}{4} + \frac{A^3}{16aa} - \frac{AB}{4aa}\right)^2 - \frac{D}{aa}$$

und dieses Glied das Quadrat des Halbmesser des Kreises

§. 502.

Auf diese Art hat man also aus den Kegelschnitten allein eine unzählige Menge Curven, die, von der Parabel $ay = xx + bx$ geschnitten, durch ihre Durchschnittspunkte zu den Wurzeln einer gegebenen Gleichung führen. Was man von diesen Curven auch für eine nehmen mag, so wird doch die Parabel in denselben Punkten geschnitten, ja es schneiden sich alle jene Linien einander in denselben Punkten. Man kann daher auch aus diesen unzähligen Curven, wenn man die vorhin gedachte Parabel übergeht, irgend zwey nach Belieben annehmen, dieselben über einer gemeinschaftlichen Axe beschreiben, und so durch ihre Durchschnittspunkte die Wurzeln der gegebenen Gleichung kennen lernen. Es kann demnach jene Gleichung construirt werden, entweder durch den Kreis und die Parabel, wie wir schon oben gesehen haben, oder durch zwey Parabeln, oder durch eine Parabel und Ellipse oder Hyperbel, oder durch zwey Ellipsen, oder zwey Hyperbeln, oder durch eine Ellipse und eine Hyperbel. Noch größer aber wird die Mannigfaltigkeit dieser Constructionen, wenn man dazu auch die Curven der höhern Ordnungen anwendet.

§. 503.

§. 503.

Auf ähnliche Art lassen sich die Gleichungen der höhern Grade construiren, wenn man für die eine Curve eine parabolische Linie nimmt, die in der Gleichung $y = P$ enthalten ist. Soll z. B. folgende Gleichung construirt werden,

$$x^{12} - f^{10}x^2 + f^9gx - g^{12} = 0$$

so nehme man diese parabolische Gleichung der vierten Ordnung

$$x^4 = a^3y$$

und da daraus $x^{12} = a^9y^3$ wird, so bekommt man durch die Substitution dieses Werthes folgende Gleichung für eine Linie der dritten Ordnung:

$$a^9y^3 - f^{10}x^2 + f^9gx - g^{12} = 0.$$

Addirt man hierzu irgend ein Vielfaches der ersten Gleichung $x^4 - a^3y = 0$, so findet man eine unzählige Menge Linien der vierten Ordnung, davon je zwey mit einander verbunden zur Construction der gegebenen Gleichung gebraucht werden können.

§. 504.

Ereignet es sich, daß man auf die beschriebene Art aus der gegebenen Gleichung keine bequeme Construction finden kann, so multiplicirt man dieselbe mit x, oder x^2, oder x^3, oder irgend einer andern höhern Potestät von x, so daß zu ihren Wurzeln noch einige verschwindende Wurzeln kommen, welche durch die Durchschnittspunkte im Anfangspunkte der Abscissen angezeigt, und so leicht von den übrigen wahren Wurzeln unterschieden werden. Auf diese Art bekommt man zwar eine Gleichung von einem höhern Grade, allein demungeachtet findet man öfters bequemere

Con-

Constructionen. Wäre z. B. die cubische Gleichung gegeben:

$$x^3 + Axx + Bx + C = 0$$

so würde, wenn man $xx = ay$ setzte, so daß die eine construirende Curve eine Parabel würde, die andere Curve allezeit eine Hyperbel seyn. Denn setzt man ay für xx, so bekommt man die Gleichung:

$$axy + Aay + Bx + C = 0$$

oder, wenn man die erste Gleichung $cxx - acy = 0$ hinzu addirt, folgende von weiterm Umfange

$$axy + cxx + a(A - c)y + Bx + C = 0$$

die aber auch stets eine Gleichung für eine Hyperbel ist. Scheint es daher bequemer, den Kreis, oder die Ellipse, oder die Parabel zu gebrauchen, so multiplicire man die gegebene Gleichung mit x, um

$$x^4 + Ax^3 + Bxx + Cx = 0$$

zu bekommen. Denn vergleicht man diese Gleichung mit der oben construirten biquadratischen Gleichung, so wird $D = 0$, und diese Gleichung läßt sich allemal durch den Kreis und die Parabel construiren.

§. 505.

Da also jede Gleichung, sie mag zu einem Grade gehören, zu was für einem sie will, durch zwey sich schneidende algebraische Curven construirt werden kann, und zwar auf unzählige Arten: so kann man zu der einen Curve was für eine man will annehmen, und daher ist die Frage entstanden: Wie eine gegebene Gleichung vermittelst einer gegebenen Curve construirt werden könne? Hierbey ist zuvörderst zu bemerken, daß die gegebene Curve von der Art seyn muß, daß ihre Applicate durch eine einförmige Funktion von x ausgedruckt wird, damit nicht imaginäre Durch-

schnitte

ſchnittspunkte die Conſtruction verwirren. Denn es iſt nicht hinreichend, daß die gegebene Curve oder auch nur ein gegebener Theil von ihr Abſciſſen habe, welche einer Wurzel der Gleichung gleich ſind, eine Bedingung, die man ausdrücklich beyzufügen pflegt, wenn man nur eine Wurzel der gegebenen Gleichung zu wiſſen verlangt: weil es ſich ereignen kann, daß jener Bogen der Curve gar keinen Durchſchnittspunkt zuläßt, obgleich die Abſciſſe für einen gewiſſen Punkt in ihr eine wahre Wurzel iſt. Es kann nemlich dieſe Wurzel entweder durch einen imaginären Durchſchnittspunkt gehen, oder ſie könnte auch durch den Durchſchnittspunkt eines andern Schenkels, der zu eben der Abſciſſe gehörte, angezeigt werden. Aus dieſem Grunde halte ich mich daher bey dieſer mehr neugierigen als nützlichen Frage nicht auf, da ich die wahren Gründe aller dieſer Conſtructionen ausführlich genug gezeigt habe.