Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Ein und zwanzigstes Capitel. Von den transcendenten Curven.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Ein und zwanzigstes Capitel.

Von den transcendenten Curven.

§. 506.

Bisher haben wir uns mit den algebraischen Curven beschäftiget, und diese waren so beschaffen, daß, wenn die Abscissen auf irgend einer Axe angenommen wurden, die zu diesen Abscissen gehörige Applicaten durch algebraische Funktionen der Abscissen ausgedruckt werden konnten, oder so, denn dies sagt eben dasselbe, daß sich das Verhältniß zwischen den Abscissen und Applicaten durch eine algebraische Gleichung darstellen ließ. Hieraus fließt nun sogleich, daß eine Curve nicht zu den algebraischen gerechnet werden darf, wenn man nicht im Stande ist, den Werth der Applicate durch eine algebraische Funktion auszudrucken. Man nennt aber dergleichen Curven, die keine algebraische sind, transcendente; und es ist folglich eine transcendente Curve eine solche, bey welcher das Verhältniß zwischen den Applicaten und Abscissen durch keine algebraische Gleichung ausgedruckt werden kann. So oft daher die Applicate y einer transcendenten Funktion der Abscisse x gleich ist, so oft muß auch die Curve zu den transcendenten Curven gerechnet werden.

§. 507.

Im ersten Buche haben wir vorzüglich zwey Arten der transcendenten Größen betrachtet, die Logarithmen, und die

die Kreisbogen. Wenn also die Applicate y gleich ist entweder einem Logarithmen der Abscisse x, oder einem Kreisbogen, dessen Sinus, oder Cosinus, oder Tangente durch die Abscisse x ausgedruckt wird, so daß

$$y = lx; \text{ oder } y = A.\sin. x, \text{ oder } y = A.\cos. x;$$
$$\text{oder } y = A.\text{tang}. x$$

ist; oder wenn überhaupt dergleichen Ausdrücke in der Gleichung zwischen x und y enthalten sind, so ist die Curve eine transcendente Curve. Doch machen diese Curven nur einige Arten der transcendenten Linien aus, und es giebt außer ihnen noch eine unzählige Menge anderer, deren Quelle in der Analysis des Unendlichen ausführlich beschrieben werden wird, daß es also eine weit größere Anzahl von transcendenten als von algebraischen Curven giebt.

§. 508.

Wenn eine Funktion keine algebraische Funktion ist, so ist sie transcendent, und macht daher auch die Curve, in deren Gleichung sie sich befindet, zu einer transcendenten. Es sind aber die algebraischen Gleichungen entweder rationale, und enthalten keine andere als ganze Exponenten, oder irrationale, in welchen gebrochene Exponenten vorkommen; allein in diesem letzten Falle kann man sie gleichwohl in rationale Gleichungen verwandeln. Wenn also eine Gleichung für eine Curve so beschaffen ist, daß sie weder rational ist noch rational gemacht werden kann, so gehört sie zu den transcendenten. Wenn nun in einer Gleichung solche Potestäten vorkommen, deren Exponenten weder ganze Zahlen noch Brüche sind, so läßt sich dieselbe nicht rational machen, und es gehören demnach die Curven, die durch solche Gleichungen ausgedruckt werden, zu den transcendenten. Hieraus ergiebt sich die erste und gleichsam einfachste Art der transcendenten Curven, diejenigen nemlich, in deren Gleichungen irrationale Exponenten vorkommen; und da diese Gleichungen weder Logarithmen noch Kreisbogen enthalten, sondern allein durch irrationale Größen hervorgebracht werden: so scheinen auch die dadurch ausgedruckten Curven mit mehrerm Rechte zu der gemeinen Geometrie gerechnet zu werden, und sind daher auch vom Hrn. von Leibnitz interscendente Curven genannt worden, weil sie gleichsam das Mittel zwischen den algebraischen und den transcendenten halten.

§. 509.

Eine solche interscendente Curve ist die in folgender Gleichung

$$y = x^{\sqrt{2}}$$

enthaltene; denn man mag diese Gleichung durch die Erhebung zu Dignitäten verwandeln wie man will, so erhält man doch nie dafür eine rationale Gleichung. Es kann daher eine solche Gleichung auch auf keine Weise geometrisch construirt werden, weil sich keine andere Potestäten geometrisch darstellen lassen als solche, deren Exponenten rationale Zahlen sind, und es unterscheiden sich daher dergleichen Curven auch durchaus von den geometrischen. Denn wollte man den Exponenten $\sqrt{2}$ nur näherungsweise ausdrucken, und dafür einen von folgenden Brüchen setzen,

$$\frac{3}{2};\ \frac{7}{5};\ \frac{17}{12};\ \frac{41}{29};\ \frac{99}{70};\ \text{rc.}$$

so würde man zwar algebraische Curven bekommen, welche sich der gesuchten Curve näherten, aber zu der dritten, oder siebenten, oder siebenzehnten, oder ein und vierzigsten Ordnung, rc. gehören würden. Da also $\sqrt{2}$ nicht anders rational ausgedruckt werden kann, als durch einen

Bruch, dessen Zähler und Nenner unendlich große Zahlen sind, so gehört die durch die Gleichung $y = x^{\sqrt{2}}$ ausgedruckte Curve zu einer Ordnung, deren Höhe durch ∞ ausgedruckt werden muß, und kann folglich nicht zu den algebraischen Curven gerechnet werden. Dazu kommt, daß $\sqrt{2}$ einen doppelten Werth hat, einen positiven und einen negativen; woher denn y allemal einen doppelten Werth erhält, und also die gedachte Curve eine zwiefache Curve wird.

§. 510.

Hiernächst ist man ohne Beyhülfe der Logarithmen gar nicht im Stande, die durch $y = x^{\sqrt{2}}$ ausgedruckte Curve genau zu construiren. Denn da $y = x^{\sqrt{2}}$ ist, so wird, wenn man die Logarithmen nimmt, $ly = \sqrt{2}.lx$, und es giebt folglich der Logarithme einer jeden Abscisse, mit $\sqrt{2}$ multiplicirt, den Logarithmen der Applicate, so daß man die zu jeder Abscisse x gehörige Applicate aus den Logarithmischen Tafeln bestimmen muß. Ist z. B. $x = 0$, so wird auch $y = 0$; ist $x = 1$, so wird auch $y = 1$; dies erkennet man aus der gegebenen Gleichung selbst sehr bald. Ist hingegen $x = 2$, so wird, $ly = \sqrt{2}.l2 = \sqrt{2}. 0,3010300$; und da $\sqrt{2} = 1,41421356$ ist, so hat man $ly = 0, 4257274$, und also näherungsweise $y = 2,665186$. Auf diese Art kann man zu jeder Abscisse die Applicate durch Rechnung finden, und die Curve construiren, wenn für x positive Größen gesetzt werden. Läßt man aber x negativ werden, so ist es schwer zu bestimmen, ob die Werthe von y reell oder imaginair seyn werden. Denn es sey $x = -1$, so bleibt unausgemacht, ob $(-1)^{\sqrt{2}}$ eine reelle oder eine imaginaire Größe sey, indem die näherungsweise für $\sqrt{a}$ gefundenen Zahlen uns nicht in den Stand setzen, darüber etwas zu entscheiden.

§. 511.

Noch offenbarer ist es, daß die Gleichungen, in welchen imaginaire Exponenten vorkommen, zu den transcendenten gerechnet werden müssen. Es kann sich indeß allerdings ereignen, daß Ausdrücke mit imaginairen Exponenten gleichwohl einen reellen und bestimmten Werth haben. Beyspiele hievon sind bereits oben [im ersten Buch im achten Capitel] da gewesen, und es mag daher hier nur folgendes zur Erläuterung stehen:

$$2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}}$$

Ob nemlich gleich sowohl $x^{+\sqrt{-1}}$ als $x^{-\sqrt{-1}}$ imaginair ist, so ist doch die Summe von beyden reell. Denn man setze $lx = v$, und lasse e die Zahl bedeuten, deren hyperbolische Logarithme $= 1$ ist, so wird $x = e^{v}$; und braucht man diesen Werth, so bekommt man

$$2y = e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}.$$

Nun haben wir im ersten Buche §. 138 gesehen, daß

$$\frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} = \text{cos. A.}\, v$$

ist, und es wird folglich

$$y = \text{cos. A.}\, v = \text{cos. A.}\, lx.$$

Ist nemlich irgend ein Werth von x in Zahlen gegeben, so suche man den hyperbolischen Logarithmen davon, und schneide in einem Kreise, dessen Halbmesser $= 1$ ist, einen diesem Logaraithmen gleichen Bogen ab; wo denn der Co-

sinus

sinus dieses Bogens den Werth der Applicate y geben wird. Ist z. B. $x = 2$, so daß

$$2y = 2^{+\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}$$

wird, so hat man

$$y = \text{cos. A. } l2 = \text{cos. A. } 0{,}6931471805599$$

Den Bogen aber, der $l2$ gleich ist, findet man, da der Bogen, der durch $3{,}1415926535$ rc. ausgedruckt wird, 180° enthält, nach der Regel de Tri $= 39^{\circ}, 42', 51'', 52''', 9''''$, und sein Cosinus ist $= 0{,}76923890135408$, welche Zahl folglich den Werth der zu der Abscisse $x = 2$ gehörigen Applicate y ausdruckt. Da also dergleichen Ausdrücke Logarithmen und Kreisbogen in sich enthalten, so werden sie auch mit Recht zu den transcendenten gerechnet.

§. 512.

Die erste Stelle unter den transcendenten Curven nehmen demnach diejenigen Curven ein, deren Gleichungen, außer algebraischen Größen, Logarithmen enthalten, und die einfachste darunter ist diejenige, welche durch die Gleichung

$$l\frac{y}{a} = \frac{x}{b}; \text{ oder } x = bl\frac{y}{a}$$

ausgedruckt wird, wo es gleich ist, was man für ein Logarithmisches System zum Grunde legen will, weil alle Logarithmische Systeme durch die Multiplication mit der beständigen Größe b auf eins zurückgeführt werden. Es bezeichne also l die hyperbolischen Logarithmen, und die durch $x = bl\frac{y}{a}$ ausgedruckte Curve heiße, so wie sie unter diesem Namen bereits allgemein bekannt ist, die Logarithmische Linie. Es bedeute e die Zahl, deren Logarithme $= 1$ ist, und es sey folglich

$$e = 2,7182818284590452353 6028$$

so wird

$$e^{x:b} = \frac{y}{a};\ \text{oder}\ y = a e^{x:b}$$

und aus dieser Gleichung läßt sich die Natur der Logarithmischen Linie sehr leicht erkennen. Denn setzt man für x nach und nach Werthe, die in einer arithmetischen Progression fortgehen, so erhält die Applicate y Werthe, die in einer geometrischen Progression auf einander folgen. Um aber die Gleichung leichter construiren zu können, setze man $e = m^n$ und $b = nc$, so wird $y = a m^{x:c}$, wo m eine jede positive Zahl bedeuten kann, die größer als 1 ist. Wenn also

$$x = 0,\quad c,\quad 2c,\quad 3c,\quad 4c,\quad 5c,\quad 6c,\ \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$y = a,\ am,\ am^2,\ am^3,\ am^4,\ am^5,\ am^6,\ \text{ꝛc.}$$

und legt man der Absciſſe x negative Werthe bey, so wird, wenn man

$$x = -c,\ -2c,\ -3c,\ -4c,\ -5c,\ \text{ꝛc.}$$

setzt,

$$y = \frac{a}{m},\quad \frac{a}{m^2},\quad \frac{a}{m^3},\quad \frac{a}{m^4},\quad \frac{a}{m^5},\ \text{ꝛc.}$$

§. 513.

Hieraus erhellet, daß die Applicate y allenthalben positive Werthe bekommt, die ohne Ende wachsen, wenn man die positiven Absciſſen ohne Ende zunehmen läßt, und auf der andern Seite der Axe ohne Ende abnehmen, so daß daher die Axe Ap, Fig. 101, die Asymptote der Curve wird. Nimmt man nemlich A zum Anfangspunkte der Absciſſen an, so ist daselbst die Applicate $AB = a$, und macht

man

man AP = x, so ist die Applicate

$$PM = y = am^{x:c} = ae^{x:b}$$

und folglich

$$l\frac{y}{a} = \frac{x}{b}$$

Wenn man also die Abscisse AP durch die beständige Größe b dividirt, so druckt der Quotient den Logarithmen des Verhältnisses $\frac{PM}{AB}$ aus. Wenn der Anfangspunkt der Abscissen anderswo in der Axe z. B. in a angenommen wird, so bleibt die Gleichung sich ähnlich. Denn es sey Aa = f, so wird, wenn man aP = t setzt, da dann x = t — f ist,

$$y = ae^{(t-f):b} = ae^{t:b} : e^{f:b}$$

Man setze die beständige Größe $a : e^{f:b} = g$, so wird

$$y = ge^{t:b}.$$

Hieraus erhellet, da ab = g ist, daß

$$\frac{aP}{b} = l\frac{PM}{ab}$$

seyn wird; und zieht man daher irgend zwey Applicaten PM und pm, die um Pp von einander entfernt sind, so wird

$$\frac{Pp}{b} = l\frac{PM}{pm}$$

und die beständige Größe b, wovon jenes Verhältniß abhängt, kann als der Parameter der Logarithmischen Linie betrachtet werden.

§. 514.

Die Tangente der Logarithmischen Linie für jeden Punkt M läßt sich ebenfalls leicht bestimmen. Denn da

$$PM = ae^{x:b}$$

wird, wenn man AP = x nimmt: so ziehe man irgend eine andere Applicate QN, die von der vorigen um PQ = u entfernt liegt. Alsdann ist

$$QN = ae^{(x + u):b} = ae^{x:b} \cdot e^{x:b}$$

und, wenn man die ML der Axe parallel zieht,

$$LN = (QN - PM) = ae^{x:b}(e^{u:b} - 1)$$

Nun ziehe man durch die Punkte M und N die gerade Linie NMT, welche der Axe in dem Punkte T begegne, so ist

$$LN : ML = PM : PT$$

und folglich

$$PT = u : (e^{u:b} - 1).$$

Aber im ersten Buche haben wir gezeigt, daß, durch eine unendliche Reihe ausgedruckt,

$$e^{u:b} = 1 + \frac{u}{b} + \frac{u^2}{2b^2} + \frac{u^3}{6b^3} + \text{ꝛc.}$$

ist, und daher wird also

$$PT = \frac{1}{\frac{1}{b} + \frac{u}{2b^2} + \frac{u^2}{6b^3} + \text{ꝛc.}}$$

Nun verschwinde PQ = u, so wird, weil dann die Punkte M und N zusammenfallen, die gerade Linie NMT die Tangente der Curve, und die Subtangente PT ist dabey = b, und folglich eine beständige Größe, welches eine Haupteigenschaft der Logarithmischen Linie ist. Der Parameter der Logarithmischen Linie b ist daher auch zugleich die Subtangente derselben, und allenthalben von gleicher Größe.

§. 515.

Hier entsteht aber die Frage: Ob auf diese Art die ganze Logarithmische Linie beschrieben sey, und ob dieselbe außer dem Schenkel MBm, der auf beyden Seiten ohne Ende fortläuft, keine Theile weiter habe? Denn wir haben oben gesehen, daß es keine Asymptote giebt, der sich nicht zwey Schenkel näherten, und es haben daher einige behauptet, daß die Logarithmische Linie aus zwey ähnlichen Theilen bestehe, die zu beyden Seiten der Axe sich fort erstreckten, so daß die Asymptote zugleich ein Durchmesser sey. Allein die Gleichung $y = a e^{x : b}$ zeigt diese Eigenschaft auf keine Weise an; denn wenn $\frac{x}{b}$ eine ganze Zahl oder ein Bruch mit einem ungeraden Nenner ist, so hat y nie mehr als einen reellen und dabey positiven Werth. Wenn aber der Bruch $\frac{x}{b}$ einen geraden Nenner hat, so bekommt die Applicate y einen doppelten Werth, einen positiven und einen negativen, und dieser letztere giebt einen Punkt der Curve, der auf der andern Seite der Asymptote liegt, so daß daher die Logarithmische Linie jenseits der Asymptote unzählige von einander abgesonderte Punkte hat, die aber keine continuirliche Linie geben, ob solches gleich, weil man ihre Entfernung von einander so klein machen kann, als man will, statt zu finden scheint. Dies ist eine sehr auffallende Beschaffenheit, dergleichen bey den algebraischen Curven gar nicht statt findet. Aber noch auffallender ist folgende damit in Verbindung stehende. Da die Logarithmen der negativen Zahlen imaginär sind, (welches theils von selbst klar ist, theils auch daraus eingesehen werden kann, weil der Logarithme von -1 zu $\sqrt{-1}$

ein endliches Verhältniß hat) so ist $l - n$ eine imaginäre Größe, die wir $= i$ setzen wollen. Ferner ist der Logarithme eines Quadrats das Zwiefache des Logarithmen der Wurzel, also

$$l.(-n)^2 = l.n^2 = 2i$$

und dabey $l.n$ gleich einer reellen Größe $= 2l.n$. Hieraus müßte nun folgen, daß sowohl die reelle Größe $l.n$ als die imaginäre i Hälften der reellen Größe $l.n^2$ wären; und wäre dies, so müßte ferner jede Zahl eine doppelte Hälfte, eine reelle und eine imaginäre, desgleichen ein dreyfaches Drittel, ein vierfaches Viertel etc. haben, und von diesen Theilen dürfte einer nie mehr als einer reell seyn. Wie dies mit den gewöhnlichen Begriffen von den Größen zu vereinigen sey, ist nicht wohl einzusehen. *)

*) Es sind diese Paradoxa so parador nicht als sie beym ersten Anblick scheinen. Solche Widersprüche, als hier entstehen, pflegt man sonst als ein Kennzeichen zu betrachten, daß irgendwo ein Fehler versteckt liege; warum soll man dies nicht auch bey der gegenwärtigen Materie thun? Was indeß über diesen Punkt weiter zu sagen ist, verspare ich in die Vorrede.

§. 516.

Zugegeben also, was wir hier angenommen haben, so würde folgen, daß die Hälfte von a nicht nur $\frac{a}{2}$, sondern auch $\frac{a}{2} + l.-1$ sey; denn das Doppelte von diesem ist $a + 2l.-1 = a + l.(-1)^2 = a + l.1 = a$; wo bemerkt werden muß, daß $+ l.-1 = - l.-1$ ist, obgleich nicht $l.-1 = 0$ gesetzt werden darf. Denn da $-1 = \frac{+1}{-1}$,

so

so ist $l.-1 = l.+1 - l.-1 = -l.-1$. Auf ähnliche Art ist das Drittel von a, da $\sqrt[3]{1}$ nicht bloß 1, sondern auch $\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$, und folglich $3l\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} = l.1 = 0$ ist, nicht bloß $\frac{a}{3}$ sondern auch $\frac{a}{3} + l\frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}$, und $\frac{a}{3} + l\frac{-1 - \sqrt{-3}}{2}$, indem das Dreyfache eines jeden dieser Ausdrücke dieselbe Größe a giebt. Um diese Widersprüche, die man schlechterdings nicht gelten lassen darf, aus dem Wege zu räumen, muß man zu einem andern paradoxen Satze seiner Zuflucht nehmen, zu dem nemlich, daß zu jeder Zahl unendlich viel Logarithmen gehören, worunter sich aber nicht mehr als ein reeller finde. So giebt es z. B. obgleich der Logarithme von $1 = 0$ ist, außerdem noch eine unzählige Menge imaginärer Logarithmen eben dieser Einheit, nemlich

$$2l.-1;\ 3l.\frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2};\ 4l.-1;\ 4l.\pm\sqrt{-1}$$

und unendlich viel andere, welche man auf dem Wege der Ausziehung der Wurzel findet. Es hat aber diese Behauptung einen weit höhern Grad von Wahrscheinlichkeit, als die vorhergehende: denn setzt man $x = l.a$, so wird $a = e^x$, und folglich

$$a = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \text{etc.}$$

und da dieses eine Gleichung von unendlich vielen Dimensionen ist, so ist es gar nichts besonders, daß x unzählige Wurzeln hat. Ob aber gleich auf diese Art das letzte Paradoxon aufgelöset wird, so bleibt doch das erste in seiner ganzen Stärke, nach welchem zu der logarithmischen Linie un-

unzählige von einander abgesonderte Punkte jenseits der Axe gehören.

§. 517.

Noch deutlicher überzeugt man sich von der Wirklichkeit dieser unzähligen Menge von Punkten durch die Gleichung $y = (-1)^x$. Denn so oft x eine ganze gerade Zahl oder ein Bruch mit einem geraden Zähler ist, so oft ist $y = 1$; wenn aber x eine ungerade Zahl oder ein Bruch ist, dessen Zähler und Nenner ungerade Zahlen sind, so wird $y = -1$; in allen übrigen Fällen, wenn x entweder ein Bruch mit einem geraden Nenner oder gar eine Irrationalzahl ist, ist der Werth von y imaginär. Es giebt daher die Gleichung $y = (-1)^x$ eine unzählige Menge von Punkten, die abgesondert von einander auf beyden Seiten der Axe, und zwar um den Raum $= 1$ von ihr entfernt, liegen. Unter diesen Punkten giebt es kein Paar auf eben der Seite der Axe, die nicht von einander abgesondert wären, und demungeachtet sind sie sich so nahe, daß die Entfernung zwischen ihnen kleiner als jede gegebene Größe ist. Denn zwischen jeden zwey noch so nahen Werthen der Absciſſe lassen sich nicht einer sondern unzählige Brüche setzen, deren Nenner ungerade Zahlen sind, und aus jedem dieser Werthe findet man einen zu der gegebenen Gleichung gehörigen Punkt. Es scheint also nur, als ob man durch diese Punkte auf zwey gerade Linien geführt werde, die der Axe parallel laufen, und von ihr zu beyden Seiten um 1 entfernt sind, indem es in diesen Linien keinen Theil giebt, worin man nicht einen, sondern unzählige Punkte, die in der Gleichung $y = (-1)^x$ enthalten sind, angeben könnte. Eben diese Anomalie findet auch bey der Gleichung $y = (-a)^x$ und andern ihr ähnlichen statt, in welchen eine negative Größe

zu

zu einer unbestimmten Potestät erhoben ist, und es war daher nöthig, diese bey den transcendenten Curven möglichen auffallenden Beschaffenheiten hier zu berühren.

§. 518.

Zu diesem Geschlechte der Curven, welche von Logarithmen abhängen, gehören nicht nur alle Gleichungen, worin Logarithmen vorkommen, sondern auch diejenigen, die Exponential-Größen enthalten, indem dergleichen Größen sich ergeben, wenn man von den Logarithmen zu den Zahlen fortgeht; daher denn auch diese Curven Exponential-Curven genannt werden. Eine solche Curve ist die in der Gleichung $y = x^x$, oder $ly = xlx$ enthaltene. Denn setzt man $x = 0$, so wird $y = 1$; setzt man $x = 1$, so wird auch $y = 1$; setzt man $x = 2$, so wird $y = 4$; setzt man $x = 3$, so wird $y = 27$, rc. Es stellt daher BDM, Fig. 102, die Gestalt dieser Curve für die Axe AP vor, so daß, wenn man $AC = 1$ seyn läßt, $AB = CD = 1$ ist. Zwischen A und C aber sind die Applicaten kleiner als 1; denn macht man $x = \frac{1}{2}$, so wird $y = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071068$: und die kleinste Applicate findet man, wenn man die Abscisse $x = \frac{1}{e} = 0{,}36787944$ setzt, wo die Applicate $y = 0{,}6922005$ wird, wie in dem Folgenden gelehrt werden soll. Um aber zu sehen, wie die Curve jenseits B beschaffen sey, muß man x negativ machen, wodurch also $y = \frac{1}{(-x)^x}$, werden, und die Curve aus lauter von einander abgesonderten Punkten bestehen wird, die sich der Axe als einer Asymptote nähern. Es fallen aber diese Punkte bald auf die eine bald auf die andere Seite der Axe,

je

je nachdem x entweder eine gerade oder eine ungerade Za bedeutet. Ja auch unter der Axe AP kommen unzählig solcher Punkte zu liegen, wenn man für x einen Bruch m einem geraden Nenner setzt; denn macht man $x = \frac{1}{2}$, wird $y = + \frac{1}{\sqrt{2}}$, und $y = \frac{-1}{\sqrt{2}}$. Es endigt sich daher d continuirliche Curve MDB wider die Art der algebraisch Linien plötzlich in B, und anstatt der Fortsetzung hat sie von einander abgesonderten Punkte, woher denn die Real tät dieser gleichsam zugehörigen Punkte aufs deutlichste die Augen fällt. Denn wenn dergleichen nicht zugegeb werden sollten, so müßte man annehmen, daß die Curv in dem Punkte B plötzlich aufhöre, und dies wäre de Gesetze der Continuität zuwider, und folglich falsch.

§. 519.

Unter den unzähligen Curven von dieser Gattung, der Construction durch die Logarithmen erhalten werden kan giebt es auch einige, wobey man nicht sogleich wahrnimm wie sie construirt werden können, wo man sich aber de noch durch eine geschickte Substitution leicht hilft. Es g höret hieher die durch die Gleichung $x^y = y^x$ ausgedrück Curve. Denn ob man hier gleich beym ersten Anblick ei sieht, daß die Applicate y beständig der Abscisse x gleich is so daß eine gerade Linie, die mit der Axe einen halb rechten Winkel macht, der angeführten Gleichung ein Ge nüge thut: so ist doch auch offenbar, daß eben diese Gle chung einen weitern Umfang hat, als die Gleichung f die gerade Linie $y = x$; und daß sie also dadurch nicht e schöpft wird, indem ihr ebenfalls ein Genüge geschehe kann, ohne daß $x = y$ ist: denn setzt man $x = 2$, so kan y auch = 4 seyn. Es druckt demnach die gegebene Gleichung außer der geraden Linie E A F, Fig. 103, noch andere Linien aus, die man mit jener als Theile der darin enthaltenen ganzen Curve ansehen kann; und um auch diese Theile oder die ganze Curve zu finden, setze man

$$y = tx$$

so daß

$$x^{tx} = t^x x^x$$

werde. Zieht man hieraus die xte Wurzel, so wird

$$x^t = tx, \text{ und } x^{t-1} = t$$

und man hat daher

$$x = t^{1:(t-1)}; \text{ und } y = t^{t:(t-1)}$$

oder, wenn man $t - 1 = \frac{1}{u}$ setzt

$$x = (1 + \frac{1}{u})^u; \text{ und } y = (1 + \frac{1}{u})^{u+1}.$$

Es hat folglich die Curve, welche durch die Gleichung $x^y = y^x$ ausgedruckt wird, außer der geraden Linie E A F noch den Schenkel R S, welcher sich den geraden Linien A G und A H als Asymptoten nähert, und wovon die gerade Linie A F der Durchmesser ist. Es schneidet aber die Curve die gerade Linie A F in dem Punkte C, so daß AB = BC = e ist, wenn e die Zahl bedeutet, deren Logarithme = 1 ist. Außerdem aber giebt diese Gleichung eine unzählige Menge von einander abgesonderter Punkte, welche nebst der geraden Linie E F und der Curve R C S die Gleichung erschöpfen. Es lassen sich also unzählige Paare von Zahlen x und y angeben, die so beschaffen sind, daß

$$x^y = y^x$$

ist. Von den Rational-Zahlen z. B. sind dergleichen

x =

$$x = 2 \qquad\qquad y = 4$$

$$x = \frac{3^2}{2^2} = \frac{9}{4} \qquad y = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$$

$$x = \frac{4^3}{3^3} = \frac{64}{27} \qquad y = \frac{4^4}{3^4} = \frac{256}{81}$$

$$x = \frac{5^4}{4^4} = \frac{625}{256} \qquad y = \frac{5^5}{4^5} = \frac{3125}{1024}$$

$$\text{rc.} \qquad\qquad \text{rc.}$$

Wenn man nemlich von jedem Paare dieser Zahlen die eine zu der Potestät erhebt, die zum Exponenten die andere Zahl hat, so bekommt man allemal gleiche Größen. So ist

$$2^4 = 4^2 = 16$$

$$\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{27}{8}} = \left(\frac{27}{8}\right)^{\frac{9}{4}} = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{27}{4}}$$

$$\left(\frac{64}{27}\right)^{\frac{256}{81}} = \left(\frac{256}{81}\right)^{\frac{64}{27}} = \left(\frac{4}{3}\right)^{\frac{256}{27}}$$

rc.

§. 520.

Obgleich bey diesen und den ihnen ähnlichen Curven unzählige Punkte algebraisch gesucht werden können, so darf man doch deswegen diese Curven nicht zu den algebraischen zählen, weil es außer jenen Punkten auch eine unzählige Menge solcher Punkte giebt, die sich nicht algebraisch bestimmen lassen. Wir wollen uns also zu einer andern Gattung der transcendenten Curven wenden, zu solchen nemlich, bey welchen Kreisbogen gebraucht werden; und um dabey die Rechnung nicht durch den Gebrauch zu vieler Zeichen ohne Noth schwer zu machen, den Halbmesser des Kreises, von welchem Bogen bey der Construction

struction vorkommen, allenthalben der Einheit gleich setzen. Daß aber diese Curven nicht zu den algebraischen gehören, ist leicht zu zeigen, obgleich die Unmöglichkeit der Quadratur des Kreises noch nicht außer allem Zweifel ist. Wir dürfen zu diesem Entzwecke nur die einfachste Curve von dieser Art nehmen, diejenige nemlich, welche durch die Gleichung

$$\frac{y}{a} = A.\sin.\frac{x}{c}$$

ausgedruckt wird, so daß die Applicate y dem Bogen eines Kreises proportional ist, dessen Sinus durch $\frac{x}{c}$ ausgedruckt werden kann. Denn da zu einem und demselben Sinus $\frac{x}{c}$ unzählige Bogen gehören, so ist die Applicate y eine infinitinomische Funktion, und es schneidet daher sowohl sie selbst als jede andere gerade Linie die Curve in unzähligen Punkten; ein Umstand, der diese Curve von den algebraischen aufs schärfste absondert. Es sey s der kleinste von den Bogen, die zu dem Sinus $\frac{x}{c}$ gehören, und π bedeute den halben Umkreis: so sind die Werthe von $\frac{y}{a}$ folgende:

$s;\ \pi - s;\ 2\pi + s;\ 3\pi - s;\ 4\pi + s;\ 5\pi - s;$ rc.
$-\pi - s; -2\pi + s; -3\pi - s; -4\pi + s; -5\pi - s;$ rc.

Nimmt man also Fig. 104 die gerade Linie CAB zur Axe, und A zum Anfangspunkte der Abscissen an, so ist zuvörderst, wenn man die Abscisse $x = o$ setzt, die Applicate $AA^1 = \pi a$; $AA^2 = 2\pi a$; $AA^3 = 3\pi a$, rc. und auf der andern Seite $AA^{-1} = \pi a$; $AA^{-2} = 2\pi a$; $AA^{-3} = 3\pi a$, rc. Nimmt man aber die Abscisse $AP = x$, so schneidet die Applicate die Curve in unzähligen Punkten M, und es ist $PM^1 = as$; $PM^2 = a(\pi - s)$; $PM^3 = a(2\pi + s)$ ꝛc. Es besteht demnach die ganze Curve aus unzähligen Theilen AE^1A^1; $A^1F^1A^2$; $A^2E^2A^3$; $A^3F^2A^4$; ꝛc. die einander ähnlich sind, so daß die geraden Linien, welche der Axe BC parallel sind, und durch die Punkte E und F gehen, Durchmesser der Curve werden. Es ist aber $AC = AB = c$, und die Intervalle E^1E^2; E^2E^3; E^1E^{-1}; $E^{-1}E^{-2}$; F^1F^2; F^2F^{-1}; $F^{-1}F^{-2}$ sind, jedes allein genommen, $= 2a\pi$. Diese Curve wird vom Hrn. von Leibnitz die Linie der Sinus genannt, weil man durch sie den Sinus eines jeden Bogens auf eine leichte Art finden kann. Denn da $\frac{y}{a} = A.\sin.\frac{x}{c}$ ist, so ist auch $\frac{x}{c} = \sin.A.\frac{y}{a}$. Wenn man $\frac{y}{a} = \frac{1}{2}\pi - \frac{z}{a}$ setzt, so wird $\frac{x}{c} = \cos.A.\frac{z}{a}$ und so hat man zugleich die Linie der Cosinus.

§. 521.

Auf ähnliche Art findet man die Linie der Tangenten, deren Gleichung $y = A.\text{tang}.x$ ist, wenn man der Kürze wegen $a = 1$, und $c = 1$ setzt. Hieraus wird nemlich durch die Umkehrung $x = \text{tang}.A.y = \frac{\sin.y}{\cos.y}$, und die Gestalt dieser Curve läßt sich leicht aus der Natur der Tangenten erkennen. Es hat aber dieselbe unzählige einander parallele Asymptoten. Auf gleiche Art kann man die Linie der Secanten aus der Gleichung $y = A.\sec.x$, oder $x = \sec.A.y = \frac{1}{\cos.y}$ beschreiben, die ebenfalls unzählige ohne Ende fortlaufende Schenkel hat. Am bekanntesten aber ist aus diesem Geschlechte der Curven die Cycloide oder Trochoide geworden, welche von einem Punkte in der Peripherie eines Kreises beschrieben wird, wenn sich dieselbe auf einer geraden Linie fortwälzt, und deren Gleichung für rechtwinklige Coordinaten $y = \sqrt{(1 - xx)} + A . \text{cos}. x$ ist. Diese Curve ist sowohl wegen der leichten Art sie zu beschreiben, als auch wegen der vielen besondern Eigenschaften, die sich bey ihr finden, sehr merkwürdig. Da aber die meisten von diesen Eigenschaften ohne die Analysis des Unendlichen nicht erklärt werden können, so wollen wir hier nur die vornehmsten von denen, die aus der Beschreibung der Linie selbst fließen, kürzlich betrachten.

§. 522.

Es wälze sich also der Kreis ACB, Fig. 105, über der geraden Linie EA fort, und damit die Untersuchung desto weiter sich erstrecke, so beschreibe, nicht ein Punkt der Peripherie B, sondern irgend ein Punkt des verlängerten Durchmessers D die Curve Dd. Es sey der Halbmesser dieses Kreises $CA = CB = a$, und die Entfernung $CD = b$, und darin D der äußerste Punkt. Nun sey der Kreis bey seiner Umwälzung in die Lage aQbR gekommen, so ist, wenn man den Raum $AQ = z$ setzt, der Bogen $aQ = z$, der durch den Halbmesser a dividirt, den Winkel $acQ = \frac{z}{a}$ giebt; ferner befindet sich der beschreibende Punkt in d, so daß $cd = b$, der Winkel $dcQ = \pi - \frac{z}{a}$, und d ein Punkt in der gesuchten Curve ist. Man ziehe also aus d zuvörderst die gerade Linie dp auf die AQ senkrecht, und eben so die dn auf QR; so ist $dn = b . \text{sin}. \frac{z}{a}$; und $cn = - b . \text{cos}. \frac{z}{a}$; folglich $Qn = dp = a + b . \text{cos}. \frac{z}{a}$. Man verlängere die dn, bis sie der geraden Linie AD in P begegne, und setze die Coordinaten $DP = x$, und $Pd = y$; so ist $x = b + cn$; oder $x = b - b.\cos.\frac{z}{a}$, und $y = AQ + dn = z + b.\sin.\frac{z}{a}$. Da also $b.\cos.\frac{z}{a} = b - x$ ist, so wird $b.\sin.\frac{z}{a} = \sqrt{(2bx - xx)}$ und $z = aA.\cos.(1 - \frac{x}{b}) = aA.\sin.\frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$; und gebraucht man diese Werthe, so wird $y = \sqrt{(2bx - xx)} + aA.\sin.\frac{\sqrt{(2bx - xx)}}{b}$. Oder nimmt man die Abscissen in der Axe AD vom Mittelpunkte an, und setzt dabey $b - x = t$, so wird

$$\sqrt{(2bx - xx)} = \sqrt{(bb - tt)}$$

und dann hat man zwischen t und y folgende Gleichung:

$$y = \sqrt{(bb - tt)} + aA.\cos.\frac{t}{b}$$

welche die gemeine Cycloide giebt, wenn $b = a$ ist; ist aber b entweder größer oder kleiner als a, so bekommt die Curve den Namen der abgekürzten oder der verlängerten Cycloide. Es ist aber y allemal eine unendlich vielfache Funktion von x oder von t; oder es schneidet jede der Grundlinie AQ parallel gezogene gerade Linie die Curve in unzähligen Punkten, wofern nicht ihre Entfernung x oder t so groß ist, daß $\sqrt{(2bx - xx)}$ oder $\sqrt{(bb - tt)}$ eine imaginäre Größe wird.

§. 523.

Zu den bekanntesten Curven dieser Gattung gehören die Epicycloiden und die Hypocycloiden, welche entstehen,

stehen, wenn sich ein Kreis ACB, Fig. 106, über der Peripherie eines andern Kreises OAQ umwälzt, und, indem solches geschiehet, irgend ein Punkt D, welchen man entweder innerhalb oder außerhalb des beweglichen Kreises angenommen hat, die Curve Dd beschreibt. Man setze den Halbmesser des unbeweglichen Kreises $OA = c$, den Halbmesser des beweglichen aber $CA = CB = a$, die Entfernung des beschreibenden Punktes $CD = b$, und lasse die gerade Linie OD die Axe der gesuchten Curve seyn. Aus dieser anfänglichen Lage, bey welcher die Punkte O, C, D in einer geraden Linie sind, komme der bewegliche Kreis in die Lage QcR, nachdem er den Bogen $AQ = z$ beschrieben hat, daß also $AOQ = \frac{z}{c}$ sey. Alsdann ist der Bogen

$Qa = AQ = z$ und daher der Winkel $acQ = \frac{z}{a} = Rcd$,

und wenn man $cd = CD = b$ macht, der Punkt d in der Curve Dd. Man fälle aus ihm auf die Axe die senkrechte Linie dP herab, und eben so stelle man cm aus c auf die Axe senkrecht, und ziehe außerdem cn der Axe OD parallel. Da der Winkel $Rcn = AOQ = \frac{z}{c}$ ist, so wird der Winkel

$$dcn = \frac{z}{c} + \frac{z}{a} = \frac{(a+c)z}{ac}$$

und daher bekommt man

$$dn = b.\sin.\frac{(a+c)z}{ac}; \text{ und } cn = b.\cos.\frac{(a+c)z}{ac}$$

Da ferner $OC = Oc = a + c$ ist, so wird

$$cm = (a+c).\sin.\frac{z}{c}; \text{ und } Om = (a+c).\cos.\frac{z}{c}.$$

Nennt man also die rechtwinkligen Coordinaten $OP = x$ und $Pd = y$, so wird

$$x = (a + c).\,\mathrm{cos.}\,\frac{z}{c} + b.\,\mathrm{cos.}\,\frac{(a + c)z}{ac}$$

und

$$y = (a + c).\,\mathrm{sin.}\,\frac{z}{c} + b.\,\mathrm{sin.}\,\frac{(a + c)z}{ac}.$$

Hieraus erhellet, daß die unbekannte Größe z, wenn $\frac{a+c}{a}$ eine rationale Zahl ist, wegen der alsdann statt findenden Commensurabilität der Winkel $\frac{z}{c}$ und $\frac{(a + c)z}{ac}$ weggeschafft, und also eine algebraische Gleichung zwischen den unbekannten Größen x und y gefunden werden kann. In den übrigen Fällen ist die auf diese Art beschriebene Curve eine transcendente.

Wenn man a negativ nimmt, so ist die sich ergebende Curve eine Hypocycloide, indem alsdann der bewegliche Kreis innerhalb des unbeweglichen fällt. Gemeiniglich setzt man b dem Halbmesser a gleich, und dann entstehen die eigentlich sogenannten Epicycloiden und Hypocycloiden. Die hier gefundenen Curven erstrecken sich also weiter, und weil ihre Gleichungen nicht schwerer sind, hat es mir nicht undienlich geschienen, diese Bedingung hinzuzufügen. Wenn man die Quadrate xx und yy addirt, so wird

$$xx + yy = (a + c)^2 + b^2 + 2b(a + c).\,\mathrm{cos.}\,\frac{z}{a}$$

und vermittelst dieser Gleichung wird die unbekannte Größe z noch leichter weggeschafft, wenn die Größen a und c commensurabel sind.

§. 524.

Außer dem Fällen, in welchen die Halbmesser der Kreise a und c unter einander commensurabel sind, und die

Curven

Curven algebraische werden, ist auch der zu bemerken, wenn $b = -a - c$ ist, oder wenn der Punkt D in den Mittelpunkt O des unbeweglichen Kreises fällt. Es sey also

$$b = -a - c$$

so ist

$$xx + yy = 2(a + c)^2(1 - \cos.\frac{z}{a}) = 4(a + c)^2(\cos.\frac{z}{2a})^2$$

und daher wird

$$\cos.\frac{z}{2a} = \frac{\sqrt{(xx + yy)}}{2(a + c)}$$

Da hiernächst

$$x = (a + c)(\cos.\frac{z}{c} - \cos.\frac{(a + c)z}{ac})$$

und

$$y = (a + c)(\sin.\frac{z}{c} - \sin.\frac{(a + c)z}{ac})$$

ist, so wird

$$\frac{x}{y} = -\operatorname{tang}.\frac{(2a + c)z}{2ac}$$

und

$$\sin.\frac{(2a + c)z}{2ac} = \frac{x}{\sqrt{(xx + yy)}}$$

und

$$\cos.\frac{(2a + c)z}{2ac} = \frac{-y}{\sqrt{(xx + yy)}}$$

Da nun $\sqrt{(xx + yy)} = 2(a + c)\cos.\frac{z}{2a}$ ist, so wird

$$x = 2(a + c).\cos.\frac{z}{2a}.\sin.\frac{(2a + c)z}{2ac},$$

und

$$y = -2(a + c).\cos.\frac{z}{2a}.\cos.\frac{(2a + c)z}{2ac}.$$

Es sey z. B. $c = 2a$, so wird

$$x = 6a. \cos. \frac{z}{2a}. \sin. \frac{z}{a}$$

und

$$y = -6a. \cos. \frac{z}{2a}. \cos. \frac{z}{a}$$

und

$$\sqrt{(xx + yy)} = 6a. \cos. \frac{z}{2a}.$$

Man setze $\cos. \frac{z}{2a} = q$, so wird $\sin. \frac{z}{2a} = \sqrt{(1-qq)}$; $\sin. \frac{z}{a} = 2q\sqrt{(1-qq)}$, und $\cos. \frac{z}{a} = 2qq - 1$: folglich

$$q = \frac{\sqrt{(xx + yy)}}{6a}$$

und

$$y = -6aq(2qq - 1) = (1 - 2qq)\sqrt{(xx + yy)}$$

$$= (1 - \frac{xx - yy}{18aa})\sqrt{(xx + yy)}$$

oder

$$18aay = (18aa - xx - yy)\sqrt{(xx + yy)}.$$

Setzt man $18aa = ff$, und nimmt dabey die Quadrate, so bekommt man folgende Gleichung der sechsten Ordnung:

$$(xx + yy)^3 = 2ff(xx + yy)^2 + f^4xx = 0.$$

Da es jetzt nicht unsere Absicht ist, algebraische, sondern transcendente Curven zu betrachten, so wollen wir diese Curven fahren lassen, und zu solchen transcendenten Curven fortgehen, deren Construction sowohl Logarithmen als Kreisbogen erfordert.

§. 525.

Eine solche Curve haben wir schon oben § 511 aus der Gleichung

$$2y = x^{+\sqrt{-1}} + x^{-\sqrt{-1}}$$

gefunden, welche wir in folgende

$$y = \cos. A.lx$$

verwandelten. Nun ergiebt sich aus dieser ferner

$$A.\cos. y = lx; \text{ und } x = e^{A.\cos. y}$$

und nimmt man daher, Fig. 107, die gerade Linie AP zur Axe, und in ihr A zum Anfangspunkte der Abscissen an, so ist zuvörderst klar, daß jenseits A, da, wo die Abscissen negativ sind, kein continuirlicher Theil der Curve ist, daß aber die Axe AP von der Curve in unzähligen Punkten D geschnitten wird, deren Entfernung von A in einer geometrischen Progression stehen. Es ist nemlich $AD = e^{\frac{\pi}{2}}$; $AD^1 = e^{\frac{3\pi}{2}}$; $AD^2 = e^{\frac{5\pi}{2}}$; $AD^3 = e^{\frac{7\pi}{2}}$; rc. Auch giebt es unzählige Durchschnittspunkte, die näher nach A liegen; $AD^{-1} = e^{\frac{-\pi}{2}}$; $AD^{-2} = e^{\frac{-3\pi}{2}}$; $AD^{-3} = e^{\frac{-5\pi}{2}}$; rc.

Ferner läuft diese Curve zu beyden Seiten der Axe bis zu den Entfernungen $AB = AC = 1$ fort, und berührt daselbst die mit der Axe parallel gezogenen geraden Linien in unzähligen Punkten E und F, deren Entfernungen von B und C ebenfalls eine geometrische Progression geben. Es nähert sich also die Curve der geraden Linie BC durch unzählige Bogen, und fällt endlich ganz mit ihr zusammen. Die dieser Curve eigenthümliche besondere Beschaffenheit besteht also darin, daß nicht eine unendliche, sondern eine endliche gerade Linie BC ihre Asymptote ist, und durch diese Eigenschaft ist sie von den algebraischen Curven hinlänglich abgesondert.

§. 526.

Zu den transcendenten Curven, zu deren Construction Winkel, entweder allein, oder mit Logarithmen verbunden, erforderlich sind, gehören auch die unzähligen Arten der Spiral Linien. Es beziehen sich aber die Spiral-Linien auf einen gewissen festen Punkt C, Fig. 108, als auf einen Mittelpunkt, und erstrecken sich um denselben gemeiniglich in unzähligen Bogen. Die Natur dieser Curven läßt sich am bequemsten durch eine Gleichung zwischen der Entfernung CM irgend eines Punkts der Curve M vom Mittelpunkte C, und dem Winkel ACM, den diese gerade Linie CM mit der der Lage nach gegebenen geraden Linie CA macht, ausdrucken. Es sey also der Winkel $ACM = s$, oder s der Bogen eines mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Kreises, welcher das Maaß des Winkels ACM ausdruckt, und die gerade Linie $CM = z$. Wenn bey diesen Voraussetzungen eine Gleichung zwischen den veränderlichen Größen s und z gegeben ist, so ist solches eine Gleichung für eine Spiral-Linie. Da nemlich der Winkel ACM außer s auf unzählige Arten ausgedruckt werden kann, indem die Winkel $2\pi + s$; $4\pi + s$; $6\pi + s$; ꝛc., desgleichen $-2\pi + s$; $-4\pi + s$; ꝛc. eben die Lage der geraden Linie CM geben: so erhält, wenn man diese Werthe anstatt s in die Gleichung bringt, die Entfernung CM unzählige von einander verschiedene Werthe, und es schneidet demnach die gerade Linie CM, verlängert, die Curve in unzähligen Punkten, wofern nicht z aus diesen Werthen imaginär wird. Um von dem einfachsten Falle anzufangen, wo $y = as$ ist; so sind dabey die Werthe von y für einerley Lage der geraden

Linie CM folgende: $a(2\pi + s)$; $a(4\pi + s)$; $a(6\pi + s)$ 2c. desgleichen $-a(2\pi - s)$; $-a(4\pi - s)$; $-a(6\pi - s)$ 2c. Ja es bleibt die Lage der geraden Linie CM dieselbe, wenn man für s den Bogen $\pi + s$ setzt, nur daß man den Werth von z negativ nehmen muß; und man hat daher zu den angeführten Werthen von z noch folgende zu setzen: $-a(\pi + s)$; $-a(3\pi + s)$; $-a(5\pi + s)$; 2c. und dann auch noch diese $a(\pi - s)$; $a(3\pi - s)$; $a(5\pi - s)$ 2c. Die Gestalt dieser Curve ist demnach so, wie die 109te Figur dieselbe darstellt. Sie berührt nemlich die gerade Linie AC in C, und erstreckt sich von da in zwey Schenkeln, die sich in unzähligen Bogen um den Mittelpunkt C winden, und einander in der Linie BC, welche auf AC senkrecht ist, schneiden, ohne Ende fort, und hat die gerade Linie BCB zum Durchmesser. Man nennt aber diese Curve nach ihrem Erfinder die Archimedeische Spiral-Linie; und hat man sie einmal beschrieben, so kann man sich ihrer, wie aus der Gleichung $z = as$ von selbst einleuchtet, bedienen, um jeden Winkel in jede beliebige Anzahl von Theilen zu theilen.

§. 527.

So wie die Gleichung $z = as$, die, wenn z und s rechtwinklige Coordinaten wären, eine Gleichung für eine gerade Linie seyn würde, die Archimedeische Spiral-Linie gegeben hat: so erhält man daraus, wenn man andere algebraische Gleichungen zwischen z und s annimmt, unendlich viel andere Spiral-Linien, wofern nemlich die Gleichung so beschaffen ist, daß zu jedem Werthe von s reelle Werthe von z gehören. So giebt die Gleichung

$$z = \frac{a}{s}$$

welche der Gleichung für die Hyperbel ähnlich ist, wenn

die

dieselbe auf die Asymptoten bezogen wird, die Spiral-Linie, welche Johann Bernoulli die hyperbolische Spiral-Linie nennt, und welche sich, nachdem sie aus dem Mittelpunkte C in unzähligen Bogen ausgegangen, endlich in einer unendlichen Entfernung der geraden Linie A A als einer Asymptote nähert. Wenn man die Gleichung

$$z = a \sqrt{s}$$

seyn läßt, so gehört zu den Winkeln s, negativ genommen, keine reelle Entfernung z; dagegen entspricht jedem positiven Werthe von s ein doppelter Werth von z, ein positiver und ein negativer; die Spiral-Bogen um C sind indeß ohne Ende. Ist die Gleichung zwischen z nnd s von folgender Art:

$$z = a \sqrt{(nn - ss)}$$

so hat die veränderliche Größe z keinen reellen Werth, außer wenn s zwischen die Grenzen + n und — n fällt, und es ist daher die Curve in diesem Falle endlich. Legt man nemlich, Fig. 110, durch den Mittelpunkt C die geraden Linien EF, EF, so daß sie mit der Axe ACB den Winkel = n machen, so berühren diese Linien die Curve in C, und die Curve selbst bekommt die Gestalt einer Bandschleife ACBCA. Auf ähnliche Art kann man die Gestalt unzähliger anderer transcendenten Linien bestimmen; allein wir würden zu weitläuftig werden, wenn wir uns länger dabey verweilen wollten.

§. 528.

Einen unendlichen Umfang bekommt vollends diese Untersuchung, wenn man nicht bloß algebraische, sondern auch transcendente Gleichungen zwischen z und s nimmt. Unter den Curven, welche man dann findet, verdient vorzüglich die gemerkt zu werden, die durch die Gleichung

s =

$$s = nl.\frac{z}{a}$$

ausgedruckt wird. Hierbey sind nemlich die Winkel s den Logarithmen der Entfernungen proportional, weswegen auch diese Curve die Logarithmische Spiral-Linie genannt wird, so wie sie wegen ihrer vielen besondern Eigenschaften eine sehr bekannte Curve ist. Die Haupteigenschaft derselben ist, daß alle aus dem Mittelpunkte C, Fig. 111, gezogene gerade Linien die Curve unter gleichen Winkeln schneiden. Um eine Gleichung dafür zu erhalten, setze man den Winkel ACM = s, und die gerade Linie CM = z, so ist

$$s = nl.\frac{z}{a}; \text{ und } z = ea^{\frac{s}{n}}.$$

Dann nehme man einen größern Winkel ACN = s + v, so wird

$$CN = ae^{\frac{s}{n}} e^{\frac{v}{n}}$$

und folglich, nachdem man aus dem Mittelpunkte C den Bogen ML beschrieben hat, der = zv seyn wird

$$LN = ae^{\frac{s}{n}}(e^{\frac{v}{n}} - 1) = ae^{\frac{s}{n}}\left(\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \text{etc.}\right)$$

Hieraus fließt

$$\frac{ML}{LN} = \frac{v}{\frac{v}{n} + \frac{v^2}{2n^2} + \frac{v^3}{6n^3} + \text{etc.}} = \frac{n}{1 + \frac{v}{2n} + \frac{v^2}{6nn} + \text{etc.}}$$

Wenn

Wenn aber die Differenz der Winkel $MCN = v$ verschwin-det, so wird $\frac{ML}{LN}$ die Tangente des Winkels, welchen der Halbmesser CM mit der Curve macht; und wenn also $v = 0$ genommen wird, so ist die Tangente dieses Winkels $AMC = n$ und also eine beständige Größe. Wenn $n = 1$ ist, so ist dieser Winkel ein halber rechter Winkel, und in diesem Falle wird die logarithmische Special-Linie halbrechtwinklig genannt.