Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Vorrede des Uebersetzers.

Vorrede
des
Uebersetzers.

Ich habe nicht nöthig, meine Vorrede mit Beweisen für die Wichtigkeit des Werks, wovon ich hier den Liebhabern der mathematischen Wissenschaften den ersten Band, übersetzt und mit Anmerkungen und Zusätzen begleitet, übergebe, anzufüllen. Der berühmte Name seines unsterblichen Verfassers überhebt mich dessen, und ich zeige daher nur den Inhalt davon mit des Hrn. Prof. Fuß *) Worten an. In diesem Werke ist die ganze Lehre von den algebraischen und transcendenten Funktionen, ihre Umformung, Auflösung und Entwickelung aus einander gesetzt. Es enthält alles Nützliche und Wissenswürdige über die Eigenschaften und Summationen unendlicher Reihen, und weiset einen neuen und merkwürdigen Weg, die Exponentialgröße zu behandeln. Es giebt einen

 deut-

*) In der Lobrede auf Eulern, die Basel 1786 von dem Hrn. V. selbst übersetzt herausgekommen ist, S. 64 65.

deutlichern und fruchtbarern Begriff von den Logarithmen und deren Gebrauche, und setzt den neuen von Eulern entdeckten Algorithmus der Kreis- oder Winkelgrößen ins Licht. Im zweyten Theile giebt er die allgemeine Lehre von den krummen Linien, mit ihren Abtheilungen und Unterabtheilungen, und in einem Zusatze die Theorie der Körper und ihrer Oberflächen, nebst der daraus entstehenden Gleichungen mit drey veränderlichen Größen. Den Beschluß dieses wichtigen Werks macht die Entwickelung des Begriffs der doppelt gekrümmten Linien, die aus der Durchschneidung zweyer krummen Flächen entstehen.

Was meine Uebersetzung betrifft, so habe ich dabey so treu als möglich zu seyn gesucht, indem von einem Manne, wie Euler war, alles wichtig ist. Am allerwenigsten habe ich es mir, wie Hr. Pezzi in seiner zu Strasburg 1786 erschienenen französischen Uebersetzung, erlaubt, ganze Absätze wegzulassen. Nur an ein Paar Orten, nemlich am Ende des 228sten §. im dreyzehnten und §. 235 im vierzehnten Capitel habe ich eine geringe Aenderung vorgenommen, aber dabey zugleich angemerkt, wie die veränderten Stellen im Originale heißen. Undeutlich fürchte ich durch meine Treue nicht geworden zu seyn, ob ich gleich glauben muß, daß dadurch hier und da eine lateinische Wendung eingeflossen seyn werde.

In

In den hinzugefügten Anmerkungen und Zusätzen habe ich theils die Stellen, welche mir für diejenigen, für die Euler eigentlich geschrieben hat, nicht deutlich genug zu seyn schienen, zu erläutern und leichter zu machen gesucht, und dies ist besonders in den unmittelbar nach verschiedenen §§ stehenden Anmerkungen geschehen; theils habe ich darin aus andern Eulerischen Schriften verschiedene Auszüge mitgetheilt, wodurch das Ganze eine größere Vollständigkeit und Brauchbarkeit erhält. Denn einmal finden sich Stellen, worin Euler Kenntnisse aus der gemeinen Algebra voraussetzt, die darin nicht so ausführlich vorgetragen werden, z. B. die Eliminations-Methode und der Binomische Lehrsatz, im größten Umfange, und ohne Differential-Rechnung bewiesen. Zweytens führt er bisweilen Sätze, auf welche er die wichtigsten Untersuchungen bauet, bloß historisch an, z. B. den Satz von der Auflösbarkeit jeder ganzen rationalen Funktion in reelle einfache oder doppelte Faktoren §. 32, und den Satz von dem Verhältnisse der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potestäten ihrer Wurzeln §. 166. Endlich schien es mir nützlich, manche von den abgehandelten Materien noch nach einer andern Methode bearbeitet mitzutheilen, und außerdem auch einige etwas weiter zu führen, und auf besondere Fälle anzuwenden. Auf diese Art ist der Anhang entstanden. In demselben liefere ich zuvörderst von jedem Capitel eine tabellarische und ausführliche Darstellung seines Inhalts, um dadurch die Uebersicht des Ganzen zu erleichtern, und hoffe dadurch, manchem wenigstens, einen nicht unangenehmen Dienst geleistet zu haben. Dann folgen die gedachten Auszüge, z. B. vollständige Auseinandersetzungen einiger aus der gemeinen Algebra vorausgesetzten Gegenstände, Zusatz B zum ersten und Zusatz D zum vierten Capitel; Beweise solcher Sätze, die Euler nur historisch angeführt hat, Zusatz B zum zweyten und Zusatz B zum zehnten Capitel; vollständigere Beweise einiger andern Sätze, Zusatz B zum achten, und Zusatz B zum vierzehnten Capitel; einige von den im Werke untersuchten Materien, nach einer andern Methode behandelt, Zusatz B zum neunten und Zusatz C zum zehnten Capitel; weitere Ausführungen einiger Untersuchungen und Anwendungen auf besondere Fälle, Zusatz C zum vierzehnten und Zusatz C zum sechszehnten Capitel. Weitläuftiger als bey irgend einem andern Gegenstande habe ich in den Zusätzen zum siebenten und achten Capitel, welche die Theorie der Logarithmen betreffen, seyn müssen; und so wie ich bey den übrigen fast durchaus aus andern Eulerischen Schriften schöpfen konnte, so habe ich mich hier zum Theil ganz von Eulern zu entfernen gezwungen gesehen. Daß ich es darin nicht bloß bey der von ihm mitgetheilten Regel für die

Er-

Erfindung der Logarithmen kleiner Zahlen bewenden gelassen, sondern außer einer ganz allgemeinen Regel auch die Regeln zur Erfindung der Logarithmen größerer und sehr großer Zahlen, die nicht in den Tafeln stehen, mitgetheilt habe, davon brauche ich nichts zu sagen, das wird hoffentlich den meisten Lesern willkommen seyn. Aber hier zeigten sich noch mehrere Lücken. Die gewöhnlichen Beweise der Formel

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \text{rc.}$$

erstrecken sich nicht weiter als für den Fall, wenn x eine positive oder absolute Zahl ist; daß

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \frac{x^7}{7} - \text{rc.}$$

sey; erfordert einen besondern Beweis, den ich S. 486 und 487. Abs. 9 u. 10 geführt habe: allein dabey gilt diese Formel auch nur für den Fall, wenn x ein ächter Bruch ist, und doch muß man beyde Formeln, selbst wegen §. 140 der Einleitung, ohne Einschränkung als wahr ansehen können. Nun scheint es zwar, als ob die angeführten Sätze durch die Differential Rechnung eine weitere Ausdehnung erhalten, allein da man dabey die Formel, $dlx = \frac{dx}{x}$, braucht, und diese bey genauerer

Erwägung durch die gewöhnlichen Beweise, zu keiner allgemeinen Formel erhoben wird, so verschwindet dadurch dieser Schein wieder. Gleichwohl kann man nicht zugeben, daß die Formel $d\,l\,x = \frac{dx}{x}$ nicht für jeden Werth von x richtig sey, und ohne die Theorie der Logarithmen der nicht absoluten Zahlen vollständig entwickelt zu haben, hat man doch kein Recht, sie als allgemein gültig zu betrachten. Aus diesen Gründen hielt ich es für meine Pflicht von den Logarithmen der nicht absoluten, und insbesondere der negativen und unmöglichen, Zahlen ausführlich zu reden: und wenn ich gleich das, was ich darüber beygebracht habe, für nichts weiter als für einen Versuch ausgeben kann, diese Materie aufzuklären, so scheint mir derselbe doch der prüfenden Aufmerksamkeit der Kenner nicht unwürdig, da die Resultate meiner Untersuchungen den gewöhnlichen Behauptungen oft gerade zu widersprechen, und doch dadurch so manche Schwierigkeiten in der Lehre von den Logarithmen aus dem Wege geräumt werden. So muß ich z. B. die unendliche Menge der unmöglichen Logarithmen, die jede positive Zahl außer dem reellen haben soll, schlechthin leugnen, und dagegen jeder negativen und imaginären Zahl eben sowohl als den positiven einen reellen Logarithmen beylegen, und jeden Logarithmen als zu einer unendlichen Menge von Zahlen gehörig betrachten, davon aber der

größte

größte Theil imaginär und nur zwey reell sind. Gern will ich mich belehren lassen, wo ich gefehlt habe, indeß da ich alle meine Behauptungen mit Gründen zu belegen gesucht habe, so wünschte ich auch durch Gründe widerlegt zu werden, um dadurch entweder zur Verwerfung meiner Theorie bewogen, oder zu ihrer weitern Vervollkommnung in den Stand gesetzt zu werden.

Da die auf diese Art gelieferten Zusätze mehr als die Hälfte der Uebersetzung betragen, so habe ich vieles weglassen müssen, was ich so gern noch hinzugefügt hätte. Gern hätte ich z. B. den Beweis des Satzes, daß alle unmögliche Größen auf die Form $M + N\sqrt{-1}$ gebracht werden können, mitgenommen; gern die Lehre von der Summation unendlicher Reihen auch aus den Schriften anderer Mathematiker, unter andern aus des für die Erweiterung der Grenzen der höhern Mathematik viel versprechenden Herrn Prof. Pfaffs Versuche einer neuen Summations-Methode, Berlin 1788, bereichert; gern die Theorie der continuirlichen Brüche weiter ausgeführt, und eben so gern die Geschichte mancher Sätze ausführlicher mitgetheilt. Wird indeß das was ich geliefert habe, von Kennern nicht für unzweckmäßig erkannt; darf ich hoffen, dadurch Liebhabern der Mathematik einen nicht unangenehmen Dienst zu leisten: so habe ich mir bereits zu einem dritten Theile, der lauter Zusätze enthalten soll, eine beträchtliche Menge

von

von Materien gesammlet, und da ich darin nicht so sehr, wie in den gegenwärtigen Zusätzen, den Gebrauch der Differential- und Integral-Rechnung zu vermeiden haben würde, so werde ich da auch mehrere Untersuchungen weit vollständiger und zweckmäßiger liefern können, als es hier möglich oder nützlich gewesen wäre.

Daß übrigens dieser erste Band später erscheint, als er versprochen war, daran ist lediglich der Mangel an Papier Ursach gewesen, der verwichenen Winter so allgemein statt gefunden hat. Beym zweyten Theil, an den bereits gedruckt wird, soll, hoffe ich, dieses Hinderniß nicht eintreten, und dann erscheint derselbe gegen Weyhnachten. Diesem zweyten Theile werde ich auch ein vollständiges Verzeichniß der eingeschlichenen Druckfehler in beyden Theilen beyfügen, vorläufig sind am Ende einige angezeigt. Berlin, den 16ten August 1788.