Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Erstes Capitel. Von den Oberflächen der Körper überhaupt.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53306

Erstes Capitel.

Von den Oberflächen der Körper überhaupt.

§. 1.

Die Untersuchungen, welche wir in dem Vorhergehenden über die Curven angestellt haben, und die Art und Weise, diese Curven durch Gleichungen auszudrucken, haben allerdings einen sehr weiten Umfang, und erstrecken sich auf alle krumme Linien, deren Punkte insgesammt in einer und derselben Ebene liegen; wenn aber die Curve nicht ganz in eine und dieselbe Ebene fällt, so reichen die ertheilten Vorschriften nicht hin, ihre Eigenschaften zu entdecken. Diese Art der Curven hat eine doppelte Krümmung, und in dieser Rücksicht haben wir darüber vom Herrn Clairaut eine vortrefliche und scharfsinnige Abhandlung. Da indeß dieser Gegenstand mit der Lehre von den Flächen zusammenhängt, welche ich mir in dem gegenwärtigen Abschnitte vorzutragen vorgenommen habe, so werde ich davon nicht besonders handeln, sondern die Betrachtung desselben mit der folgenden Untersuchung über die Flächen verbinden.

§. 2.

So wie die Linien entweder gerade oder krumme Linien sind, so sind die Flächen entweder eben oder nicht eben;

unebene Flächen aber nenne ich sowohl die convexen als die concaven, und auch diejenigen, die theils convex theils concav sind. So ist die äußere Fläche einer Kugel, eines Cylinders und eines Kegels, wenn man von der Grundfläche abstrahirt, convex, die Fläche einer Schüssel hingegen concav. So wie man ferner unter einer geraden Linie diejenige versteht, in welcher jede drey Punkte nach einerley Richtung liegen, so ist eine Ebene diejenige, in welcher jede vier Punkte in eine und dieselbe Ebene fallen; woher denn die nicht ebene Fläche, sie mag convex oder concav seyn, als ein solche gedacht werden kann, worin man nicht durch jede vier Punkte Eine Ebene zu legen im Stande ist.

§. 3.

Wie eine unebne Fläche beschaffen sey, läßt sich leicht erkennen, wenn man weiß, wie weit sie in jedem Punkte von einer Ebene abstehe. So wie wir nemlich die Beschaffenheit der Curven aus den Entfernungen ihrer Punkte von einer zur Axe angenommenen geraden Linie zu beurtheilen im Stande sind: so kann man auch die Beschaffenheit einer unebenen Fläche aus der Entfernung ihrer Punkte von einer nach Belieben angenommenen Ebene abnehmen. Soll also die Beschaffenheit einer Fläche angegeben werden, so darf man nur nach Belieben eine Ebene annehmen, und sich aus jedem Punkte jener Fläche auf dieselbe senkrechte Linie gezogen gedenken; und kann man die Länge dieser senkrechten Linie durch eine Gleichung bestimmen, so wird diese Gleichung auch die Natur der gedachten Fläche ausdrucken. Aus einer solchen Gleichung lassen sich aber auch umgekehrt alle Punkte dieser Fläche angeben, und es wird daher durch dieselbe auch die Fläche selbst bestimmt.

§. 4.

Es stelle die Ebene der Kupfertafel die Ebene vor, auf welche alle Punkte einer gegebenen Fläche bezogen werden sollen. Ferner sey M, Fig. 119, irgend ein Punkt in der gegebenen Fläche außer der Ebene der Tafel, und aus demselben MQ auf diese Ebene senkrecht herabgefällt worden. Um nun die Lage dieses Punktes algebraisch auszudrucken, nehme man in der Ebene irgend eine gerade Linie AB zur Axe an, und ziehe auf dieselbe aus Q die gerade Linie QP senkrecht. Endlich nehme man in der Axe AB irgend einen Punkt A zum Anfangspunkte der Abscissen an. Ist dieses geschehen, so kennt man die Lage des Punktes M, wenn man die Länge der drey Linien AP, PQ, und QM weiß; und es wird demnach die Lage jedes Punktes M einer Fläche durch drey senkrechte Coordinaten auf eine ähnliche Art bestimmt, als solches bey den Punkten der Curven, die in einer Ebene lagen, durch zwey rechtwinklige Coordinaten geschehen ist.

§. 5.

Da wir also drey Coordinaten AP, PQ und QM haben, so wollen wir $AP = x$; $PQ = y$, und $QM = z$ setzen. Diese drey Coordinaten werden uns die Natur der gegebenen Fläche zu erkennen geben, wenn wir, nachdem wir x und y willkührlich angenommen haben, zu bestimmen im Stande sind, wie groß z ist; denn können wir dieses, so lassen sich alle Punkte M in der gedachten Fläche angeben. Es wird daher die Natur einer jeden Fläche durch eine Gleichung ausgedruckt, in welcher die Coordinate z durch die beyden übrigen Coordinaten x und y und durch beständige Größen bestimmt wird; und es ist daher für jede gegebene Fläche die veränderliche Größe z gleich einer Funktion zweyer veränderlichen Größen x und y. Umgekehrt druckt, wenn z irgend einer Funktion von x und y gleich ist, diese Gleichung eine Fläche aus, deren Natur sich aus ihr erkennen läßt. Setzt man demnach für x und y alle, sowohl positive als negative Werthe, die sie bekommen können, so erhält man alle Punkte Q der angenommenen Ebene; und dann ergiebt sich aus der Gleichung zwischen z, x und y die Länge der senkrechten Linie QM = z, von dieser Ebene bis zu der durch die Gleichung ausgedruckten Fläche. Ist z positiv, so liegt der Punkt M über der Ebene APQ; ist aber z negativ, so liegt M unter ihr; wird z = 0, so fällt M in die Ebene, und wird es imaginär, so gehört zu dem Punkte Q in der Fläche gar kein Punkt M. Hat endlich z mehr reelle Werthe, so schneidet die auf der Ebene durch Q senkrecht aufgerichtete Linie die gegebene Fläche in mehr als in einem Punkte.

§. 6.

Will man also die verschiedenen Arten der Flächen bestimmen, so bietet sich sogleich die Abtheilung derselben in continuirliche oder reguläre, und in discontinuirliche oder irreguläre dar. Eine Fläche ist nemlich continuirlich, deren Punkte sich insgesammt durch eine und dieselbe Gleichung zwischen z, x und y ausdrucken lassen, oder wo z für alle Punkte dieselbe Funktion bleibt. Irregulär wird hingegen eine Fläche genannt, wenn die Theile derselben durch verschiedene Funktionen ausgedruckt werden, z. B. wenn dieselbe an einem Orte sphärisch, an einem andern conisch, an einem dritten cylindrisch oder eben ist. Diese irregulären Flächen setzen wir indeß hier ganz bey Seite, und betrachten blos die regulären, deren Natur durch eine und dieselbe Gleichung ausgedruckt wird. Denn kennt man

diese,

diese, so lassen sich darnach auch die irregulären, da sie aus regulären Theilen zusammengesetzt sind, leicht beurtheilen.

§. 7.

Die regulären Flächen werden zuvörderst in algebraische und in transcendente eingetheilt. Eine Fläche ist eine algebraische, wenn ihre Natur durch eine algebraische Gleichung zwischen den Coordinaten x, y und z ausgedruckt wird, oder wenn z einer algebraischen Funktion von x und y gleich ist. Ist hingegen z keine algebraische Funktion von x und y, oder kommen in der Gleichung zwischen x, y und z transcendente Größen vor; z. B. solche die von Logarithmen oder Kreisgrößen abhangen, so ist die Fläche, die durch eine solche Gleichung ausgedruckt wird, eine transcendente. Dergleichen ist z. B. da, wenn $z = x . l . y$; oder $z = y^x$; oder $z = y . \sin. x$ ist Es fällt aber in die Augen, daß man die Untersuchung der algebraischen Flächen vor der Betrachtung der transcendenten vorhergehen lassen muß.

§. 8.

Ferner muß man, um die Natur einer Fläche kennen zu lernen, vor allen Dingen untersuchen, was z in Ansehung der Menge seiner Werthe für eine Funktion von x und y ist. Hier kommen zuerst diejenigen Flächen vor, wobey z eine einförmige Funktion von x und y ist. Es sey P eine solche einförmige oder rationale Funktion von x und y; so werden, wenn $z = P$ ist, den einzelnen Punkten der Ebene Q eben so viel Punkte der Fläche zugehören, oder es wird jede auf der Ebene APQ senkrecht aufgerichtete gerade Linie die Fläche in nicht mehr als in einem Punkte schneiden. In diesem Falle kann der Werth der geraden Linie QM nie imaginär werden, sondern es giebt diese gerade Linie allemal einen reellen Punkt in der Fläche. Es bringt indeß diese Verschiedenheit der Funktionen keine wesentliche Verschiedenheit unter den Flächen hervor; denn sie hängt von der Lage der Ebene APQ ab, welche eben so als die Lage der Axe willkührlich ist. Bezieht man daher dieselbe Fläche auf eine andere Ebene, so kann die Funktion z aus einer einförmigen in eine vielförmige übergehen.

§. 9.

Es seyen P und Q einförmige Funktionen von x und y, so werden, wenn

$$zz - Pz + Q = 0$$

ist, die geraden Linien, die aus den Punkten Q der angenommenen Ebene auf dieselbe senkrecht gestellt werden, die Fläche entweder in zweyen Punkten oder gar nicht schneiden; denn es hat dann z allemal zwey Werthe, die entweder beyde reell oder beyde imaginär sind. Auf ähnliche Art ist z, wenn P, Q und R einförmige Funktionen von x und y bedeuten, und

$$z^3 - Pz^2 + Qz - R = 0$$

ist, eine dreyförmige Funktion, und jede gerade Linie QM schneidet die Fläche entweder in dreyen Punkten, wenn alle Wurzeln dieser Gleichung reell sind, oder nur in einem, wenn zwey von diesen Wurzeln imaginär sind. Auf ähnliche Art hat man zu urtheilen, wenn z durch eine Gleichung von mehrern Dimensionen bestimmt wird. Wie vielförmig also die Funktion z sey, erkennt man leicht, so bald man die Gleichung zwischen x, y und z rational gemacht hat.

§. 10.

So wie wir bey den Gleichungen der Curven gesehen haben, daß die beyden Coordinaten derselben verwechselt werden

werden können, so lassen sich auch in jeder Gleichung für eine Fläche die drey Coordinaten x, y und z mit einander verwechseln. Denn nimmt man zuvörderst in der Ebene APQ eine gerade auf AP senkrechte Linie Ap zur Axe an, so wird nun $Ap = y$ und $pQ = x$, und dadurch sind die beyden Coordinaten x und y mit einander vertauscht. Die übrigen Verwechselungen lernt man kennen, wenn man das rechtwinklige Parallelepipedum $ApQM\xi\pi qPA$ ergänzt; bey welchem zuvörderst die drey beständigen und auf einander senkrechten Ebenen in Betrachtung kommen, APQp, APqπ, und Apξπ; denn die Art, wie die Fläche, worin der Punkt M liegt, auf diese Ebenen bezogen werden kann, wird durch eben dieselben Gleichung zwischen x, y und z angezeigt. In jeder Ebene aber giebt es eine doppelte Axe, die beyde in dem Punkte A anfangen, und daher entspringen also sechs verschiedene Beziehungen zwischen den drey Coordinaten.

Die Coordinaten sind

für die Ebene APQp entweder $\begin{cases} AP = x \\ PQ = y \\ QM = z \end{cases}$ oder $\begin{cases} Ap = y \\ pQ = x \\ QM = z \end{cases}$

für die Ebene APqπ entweder $\begin{cases} AP = x \\ Pq = z \\ qM = y \end{cases}$ oder $\begin{cases} A\pi = z \\ \pi q = x \\ qM = y \end{cases}$

ent-

$$\text{für die Ebene } Ap\xi\pi \quad \text{entweder} \begin{cases} Ap = y \\ p\xi = z \\ \xi M = x \end{cases} \quad \text{oder} \begin{cases} A\pi = z \\ \pi\xi = y \\ \xi M = x \end{cases}$$

Wenn aber von dem beständigen Punkte A nach dem Punkte M der Fläche die gerade Linie AM gezogen wird, so ist

$$AM = \sqrt{(xx + yy + zz)}.$$

§. 11.

Eine und dieselbe Gleichung zwischen den Coordinaten x, y und z giebt uns also die Lage aller Punkte einer Fläche, in Beziehung auf drey Ebenen zu erkennen, die auf einander senkrecht sind, und sich in dem Punkte A schneiden. So wie nemlich die veränderliche Größe z die Entfernung eines jeden Punktes der Fläche M von der Ebene APQ giebt, so giebt die veränderliche Größe y die Entfernung eben dieses Punktes M von der Ebene APq, und die veränderliche Größe x von der Ebene Apξ. Wissen wir aber, wie weit der Punkt M von jeder dieser drey Ebenen entfernt ist, so kennen wir auch seine wahre Lage. Es sind daher diese drey Ebenen, auf welche jede Fläche vermittelst einer Gleichung zwischen drey veränderlichen Größen x, y und z bezogen werden kann, vorzüglich zu merken, und ist eine davon horizontal, so sind die beyden übrigen vertical, und zwar die eine nach der Richtung AP, und die andere nach der Richtung Ap.

§. 12.

Hat man nun diese drey auf einander senkrechte Ebenen festgesetzt, um darauf die gegebene Fläche zu beziehen; so fälle

fälle man aus jedem Punkte dieser Fläche M auf jene Ebenen APQ, APq und $A\pi\xi$ die senkrechten Linien MQ, Mq und $M\xi$, und mache $MQ = z$, $Mq = y$ und $M\xi = x$. Dann ergänze man das Parallelepipedum, wodurch man drey gerade Linien bekömmt, welche jenen gleich sind, und aus dem Punkte A ausgehen, nemlich $AP = x$, $Ap = y$ und $A\pi = z$, und sobald man diese kennt, so ist auch die Lage des Punktes M bekommt. Läßt man aber die veränderlichen Größen x, y und z, wenn sie nach den Ebenen, welche die Figur anzeigt, gerichtet sind, positiv seyn, so muß man sie, wenn sie nach den entgegenstehenden Gegenden laufen, als negativ ansehen.

§. 13.

Hat in der Gleichung zwischen den drey veränderlichen Größen x, y und z diejenige, welche auf der Ebene APQ senkrecht ist, oder z, allenthalben gerade Dimensionen, so kommt ihr ein doppelter Werth zu, ein positiver und ein negativer, und beyde sind einander gleich. Alsdann ist also die Fläche von der Art, daß sie sich auf beyden Seiten der Ebene ähnlich und gleich bleibt, und daß der Körper, der durch dieselbe begrenzt ist, durch sie in zwey gleiche Theile getheilt wird. So wie nun bey den ebenen Figuren diejenige gerade Linie, welche die Figur in zwey gleiche und ähnliche Theile theilte, Durchmesser genannt wurde, so wollen wir bey den Körpern diejenige Ebene, welche den Körper in zwey gleiche und ähnliche Theile theilt, die Diametral-Ebene nennen. Wenn daher die veränderliche Größe z in der Gleichung allenthalben gerade Dimensionen hat, so ist die Ebene APQ eine Diametral-Ebene.

§. 14.

§. 14.

Auf ähnliche Art erhellet, daß die Ebene APq worauf y senkrecht ist, eine Diametral-Ebene seyn werde, wenn y in der Gleichung für die Fläche allenthalben gerade Dimensionen hat; und eben so ist die Ebene $Ap\xi$ eine Diametral-Ebene, wenn x allenthalben gleiche Dimensionen hat. Sobald daher eine Gleichung für eine Fläche zwischen den veränderlichen Größen x, y und z gegeben ist, so läßt sich sogleich beurtheilen, ob unter den drey Ebenen Diametral-Ebenen seyn werden, oder nicht. Es können aber auch zwey, ja alle drey Ebenen Diametral-Ebenen seyn. Bey der Kugel z. B., deren Mittelpunkt in A liegt, ist, weil der Halbmesser $AM = \sqrt{(xx + yy + zz)}\, a$ ist, $xx + yy + zz = aa$, und es wird folglich die Kugel von jeder der gedachten Ebenen in zwey ähnliche und gleiche Theile getheilt.

§. 15.

Um die Gestalt der Oberfläche, die in der gegebenen Gleichung enthalten ist, zu erkennen, muß man sein Augenmerk auf die drey auf einander senkrechte Ebenen richten, welche in der 120sten Figur durch $QQ^1Q^2Q^3$, $TT^1T^2T^3$ und $VV^1V^2V^3$ bezeichnet sind, und sich in dem Punkte A schneiden. Wenn man sich diese drey Ebenen nach allen Seiten ohne Ende erweitert gedenkt, so theilen sie den Raum in acht Gegenden ein, welche in der Figur durch AX, AX^1, AX^2, AX^3, AX^4, AX^5, AX^6 und AX^7 angezeigt werden. Sind in der ersten AX die veränderlichen Größen x, y und z positiv, so sind in den übrigen ein oder zwey von ihnen oder auch alle drey negativ. Die genauere Beschaffenheit dieser Werthe aber läßt sich am besten aus folgendem Schema erkennen.

Die

Die Gegend AX
$AP = + x$
$AR = + y$
$AS = + z$

Die Gegend AX^1
$AP' = - x$
$AR = + y$
$AS = + z$

Die Gegend AX^2
$AP = + x$
$AR = + y$
$AS' = - z$

Die Gegend AX^3
$AP' = - x$
$AR = + y$
$AS' = - z$

Die Gegend AX^4
$AP = + x$
$AR' = - y$
$AS = + z$

Die Gegend AX^5
$AP' = - x$
$AR' = - y$
$AS = + z$

Die Gegend AX^6
$AP = + x$
$AR' = - y$
$AS' = - z$

Die Gegend AX^7
$AP' = - x$
$AR' = - y$
$AS' = - z$

§. 16.

Bequemer ist es indeß, diese acht Gegenden durch Zahlen zu bezeichnen, um jedesmal auf die leichteste Art anzeigen zu können, von welcher die Rede sey. Da nun alle acht Gegenden in dem Punkte A zusammenkommen, und durch drey senkrecht sich schneidende Ebenen von einander abgesondert, diese drey Ebenen aber durch die geraden Linien Pp, Qq, Rr, die sich in dem Punkte A senkrecht schneiden, bestimmt werden: so läßt sich jede Gegend durch drey von den Buchstaben P, Q und R, und p, q und r angeben. Die Hauptgegend oder die erste PQR ist nemlich der Raum, welcher das Parallelepipedum zwischen den ohne Ende verlängerten geraden Linien AP, AQ, AR, und die Gegend Pqr, der Raum, welcher das Parallelepipedum zwischen den drey ohne Ende verlängerten geraden Linien AP, Aq und Ar enthält. Setzt man daher $AP = x$, $AQ = y$, $AR = z$, so ist $Ap = -x$, $Aq = -y$, und $Ar = -z$. Wir wollen also die gedachten acht Gegenden auf die Art durch Zahlen von einander unterscheiden, daß sey:

	die 1ste	die 2te
zwischen den Coordinaten	$AP = + x$	$AP = + x$
	$AQ = + y$	$AQ = + y$
	$AR = + z$	$Ar = - z$
	die 3te	die 4te
zwischen den Coordinaten	$AP = + x$	$Ap = - x$
	$Aq = - y$	$AQ = + y$
	$AR = + z$	$AR = + z$
	die 5te	die 6te
zwischen den Coordinaten	$AP = + x$	$Ap = - x$
	$Aq = - y$	$AQ = + y$
	$Ar = - z$	$Ar = - z$
	die 7te	die 8te
zwischen den Coordinaten	$Ap = - x$	$Ap = - x$
	$Aq = - y$	$Aq = - y$
	$AR = + z$	$Ar = - z$

§. 17.

Diese Gegenden unterscheiden sich bald mehr, bald weniger von einander. Zuvörderst giebt es zwey Gegenden, die zwey Coordinaten gemein und eine verschieden haben; diese berühren sich in einer Ebene, und wir wollen sie daher verbundene nennen. Dann sind zwey Coordinaten verschieden, und eine gemein; diese Gegenden berühren sich bloß in einer geraden Linie, und wir wollen sie deswegen getrennte nennen. Endlich sind alle Coordinaten von einander verschieden, und die Gegenden haben bloß den

Punkt

Punkt A mit einander gemein; diesen wollen wir den Namen der entgegengesetzten Gegenden geben. Was für Gegenden mit einer jeden verbunden, oder von ihr getrennt, oder ihr entgegengesetzt seyn, zeigt folgende Tabelle.

	Verbunden			Getrennt			Entgegengesetzt
PQR I	PQr II	PqR III	pQR IV	Pqr V	pQr VI	pqR VII	pqr VIII
PQr II	PQR I	Pqr V	pQr VI	PqR III	pQR IV	pqr VIII	pqR VII
PqR III	Pqr V	PQR I	pqR VII	PQr II	pqr VIII	pQR IV	pQr VI
pQR IV	pQr VI	pqR VII	PQR I	pqr VIII	PQr II	PqR III	Pqr V
Pqr V	PqR III	PQr II	pqr VIII	PQR I	pqR VII	pQr VI	pQR IV
pQr VI	pQR IV	pqr VIII	PQr II	pqR VII	PQR I	Pqr V	PqR III
pqR VII	pqr VIII	pQR IV	PqR III	pQr VI	Pqr V	PQR I	PQr II
pqr VIII	pqR VII	pQr VI	Pqr V	pQR IV	PqR III	PQr II	PQR I

§. 18.

Es hat also jede Gegend drey mit ihr verbundene, zwey getrennte und eine entgegengesetzte, und es erhellet aus der vorstehenden Tabelle sogleich, wie eine jede gegen jede andere beschaffen ist. Die Ordnung, welche die Zahlen in dieser Tabelle beobachten, ist bemerkenswerth, und um sie dem Ueberblicke auf eine leichtere Art darzustellen, wollen wir eben dieselben Zahlen in eben der Ordnung in folgendes Quadrat einschließen.

1	2	3	4	5	6	7	8
2	1	5	6	3	4	8	7
3	5	1	7	2	8	4	6
4	6	7	1	8	2	3	5
5	3	2	8	1	7	6	4
6	4	8	2	7	1	5	3
7	8	4	3	6	5	1	2
8	7	6	5	4	3	2	1

Die Art, wie hier die Zahlen auf einander folgen, fällt bey einiger Aufmerksamkeit von selbst in die Augen, der Gebrauch dieser Tabelle aber wird in der Folge ausführlich gezeigt werden.

§. 19.

Wir haben schon vorhin bemerkt, daß einer Fläche, in deren Gleichung die veränderliche Größe z allenthalben gerade Dimensionen hat, zwey einander gleiche und ähnliche Theile zukommen; es ist nemlich alsdann der Theil in der ersten Gegend gleich und ähnlich dem in der zweyten, und auf ähnliche Art sind auch die Theile in der dritten und fünften, desgleichen die in der vierten und sechsten, und endlich in der siebenten und achten mit einander übereinstimmend. Wenn hingegen die veränderliche Größe y allenthalben gerade Dimensionen hat, so stimmen die erste und dritte, die zweyte und fünfte, die vierte und siebente, und die sechste und achte mit einander überein. Hat x in der Gleichung allenthalben gerade Dimensionen, so findet diese Uebereinstimmung in der ersten und vierten, in der zweyten und sechsten, in der dritten und siebenten, und in der fünften und achten Gegend statt. Wenn nemlich

in

in der Gleichung allenthalben gerade Dimensionen hat
die veränderliche Größe

z	y	x
	so stimmen überein	
die Gegenden	die Gegenden	die Gegenden
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
2, 1, 5, 6, 3, 4, 8, 7	3, 5, 1, 7, 2, 8, 4, 6	4, 6, 7, 1, 8, 2, 3, 5

§. 20.

Wenn die Theile der Fläche in den getrennten Gegenden, der ersten und fünften, einander gleich seyn sollen, so muß die Gleichung so beschaffen seyn, daß sie unverändert bleibt, wenn man die beyden veränderlichen Größen y und z negativ nimmt. Es wird dies also statt finden, wenn die beyden Größen y und z zusammengenommen in allen Gliedern der Gleichung allenthalben entweder gerade oder ungerade Dimensionen haben. Wenn aber die erste und fünfte Gegend mit einander übereinstimmen, so thun solches auch die zweyte und dritte, die vierte und achte, und die sechste und siebente. Auf ähnliche Art stimmen, wenn in der Gleichung für die Fläche die beyden veränderlichen Größen x und z allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen ausmachen, die erste Gegend mit der sechsten, die zweyte mit der vierten, die dritte mit der achten, und die fünfte mit der siebenten überein.

Wenn nemlich in der Gleichung für die Fläche allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl
von Dimensionen haben

die veränderlichen Größen

y und z | x und z | x und y

so stimmen überein

die Gegenden	die Gegenden	die Gegenden
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8,	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8
5, 3, 2, 8, 1, 7, 6, 4,	6, 4, 8, 2, 7, 1, 5, 3	7, 8, 4, 3, 6, 5, 1, 2

Wenn aber alle drey veränderliche Größen x, y und z zusammengenommen, entweder allenthalben eine gerade oder allenthalben eine ungerade Anzahl von Dimensionen haben, so stimmen die entgegengesetzten Gegenden mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1

§. 21.

Wenn sich von diesen Bedingungen zwey oder alle drey zugleich bey der Gleichung finden, so stimmen entweder je vier oder alle acht Gegenden mit einander überein.

Wenn sowohl x als y, jede für sich betrachtet, allenthalben eine gerade Anzahl von Dimensionen haben, so stimmen folgende Gegenden zu je vieren mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
3,	5,	1,	7,	2,	8,	4,	6
4,	6,	7,	1,	8,	2,	3,	5
7,	8,	4,	3,	6,	5,	1,	2

Wenn sowohl x als z, jede für sich, eine gerade Anzahl von Dimensionen haben, so stimmen folgende Gegenden zu je vieren mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
2,	1,	5,	6,	3,	4,	8,	7
4,	6,	7,	1,	8,	2,	3,	5
6,	4,	8,	2,	7,	1,	5,	3

Wenn die veränderlichen Größen y und z, jede für sich betrachtet, allenthalben eine gerade Anzahl von Dimensionen haben, so stimmen folgende Gegenden zu je vieren mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7	8
2,	1,	5,	6,	3,	4,	8,	7
3,	5,	1,	7,	2,	8,	4,	6
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4

§. 22.

Wenn eine von den veränderlichen Größen allenthalben gerade Dimensionen hat, die beyden übrigen aber zusammengenommen allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen geben, so stimmen auch je vier und vier Gegenden mit einander überein, und zwar auf folgende Art.

Wenn z allenthalben gerade Dimensionen hat, x und y aber allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen ausmachen, so stimmen folgende Gegenden mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
2,	1,	5,	6,	3,	4,	8,	7
7,	8,	4,	3,	6,	5,	1,	2
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1

Wenn y allenthalben gerade Dimensionen hat, und x und z zusammengenommen allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen geben, so stimmen folgende Gegenden zu vier und vieren mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
3,	5,	1,	7,	2,	8,	4,	6

6,	4,	8,	2,	7,	1,	5,	3
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1

Wenn x allenthalben gerade Dimensionen hat, und y und z zusammengenommen allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen geben, so stimmen folgende Gegenden zu vier und vieren mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
4,	6,	7,	1,	8,	2,	3,	5
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4
8,	7,	6,	5,	4,	3,	2,	1

In diesen drey Fällen haben also alle drey veränderliche Größen x, y und z zusammengenommen allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen.

§. 23.

Es sind noch folgende Fälle von vier gleichen Gegenden übrig. Wenn

x und y } allenthalben entweder eine gerade oder eine
und y und z } ungerade Anzahl von Dimensionen haben, so stimmen folgende Gegenden zu vieren mit einander überein.

1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8
5,	3,	2,	8,	1,	7,	6,	4
7,	8,	4,	3,	6,	5,	1,	2
6,	4,	8,	2,	7,	1,	5,	3

Eben diese Aehnlichkeiten müssen sich ergeben, wenn außerdem die beyden übrigen veränderlichen Größen x und z allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl

zahl von Dimensionen ausmachen, so daß diese Bedingung bereits in der angeführten enthalten ist. Es werden daher die Theile einer Oberfläche in je vier getrennten Gegenden unter einander gleich seyn, wenn in der Gleichung je zwey veränderliche Größen zusammengenommen, allenthalben entweder eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen haben. Da es aber drey Combinationen giebt, so ist zu bemerken, daß wenn zwey die erklärte Eigenschaft haben, dieselbe der dritten ebenfalls zukomme.

§. 24.

Wenn zu den Bedingungen, wobey je vier Gegenden gleich und ähnlich werden, noch eine neue in ihnen nicht enthaltene hinzukommt, die je zwey Gegenden einander gleich und ähnlich macht, so werden alle Gegenden einander gleich, und die Fläche besteht, aus acht einander gleichen und ähnlichen Theilen. Die Gleichung für diese Art der Flächen faßt alle bisher betrachteten Eigenschaften zusammen in sich; es haben nemlich die veränderlichen Größen x, y und z jede für sich betrachtet, allenthalben gerade Dimensionen, und es müssen daher auch je zwey oder alle drey zusammengenommen eine gerade Anzahl von Dimensionen geben.

§. 25.

Ob aber eine gegebene Gleichung zwischen dreyen veränderlichen Größen zwey oder alle drey von den betrachteten Eigenschaften an sich habe oder nicht, erkennt man, in Ansehung der geraden Dimensionen jeder veränderlichen Größe, leicht. Auch macht es keine Schwierigkeit zu bestimmen, ob alle veränderliche Größen allenthalben eine gerade oder eine ungerade Anzahl von Dimensionen geben.

Nicht so leicht ist es, zu untersuchen, ob je zwey von dieser Art sind. Man setze in der Gleichung entweder $x = nz$, oder $y = nz$, oder $x = ny$, und sehe, ob in dem einen oder dem andern Falle eine Gleichung sich ergebe, in welcher für die beyden ersten Annahmen z, und für die letzte y allenthalben gerade Dimensionen bekomme. Ist dieses, so haben je zwey veränderliche Größen zusammengenommen allenthalben entweder gerade oder ungerade Dimensionen, und es muß daher die Fläche zum wenigsten zwey einander gleiche und ähnliche Theile haben.