Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Zwey und zwanzigstes Capitel. Auflösung einiger den Kreis betreffenden Aufgaben.

Zwey und zwanzigstes Capitel.

Auflösung einiger den Kreis betreffender Aufgaben.

§. 529.

Wir haben oben gesehen, [im ersten Buche im achten Capitel], daß, wenn man den halben Umkreis durch π ausdruckt, der Bogen von 180°, oder

$$\pi = 3,14159265358979323846264338$$

ist. Der gemeine Logarithme dieser Zahl ist

$$= 0,497149872694133854351268288$$

und wenn man denselben durch 2,30258 ꝛc. multiplicirt, so findet man den hyperbolischen Logarithmen eben dieser Zahl

$$= 1,1447298858494001741434237$$

Da auf diese Art die Länge eines Bogens von 180° bekannt ist, so kann man auch die Länge jedes in Graden gegebenen Bogens in Zahlen ausdrucken. Ist also ein Bogen von n Graden gegeben, und seine Länge $= z$, so ist

$$180 : n = \pi : z$$

folglich

$$z = \frac{\pi n}{180}$$

und den Logarithmen von z findet man, wenn man von dem Logarithmen von n die Zahl

$$1,758122632409172215452526413$$

abzieht. Wenn aber der gegebene Bogen in Minuten ausgedruckt, und also n′ gegeben ist, so muß man von dem Logarithmen von n diesen Logarithmen abziehen:

3,5362738827928158479612932 11

Ist endlich der Bogen in Secunden gegeben, und also = n″; so findet man seinen Logarithmen, wenn man von dem Logarithmen der Zahl n den Logarithmen

5,3144251331764594804700060009

subtrahirt, oder zu dem Logarithmen der Zahl n

4,6855748668235405195299939990

addirt, und von der Charakteristik der Summe 10 abzieht.

§. 530.

Umgekehrt lassen sich hiernach der Halbmesser und alle Theile von ihm, dergleichen die Sinus, die Tangenten und Secanten sind, in Bogen verwandeln, und diese Bogen dann auf die gewöhnliche Art in Graden, Minuten und Secunden ausdrucken. Es sey z eine solche durch den Halbmesser 1 und Decimaltheile von ihm ausgedruckte Linie. Man nehme ihren Logarithmen, und setze zu der Charakteristik desselben 10 hinzu, um diesen Logarithmen so zu erhalten, wie er in den Tafeln der Sinus, der Tangenten und Secanten ausgedruckt zu seyn pflegt. Alsdann subtrahire man davon

4,6855748668235405195299939990

oder addire dazu

5,3144251331764594804700060009

wo denn in beyden Fällen der Logarithme sich ergiebt, dessen zugehörige Zahl den Bogen, in Secunden ausgedruckt, giebt. Im letzten Falle muß man die Charakteristik um 10 verkleinern. Wird aber ein Bogen gesucht, welcher dem Halbmesser gleich sey, so findet man denselben leichter ohne Logarithmen vermittelst der Regel de Tri, da π zu 180°

sich

sich verhält, wie 1 zu dem Bogen, der dem Halbmesser gleich ist. Auf diese Art findet man diesen Bogen in Graden ausgedruckt =

$$57^\circ,2957795130823208767 98$$

und eben dieser Bogen ist in Minuten =

$$3437',74677078493925260788$$

und in Secunden =

$$206264'',8062470963551564728$$

Nach der gewöhnlichen Bestimmung aber hat derselbe

$$57^\circ,\ 17',\ 44'',\ 48''',\ 22'''',\ 29''''',\ 21''''''$$

und nach den Reihen, die im ersten Buche gefunden worden sind, wird sein

Sinus $= 0,8414709848051 4$, und sein
Cosinus $= 0,5403023058434 1$

Dividirt man jene Zahl durch diese, so findet man die Tangente des Bogens oder Winkels von 57°, $17'$, $44''$, $48'''$, $22''''$, $29'''''$, $21''''''$ 2c.

§ 531.

Dies vorausgesetzt, sind wir im Stande, sehr viele Aufgaben, welche den Kreis betreffen, aufzulösen. Zuvörderst ist bekannt, daß jeder Bogen größer ist als sein Sinus, wofern er nicht etwa selbst $= 0$ ist. Bey den Cosinus hingegen verhält es sich anders, indem der Cosinus eines verschwindenden Winkels $= 1$, also größer als der Bogen, und der Cosinus des rechten Winkels $= 0$, folglich kleiner als der Bogen ist. Hieraus erhellet, daß zwischen den Grenzen 0° und 90° ein Bogen sich finden müsse, der seinem Cosinus gleich ist, und diesen wollen wir durch die folgende Aufgabe zu finden suchen.

Erste Aufgabe.

Den Kreisbogen zu finden, der seinem Cosinus gleich ist.

Auflösung.

Es sey s dieser Bogen, so ist s = cos. s; allein aus dieser Gleichung läßt sich der Werth von s schwerlich auf eine bequemere Art, als durch die sogenannte Regel Falsi finden. Dazu muß man den Werth von s schon beynahe kennen, wozu eine leichte Muthmassung führen kann. Ist solches aber nicht bekannt, so muß man drey oder mehr Werthe für s setzen, und den Cosinus nach eben der Einheit ausdrucken. Es sey s = 30°. Um diesen Bogen nach der gegebenen Regel auf Theile des Halbmessers zu bringen, ziehe man

vom l. 30 = 1,4771213
ab 1,7581226
so bleibt l. 30° = 9,7189987

Es ist aber

l. cos. 30 = 9,9375306

und folglich der Cosinus von 30° viel grösser als der Bogen, und also der gesuchte Bogen grösser als 30°. Wir wollen annehmen, daß

s = 40°

sey, so ist

l. 40 = 1,6020600.
zieht man ab 1,7581226 so bleibt
l. A. 40° = 9,8439374.

Es ist aber

l. cos. 40 = 9,8842540

und also der gesuchte Bogen etwas grösser als 40°. Wir wollen also annehmen, daß s = 45° sey. Alsdann ist

$$\text{l}.45 = 1,6532125$$

abgezogen $1,7581226$ so bleibt

$$\text{l}.A.45^\circ = 9,8950899$$

Es ist aber

$$\text{l}.\cos. 45^\circ = 9,8494850$$

und es fällt also der gesuchte Winkel zwischen 40° und 45°, und läßt sich näherungsweise bestimmen. Denn setzt man $s = 40^\circ$, so ist

der Fehler $= + 403166$

setzt man aber $s = 45^\circ$ so ist

der Fehler $= - 456049$, und folglich

die Differenz $= 859215$.

Man setze also: wie sich 859215 zu 403166 verhält, so verhält sich die Differenz der angenommenen Winkel 5° zu dem Ueberschusse des Bogens über 40°. Hierdurch findet man den gesuchten Bogen größer als 42°, denn jene Grenzen sind zu weit von einander entfernt, als daß wir hier genauer sollten bestimmen können. Wir wollen also nähere Grenzen nehmen

$s = 42^\circ$	$s = 43^\circ$
$\text{l}.s = 1,6232493$	$1,6334685$
abgezogen $1,7581226$	$1,7581226$
$\text{l}.s = 9,8651267$	$9,8753459$
und es ist	und es ist
$\text{l}.\cos. s = 9,8710735$	$9,8641275$
$+ 59468$	$- 112184$
112184	

$$171652 : 59468 = 1^\circ : 20', 47''$$

Die nächsten Grenzen, zwischen welchen der wahre Werth von s enthalten ist, sind daher 42°, 20′ und 42°, 21′. Diese Winkel wollen wir auf Minuten bringen

	$s = 2140'$	$s = 2541'$
$ls =$	$3,4048337$	$3,4050047$
abgezogen	$3,5362739$	$3,5362739$
$ls =$	$9,8685598$	$9,8687308$
$l.\cos. s =$	$9,8687851$	$9,8686700$
	$+ 2253$	$- 608$
	608	
	$2861 : 2253 = 1' : 47'' : 14'''$	

Hieraus folgern wir, daß der gesuchte Bogen, der seinem Cosinus gleich ist $= 42^{\circ}, 40', 47'', 14'''$ sey, und sein Cosinus oder die Länge des Bogens ist $= 0,7390847$.

§. 532.

Ein Kreisausschnitt ACB, Fig. 112, wird von der Sehne AB in die beyden Theile, den Abschnitt AEB, und das Dreyeck ACB getheilt, wovon jener kleiner ist als dieses, wenn der Winkel ACB klein, größer aber, wenn der Winkel ACB sehr stumpf ist. Es giebt also einen Fall, wo der Ausschnitt ACB durch die Sehne AB in zwey gleiche Theile getheilt wird und daher entsteht die

Zweyte Aufgabe.

Den Kreisausschnitt ACB zu finden, welcher von der Sehne AB in zwey gleiche Theile getheilt wird, so daß das Dreyeck ACB dem Abschnitte AEB gleich ist.

Auflösung.

Nachdem man den Halbmesser $AC = 1$, gesetzt, so sey der gesuchte Bogen $AEB = 2s$, und folglich seine Hälfte $AE = BE = s$. Zieht man daher den Halbmesser CE, so wird

$$AF = \sin. s, \text{ und } CF = \cos. s.$$

Hieraus fließt

$$\triangle ACB = \sin. s . \cos. s = \tfrac{1}{2} \sin. 2s;$$

und der Ausschnitt

$$ACB = s.$$

Da

Da also dieser Ausschnitt dem doppelt genommenen Dreyecke gleich seyn soll, so ist $s = \sin. 2s$, und es muß daher ein Bogen gesucht werden, welcher dem Sinus des doppelten Bogens gleich ist. Zuvörderst ist nun klar, daß der Winkel A C B größer als ein rechter Winkel, und folglich s auch größer als $45°$ ist, und wir wollen daher folgendes annehmen.

	$s = 50°$	$s = 55°$	$s = 54°$
$ls =$	1,6989700	1,7403627	1,7323938
abgezogen	1,7581226	1,7581226	1,7581226
	9,9408474	9,9822401	9,9742712
$l. \sin. 2s =$	9,9933515	9,9729858	9,9782063
	+ 525041	— 92543	+ 39351
	92543		

$$617584 : 525041 = 5° : 4°, 15'$$

Es ist also beynahe $s = 54°, 15°$, und wir wollen daher zu den vohergehenden Annahmen $s = 54°$ setzen, wo denn aus den Fehlern $s = 54°, 17' 54''$ geschlossen werden kann. Dieser Werth weicht um keine Minute ab, und wir wollen daher folgende Annahmen versuchen, die bloß um eine Minute von einander abweichen.

	$s = 54°, 17'$	$s = 54°, 18'$	$s = 54°, 19'$
	oder	oder	oder
	$s = 3257'$	$s = 3258'$	$s = 3259'$
	und	und	und
	$2s = 108°, 34'$	$2s = 108°, 36'$	$2s = 108°, 38'$
das Compl. =	$71°, 26'$	$= 71°, 24'$	$71°, 22'$
$ls =$	3,5128178	3,5129511	3,5130844
abgezogen	3,5362739	3,5362739	3,5362739
$ls =$	9,9765439	9,9766772	9,9768105
$l. \sin. 2s =$	9,9767872	9,9767022	9,9766171
	+ 2433	+ 250	— 1934
		1934	
		2184	

Man schließe also

$$2184 : 250 = 1' : 6'', 52'''$$

Hieraus wird $s = 54°, 18', 6'', 52'''$. Wenn man diesen Winkel genauer bestimmen will, so muß man dazu größere Tafeln brauchen, und daraus wollen wir folgende um 10'' von einander abweichende Annahmen entlehnen:

$s = 54°, 18', 0''$	$s = 54°, 18', 10''$
oder	oder
$s = 195480''$	$s = 195490''$
$2s = 108°, 36', 0''$	$2s = 108°, 36', 20''$
das Compl. $= 71°, 24', 0''$	$= 71, 23', 40''$
$1 s = 5,2911023304$	$5,2911245466$
abgezogen $= 5,3144251332$	$5,3144251332$
$9,9766771972$	$9,9766994134$
l. sin. $2s = 9,9767022291$	$9,9766880552$
$+ 250319$	$- 113582$
113582	

$$363901 : 250319 = 10' : 6'' 52''', 43'''', 33'''''$$

Es ist folglich

$s = 54°, 18', 6'', 52''', 43'''', 33'''''$, und also
der Winkel $ACB = 108°, 36', 13'', 45''', 27'''', 6'''''$, und sein
Complement $= 71°, 23', 46'', 14''', 32'''', 54'''''$
so wie der Logarithme des Sinus davon, oder

$$l. \sin. 2s = 9,976692471$$

und

der Sinus selbst $= 0,9477470$

Ferner ist

$\sin. s = AF = BF = 0,8121029$

und also sein Doppeltes oder

die Sehne $AB = 1,6242058.$

Endlich ist

der Cosinus $CF = 0,5335143$

und

und hiernach kann man den gesuchten Ausschnitt näherungsweise verzeichnen.

§. 533.

Auf ähnliche Art läßt sich der Sinus bestimmen, wodurch der vierte Theil eines Kreises in zwey gleiche Theile getheilt wird.

Dritte Aufgabe.

In dem Kreis-Quadranten ACB, Fig. 113, den Sinus DE zu verzeichnen, welcher die Ebene des Quadranten in zwey gleiche Theile theile.

Auflösung.

Es sey der Bogen AE $= s$, so ist BE $= \frac{\pi}{2} - s$, weil AEB $= \frac{\pi}{2}$ ist, und der Inhalt des Quadranten $= \frac{1}{4}\pi$. Nun ist der Inhalt des Ausschnitts ACE $= \frac{1}{2}s$, und davon das Dreyeck CDE $= \frac{1}{2}\sin. s . \cos. s$ abgezogen, so bleibt der Raum ADE $= \frac{1}{2}s - \frac{1}{2}\sin. s . \cos. s$ übrig, dessen Zwiefaches dem Quadranten gleich seyn soll. Hieraus fließt

$$\frac{1}{4}\pi = s - \frac{1}{2}\sin. 2s$$

und daher

$$s - \frac{1}{4}\pi = \frac{1}{2}\sin. 2s$$

Man setze den Bogen $s - \frac{1}{4}\pi = s - 45^\circ = u$, so wird

$$2s = 90 + 2u$$

und es muß folglich

$$u = \frac{1}{2}\cos. 2u; \text{ und } 2u = \cos. 2u$$

seyn. Da also ein Bogen verlangt wird, der seinem Cosinus gleich sey, und wir denselben in der ersten Aufgabe gefunden haben, so wird

$$2u = 42^\circ, 20', 47'', 14'''$$

und

$$u = 21', 10', 23'', 37'''.$$

Hieraus ergiebt sich der Bogen

$$AE = s = 66^\circ, 10', 23'', 37'''$$

und der Bogen

$$BE = 23^\circ, 49', 36'', 23'''$$

und daher ist ferner

$$CD = 0,4039718 \text{ und } AD = 0,5960281$$

und der Sinus

$$DE = 0,9147711.$$

So wie auf diese Art der Quadrant eines Kreises in zwey gleiche Theile getheilt wird, so läßt sich auch die Theilung des ganzen Kreises in acht gleiche Theile bewerkstelligen.

§. 534.

So wie jede durch den Mittelpunkt eines Kreises gezogene gerade Linie den Kreis in zwey gleiche Theile theilt, so lassen sich auch aus jedem Punkte der Peripherie gerade Linien ziehen, welche den Kreis in drey oder mehr gleiche Theile theilen. Wir wollen jetzt die Theilung in vier gleiche Theile untersuchen, und auflösen die

Vierte Aufgabe.

Aus einem Punkte A eines gegebenen Halbkreises AEDB, Fig. 114, die Sehne AD zu ziehen, welche die Ebene des Halbkreises in zwey gleiche Theile theile.

Auflösung.

Es sey der gesuchte Bogen $AD = s$, so ist, wenn man den Halbmesser CD zieht, der Inhalt des Ausschnitts ACD $= \frac{1}{2} s$; und zieht man davon das Dreyeck $ACD = \frac{1}{2} AC.DE = \frac{1}{2} \sin. s$ ab, so bleibt der Abschnitt $AD = \frac{1}{2} s - \frac{1}{2} \sin. s$ übrig, welcher der Hälfte des Halbkreises gleich seyn soll.

soll. Es ist aber der Inhalt des Halbkreises = $\frac{1}{2}\pi$, und daher

$$s - \sin. s = \tfrac{1}{2}\pi = 90^{\circ}$$

folglich

$$s - 90^{\circ} = \sin. s$$

Man setze $s - 90^{\circ} = u$, so wird $\sin. s = \cos. u$, und deswegen

$$u = \cos. u.$$

Nun ist nach der ersten Aufgabe

$$u = 42^{\circ}, 20', 47'', 14'''$$

also

$$s = ACD = 132^{\circ}, 20', 47'', 14'''$$

und

$$BCD = 47^{\circ}, 39', 12'', 46'''$$

Die Sehne AD selbst aber ist = 1,8295422.

§. 535.

Auf diese Art schneidet man also von einem Kreise einen Abschnitt ab, dessen Inhalt dem vierten Theile des ganzen Kreises gleich ist, der Abschnitt aber, der dem halben Kreise gleich ist, ist der Halbkreis selbst, und seine Sehne also ein Durchmesser. Auf ähnliche Art kann man den Abschnitt finden, welcher den dritten Theil vom ganzen Kreise ausmacht, und damit wollen wir uns in der folgenden Aufgabe beschäftigen.

Fünfte Aufgabe.

Aus dem Punkte des Umkreises A, Fig. 115, zwey Sehnen AB, AC zu ziehen, wodurch der ganze Kreis in zwey gleiche Theile getheilt werde.

Auflösung.

Setzt man den Halbmesser = 1 und den halben Umkreis = π, desgleichen den Bogen AB oder AC = s; so

 ist

ist der Inhalt des Abschnitts AEB oder AFC $= \frac{1}{2} s - \frac{1}{2}$ sin. s. Der Inhalt des Kreises aber ist π, und da also der Inhalt des Abschnitts AEB der dritte Theil des Kreises seyn soll, so wird

$$\tfrac{1}{2} s - \tfrac{1}{2} \sin. s = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

oder

$$s - \sin. s = 120^\circ$$

und also

$$s - 120^\circ = \sin. s$$

Es sey $s - 120^\circ = u$, so wird

$$u = \sin. (u + 120) = \sin. (60 - u)$$

Es muß demnach ein Bogen u gesucht werden, der dem Sinus des Winkels $60^\circ - u$ gleich ist, und es wird daher u kleiner als 60° seyn. Um diesen Bogen zu finden, nehmen wir also folgendes an

	$u = 20^\circ$	$u = 30$	$u = 40$
	$60 - u = 40^\circ$	$60 - u = 30^\circ$	$60 - u = 20^\circ$
	$l u = 1{,}3010300$	$1{,}4771213$	$1{,}6020600$
abgezogen	$1{,}7581226$	$1{,}7581226$	$1{,}7581226$
	$l u = 9{,}5429074$	$9{,}7189987$	$9{,}8439374$
	$l \sin. (60 - u) = 9{,}8080675$	$9{,}6989700$	$9{,}5340517$
	$+ 2651601$	$- 200287$	$- 3098857$

Es fällt also in die Augen, daß u etwas kleiner sey als 30°, und rechnet man, so findet sich, daß es größer seyn muß, also 29°. Es sey also

$$u = 29^\circ$$
$$60 - u = 31^\circ$$
$$\text{l}\,u = 1{,}4623980$$
$$\text{abgezogen} \quad \underline{1{,}7581226}$$
$$\text{l}\,u = 9{,}7042754$$
$$\text{l. sin.}\,(60 - u) = \underline{9{,}7118393}$$
$$+\ 75639$$
$$\underline{-\ 200287}$$
$$275926 : 75639 = 1^\circ : 16', 26''$$

Es würde also der Winkel $u = 29^\circ, 16', 26''$ seyn. Um ihn indeß noch genauer zu finden, brauche man folgende Annahmen, wobey der Unterschied nur eine Minute beträgt.

$u = 29^\circ, 16,$	$u = 29^\circ\ 17'$
oder	oder
$u = 1756'$	$u = 1757'$
$60 - u = 30^\circ\ 44'$	$60 - u = 30^\circ\ 43'$
$\text{l}\,u = 3{,}2445245$	$3{,}2447718$
abgezogen $= 3{,}5362739$	$3{,}5362739$
$\text{l}\,u = 9{,}7082506$	$9{,}7084979$
$\text{l. sin.}\,(60 - u) = 9{,}7084575$	$9{,}7082450$
$+\ 2069$	$-\ 2529$
2529	

$$4598 : 2069 = 1' : 27'', 0'''$$

Es ist also genau

$$u = 29^\circ, 16', 27'', 0'''$$

daher der Bogen

$$s = AEB = 149^\circ, 16', 27'', 0''' = AFC$$

woher denn

der Bogen $BC = 61^\circ, 27', 6'', 0'''$

und die Sehne

$$AB = AC = 1{,}9285340$$

wird

§. 536.

Mit diesen Aufgaben, welche Bogen finden lehren, die einem gegebenen Sinus oder Cosinus gleich sind, wollen wir folgende verbinden, die zwar eben dieses Geschäfte zum Gegenstande hat, aber mit mehr Schwierigkeit verknüpft ist.

Sechste Aufgabe.

Von einem Halbkreise AEB, Fig. 116 den Bogen AE also abzuschneiden, daß nach der Herabfällung des Sinus ED aus dem Punkte E, der Bogen AE der Summe der beyden geraden Linien AD + DE gleich sey.

Auflösung.

Da hier sogleich in die Augen fällt, daß der gesuchte Bogen größer ist, als ein Quadrant, so wollen wir das Complement desselben BE suchen, und den Bogen BE = s setzen, wodurch AE = 180° − s wird; und da auf diese Art

$$AC = 1;\ CD = \cos. s;\ DE = \sin. s$$

so hat man

$$180° - s = 1 + \cos. s + \sin. s$$

Nun ist aber

$$\sin. s = 2 \sin. \tfrac{1}{2} s . \cos. \tfrac{1}{2} s;\ \text{und}\ 1 + \cos. s = 2 \cos. \tfrac{1}{2} s . \cos. \tfrac{1}{2} s$$

folglich

$$180° - s = 2 \cos. \tfrac{1}{2} s (\sin. \tfrac{1}{2} s + \cos. \tfrac{1}{2} s)$$

Nun ist ferner

$$\cos. (45° - \tfrac{1}{2} s) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cos. \tfrac{1}{2} s + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin. \tfrac{1}{2} s$$

also

$$\sin. \tfrac{1}{2} s + \cos. \tfrac{1}{2} s = \sqrt{2} . \cos. (45° - \tfrac{1}{2} s)$$

und daher

$$180° - s = 2\sqrt{2} \cos. \tfrac{1}{2} s . \cos. (45° - \tfrac{1}{2} s)$$

Nach dieser Reduction wollen wir folgende Voraussetzungen brauchen.

½ s =

$\frac{1}{2}s = 20^\circ$	$\frac{1}{2}s = 21^\circ$
$45^\circ - \frac{1}{2}s = 25^\circ$	$45^\circ - \frac{1}{2}s = 24^\circ$
$180^\circ - s = 140^\circ$	$180^\circ - s = 138^\circ$
l. $(180 - s) = 2{,}1461280$	$2{,}1398791$
abgezogen $1{,}7581226$	$1{,}7581226$
l. $(180 - s) = 0{,}3880054$	$0{,}3817565$
l. cos. $\frac{1}{2}s = 9{,}9729858$	$9{,}9701517$
l. cos. $(45^\circ - \frac{1}{2}s) = 9{,}9572757$	$9{,}9607302$
l $2\sqrt{2} = 0{,}4515450$	$0{,}4515450$
$0{,}3818065$	$0{,}3824269$
Abweichung $+\ 61989$	$-\ 6704$
6704	

$$68693 : 61989 = 1^\circ : 54'$$

Es fällt demnach $\frac{1}{2}s$ zwischen die Grenzen $20^\circ, 54'$ und $20^\circ, 55'$, und wir wollen daher folgende Hypothesen versuchen.

$\frac{1}{2}s = 20^\circ, 54'$	$\frac{1}{2}s = 20^\circ, 55'$
$45^\circ - \frac{1}{2}s = 24^\circ, 6,$	$45^\circ - \frac{1}{2}s = 24^\circ, 5'$
$s = 41^\circ, 48'$	$s = 41^\circ, 50'$
$180^\circ - s = 138^\circ, 12'$	$180^\circ - s = 138^\circ, 10'$
oder	oder
$180^\circ - s = 8292'$	$180^\circ - s = 8290^\circ$
l. $(180^\circ - s) = 3{,}9186593$	$3{,}9185545$
abgezogen $= 3{,}5362739$	$3{,}5362739$
$0{,}3823854$	$0{,}3822806$
l. cos. $\frac{1}{2}s = 9{,}9704419$	$9{,}9703937$
l. cos. $(45 - \frac{1}{2}s) = 9{,}9603919$	$9{,}9604483$
l. $2\sqrt{2} = 0{,}4515450$	$0{,}4515450$
$0{,}3823788$	$0{,}3823871$
Abweichung $+\ 66$	$-\ 1065$
1065	

$$1131 : 66 = 1' : 3'', 30'''$$

Es

Es ist also $\frac{1}{2}s = 20^\circ, 54', 3'', 30'''$; folglich

$$s = 41^\circ, 48', 7'', 0''' = BE$$

und der gesuchte Bogen

$$AE = 138^\circ, 11', 53'', 0'''$$

die Linien DE und AD aber

$$DE = 0{,}6665578, \text{ und } AD = 1{,}745435.$$

§. 537.

Nun wollen wir die Bogen mit ihren Tangenten vergleichen, und da in dem ersten Quadranten die Tangenten größer sind, als ihre Bogen, so wollen wir einen Bogen suchen, der der Hälfte seiner Tangente gleich sey. Dies giebt die

Siebente Aufgabe.

Einen Ausschnitt ACD, Fig. 117, zu finden, welcher die Hälfte des Dreyecks ACE sey, welches zwischen dem Halbmesser AC, der Tangente AE, und der Secante CE enthalten ist.

Auflösung.

Setzt man den Bogen $AD = s$, so wird der Ausschnitt $ACD = \frac{1}{2}s$, das Dreyeck ACE aber $= \frac{1}{2}$ tang. s, und es muß folglich

$$\tfrac{1}{2}\text{ tang. } s = s;\ \text{oder } 2s = \text{tang. } s$$

seyn. Wir nehmen also folgende Hypothesen zu Hülfe.

	$s = 60^\circ$	$s = 70^\circ$	$s = 66^\circ$	$s = 67^\circ$
l. 2s =	2,0791812	2,1461280	2,1205739	2,1271048
	1,7581226	1,7581226	1,7581227	1,7581226
l. 2s =	0,3210586	0,3880054	0,3624513	0,3689822
l. tang. s =	0,2385606	0,4389341	0,3514169	0,3721481
	+ 824980	− 509287	+ 110344	− 31659

Hiedurch

Hiedurch finden wir folgende genauere Grenzen für s; 66°, 46′ und 66°, 47′. Also sey

$s = 66°, 46'$	$s = 66°, 47'$
oder	oder
$s = 4006'$	$s = 4007'$
$2s = 8012'$	$2s = 8014$
$l.2s = 3{,}9037409$	$3{,}9038493$
$3{,}5362739$	$3{,}5362739$
$l.2s = 0{,}3674670$	$0{,}3675754$
$l.\,tang.\,s = 0{,}3672499$	$0{,}3675985$
Abweichung $= + 2171$	$- 231$
231	
$2402 :$	$2171 = 1' : 54'', 14'''$

Es ist demnach

der Bogen $s = AD = 66°, 46', 54'', 14'''$

und daher

$tang.\ AE = 2{,}3311220.$

§. 538.

Nun sey folgende Aufgabe aufzulösen:

Die achte Aufgabe.

Den Bogen AE, Fig. 118, eines gegebenen Kreisquadranten zu finden, der seiner Sehne AE gleich sey, wenn dieselbe bis zu ihrer Zusammenkunft mit BC verlängert wird.

Auflösung.

Es sey der Bogen $AE = s$, so ist seine Sehne $AE = 2\,sin.\,\frac{1}{2}s$, und sein Quersinus $AD = 1 - cos.\,s = 2\,sin.\,\frac{1}{2}s.\,sin.\,\frac{1}{2}s$; und die ähnlichen Dreyecke ADE und ACF geben

$$2\,sin.\,\tfrac{1}{2}s.\,sin.\,\tfrac{1}{2}s : 2\,sin.\,\tfrac{1}{2}s = 1 : s.$$

Es sey demnach

s =

	$s = 70°$	$s = 80°$	$s = 84°$	$s = 85°$
l. s =	1,8450980	1,9030900	1,9242793	1,92941
abgezogen	1,7581226	1,7581226	1,7581226	1,75812
	0,0869754	0,1449674	0,1661567	0,17129
l. sin. ½ s =	9,7585913	9,8080675	9,8255109	9,82968
	9,8455667	9,9530349	9,9916676	0,00097
Abweichung	+ 0,1544331	0,0469650	+ 83223	— 979

Es ist folglich s zwischen den Grenzen 84°, 53′ und 84°, 54′ enthalten. Es sey daher ferner

	$s = 84°, 53'$ oder $s = 5093'$	$s = 84°, 54'$ oder $s = 5094'$
½ s =	42°, 26½′	42°, 27′
l s =	3,7069737	3,7070589
abgezogen	3,5362739	3,5362739
	0,1706998	0,1707850
l sin. ½ s =	9,8292003	9,8292694
	0,9999001	0,0000544
Abweichung	+ 998	— 544

Hieraus ergiebt sich
der Bogen $s = AE = 84°, 53' 38'', 51'''$
und
der Bogen $BE = 50°, 6' 21'', 9'''$.

§. 539.

Obgleich in dem ersten Quadranten alle Bogen kleiner sind, als ihre Tangenten, so giebt es doch in den übrigen Quadranten Bogen, welche ihren Tangenten gleich sind, und diese wollen in wir in der folgenden Aufgabe durch eine von den Reihen entlehnte Methode zu finden suchen.

Naunte

Neunte Aufgabe.

Alle Bogen zu finden, die ihren Tangenten gleich sind.

Auflösung.

Der erste Bogen, der diese Eigenschaft hat, ist der unendlich kleine. In dem zweyten Quadranten giebt es keinen von dieser Beschaffenheit, weil darin die Tangenten negativ sind. Im dritten Quadranten ist solches ein Bogen von etwas weniger als 270°, und dann giebt es dergleichen in dem fünften, im siebenten Quadranten, rc. Es sey der vierte Theil des Umkreises $= q$, und die gesuchten Bogen seyen in der Formel $(2n + 1)q - s$ enthalten, so daß $(2n + 1)q - s = \cot. s - \frac{1}{\text{tang. } s}$ werde. Es sey $\text{tang. } s = x$ so ist

$$s = x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \text{rc.}$$

und folglich

$$(2n + 1)q = \frac{1}{x} + x - \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 - \tfrac{1}{7}x^7 + \text{rc.}$$

Es fällt aber in die Augen, da s ein desto kleinerer Bogen ist, je größer die Zahl n wird, daß x eine sehr kleine Größe, und beynahe $x = \frac{1}{(2n + 1)q}$, oder $\frac{1}{x} = (2n + 1)q$ seyn wird; genauer findet man

$$\frac{1}{x} = (2n + 1)q - s = (2n + 1)q - \frac{1}{(2n+1)q}$$

$$- \frac{2}{3(2n+1)^3q^3} - \frac{13}{15(2n+1)^5q^5} - \frac{146}{105(2n+1)^7q^7}$$

$$\frac{2343}{945(2n+1)^9q^9} - \text{rc.}$$

Da also $q = \frac{\pi}{2} = 1,5707963267948$ ist, so ist der gesuchte Bogen =

$$(2n+1)1,57079632679 - \frac{1}{2n+1}0,63661977$$

$$- \frac{0,17200817}{(2n+1)^3} - \frac{0,09062596}{(2n+1)^5}$$

$$- \frac{0,05892834}{(2n+1)^7} - \frac{0,04258543}{(2n+1)^9} - \text{rc.}$$

Oder, wenn man die Glieder, die in Theilen des Halbmessers ausgedruckt sind, nach Art der Bogen bestimmt, =

$$(2n+1)90^0 - \frac{131313''}{2n+1} - \frac{35479''}{(2n+1)^3}$$

$$- \frac{18692''}{(2n+1)^5} - \frac{12155''}{(2n+1)^7}$$

$$- \frac{8784''}{(2n+1)^9}$$

Es

Es sind demnach die Bogen, welche der Aufgabe ein Genüge thun, in der Ordnung folgende:

I.	1 . 90° —	90°
II.	3 . 90° —	12°, 32′, 48″.
III.	5 . 90° —	7, 22, 32
IV.	7 . 90° —	5, 14, 22
V.	9 . 90° —	4, 3, 59
VI.	11 . 90° —	3, 19, 24
VII.	13 . 90° —	2, 48, 37
VIII.	15 . 90° —	2, 26, 5
IX.	17 . 90° —	2, 8, 51
X.	19 . 90° —	1, 55, 16

§. 540.

Mehr Aufgaben setze ich nicht her, da die Art, sie aufzulösen, aus diesen Beyspielen deutlich erhellet. Uebrigens sind diese Aufgaben vorzüglich deswegen erfunden worden, damit die Natur des Kreises, dessen Quadratur bisher auf keinem Wege hat gelingen wollen, bekannter werden möchte. Denn hätte es sich ereignet, daß bey der Auflösung irgend einer Aufgabe, entweder ein gegen den ganzen Umkreis commensurabler Bogen, oder sein Sinus oder Tangente durch den Halbmesser hätte construirt werden können, so hätte man allerdings eine Art der Quadratur des Kreises gehabt. Hätte man z. B. bey der Auflösung der sechsten Aufgabe den Sinus DE, der $= 0,665578$ war, $= 0,666666 = \frac{2}{3}$ gefunden: so würde man dann eine sehr schöne Eigenschaft des Kreises gehabt haben; es könnte nemlich alsdann ein Bogen AE construirt werden, der der geraden Linie $AD + DE = 1 + \frac{2}{3} + \sqrt{\frac{5}{9}}$ gleich wäre. Es ist aber auch noch kein Grund da, welcher die Unmöglichkeit dieser Quadratur des Kreises beweisen könnte; und wenn dieselbe möglich ist, so scheint kein Weg geschickter zu seyn, sie zu entdecken, als der, welchen wir in diesem Capitel kennen gelernt haben.