Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Vorrede des Verfassers.

Vorrede
des
Verfassers.

Die Schwierigkeiten, welche Liebhaber der Mathematik bey der Erlernung der Analysis des Unendlichen anzutreffen pflegen, rühren, wie ich oft bemerkt habe, größtentheils daher, daß sie sich sogleich, wenn sie kaum die Anfangs-Gründe der Algebra begriffen haben, zu diesem Theile der höhern Mathematik wenden: ein Verfahren, wobey sie nicht nur auf halben Wege stehen zu bleiben gezwungen sind, sondern auch schwerlich andere als falsche Begriffe von dem mathematischen Unendlichen haben können. Denn obgleich die Analysis des Unendlichen keine vollkommene Kenntniß der gemeinen Algebra und aller bis jetzt entdeckten Kunstgriffe voraussetzt; so giebt es doch eine Menge von Untersuchungen, wodurch der Weg zu dieser erhabenen Wissenschaft gebahnt werden kann, und die gleichwohl in den gewöhnlichen Compendien entweder ganz übergangen, oder doch nicht mit der erforderlichen Sorgfalt angestellt werden. Diesem Mangel hoffe ich durch das gegenwärtige Werk abzuhelfen. Denn ich habe darin nicht nur die Gegenstände, welche die Analysis des Unendlichen nothwendig voraussetzt, vollständiger und deutlicher abgehandelt als es gewöhnlich geschiehet; sondern es enthält dasselbe auch sehr viele Untersuchungen, wodurch die Leser allmählich und gleichsam unvermerkt mit dem Begriffe des Unendlichen vertraut werden. Außerdem sind darin mehrere Aufgaben, die man sonst erst in der Analysis des Unendlichen findet, bloß mit Hülfe der gemeinen Algebra aufgelöset, wodurch denn die vollkommene Uebereinstimmung beyder Methoden in der Folge deutlich in die Augen fällt.

Ich habe dieses Werk in zwey Bücher getheilt. Das erste beschäftiget sich mit bloß analytischen Ge-

gen-

genständen, das andere aber enthält die nöthigen geometrischen Untersuchungen, weil man auch mit dem Vortrage der Analysis des Unendlichen die Anwendung derselben auf die Geometrie zu verbinden pflegt. In beyden Büchern habe ich, mit Weglassung des Elementarischen, bloß solche Materien abgehandelt, welche sonst entweder gar nicht, oder nicht auf die bequemste Art untersucht, oder aus andern Quellen abgeleitet werden.

Im ersten Buche findet man also, weil die veränderlichen Größen und die Funktionen derselben den Gegenstand der Analysis des Unendlichen ausmachen, zuvörderst eine ausführliche Betrachtung der Funktionen, ihrer Umformung, Auflösung, und Entwickelung durch unendliche Reihen. Ich habe dabey die verschiedenen Arten der Funktionen angeführt, die in der höhern Analysis vorkommen. Ich theile die Funktionen zuerst in algebraische und in transcendente; jene werden nach den in der gemeinen Algebra üblichen Operationen aus den veränderlichen Größen zusammengesetzt, diese hingegen erhält man theils auf andern Wegen, theils durch die erwähnten Operationen, aber unendlichemal wiederholt. Von den Unterabtheilungen der algebraischen Funktionen ist vorzüglich die Eintheilung derselben in rationale und in irrationale wichtig. Jene habe ich sowohl in einfachere Theile als in ihre Faktoren auflösen gelehret; eine Operation, die in der Integral-Rechnung die größten Vortheile gewährt: von diesen aber habe ich gezeigt, wie man sie durch geschickte Substitutionen in rationale Funktionen verwandeln kann. Die Entwickelung der Funktionen durch unendliche Reihen erstreckt sich auf beyde Arten, und kann selbst mit dem größten Nutzen auf die transcendenten Funktionen angewandt werden: was für Erweiterungen aber die höhere Analysis der Lehre von den unendlichen Reihen verdankt, ist allgemein bekannt. Ich habe daher einige Capitel hinzugefügt, in welchen ich mich mit der Untersuchung der Eigenschaften und der Summen verschiedener unendlichen Reihen beschäftige, und manche davon sind von der Art, daß sie der Hülfe der Analysis des Unendlichen kaum entbehren zu können scheinen. Hieher gehören insbesondere die Reihen, deren Summen durch Logarithmen oder durch Kreisbogen ausgedrückt werden. Denn da diese Größen transcendent sind, und zu ihrer Bestimmung die Quadratur der Hyperbel und des Kreises erfordert wird: so pflegt man sie größtentheils erst in der Analysis des Unendlichen zu betrachten. Weil ich aber von den Potestäten zu den Exponential-Größen, die nichts anders als Potestäten mit veränderlichen Exponenten

sind,

sind, fortgegangen bin: so bin ich dadurch zu einem sehr natürlichen und fruchtbaren Begriffe von den Logarithmen gekommen, woraus sich nicht nur der außerordentliche Nutzen derselben von selbst ergiebt, sondern auch alle die unendlichen Reihen, wodurch man diese Größen gewöhnlich ausdruckt, hergeleitet werden können; auch hat sich dabey eine sehr leichte Art logarithmische Tafeln zu verfertigen dargeboten. Einen ähnlichen Weg habe ich bey der Betrachtung der Kreisbogen genommen, einer Gattung von Größen, die bey aller ihrer Verschiedenheit von den Logarithmen doch so genau mit denselben verbunden ist, daß jede Art dann, wenn sie imaginär zu werden scheint, in die andere übergeht. Nach einer kurzen Wiederholung dessen, was in der Geometrie über die Erfindung der Sinus und Cosinus der Bogen, die vielfache von andern sind, gelehret wird, habe ich aus dem Sinus und Cosinus jedes Bogens den Sinus und Cosinus des kleinsten und gleichsam verschwindenden Bogens gesucht, und dadurch unendliche Reihen gefunden, aus welchen sich, da beym Verschwinden des Bogens der Sinus dem Bogen und der Cosinus dem Radius gleich wird, der Bogen mit seinem Sinns und Cosinus vermittelst ohne Ende fortlaufender Reihen vergleichen läßt. Hierdurch habe ich eine solche Menge theils endlicher theils unendlicher Ausdrücke für diese

Gattung von Größen erhalten, daß zur Erklärung der Natur derselben die Infinitesimal-Rechnung gar nicht weiter nöthig ist. Und so wie die Logarithmen einen besondern Algorithmus nothwendig machen, dessen Nutzen sich durch die ganze Analysis verbreitet: so habe ich auch die Kreisgrößen einem ähnlichen Algorithmus unterworfen, damit sie in dem Calcul eben so bequem als die Logarithmen, ja selbst als die algebraischen Größen gebraucht werden könnten. Wie sehr hierdurch die Auflösung der schwersten Aufgaben erleichtert wird, solches zeigen nicht nur mehrere Capitel dieses Buchs zur Genüge, sondern es könnte solches auch durch eine Menge von Beyspielen aus der Analysis des Unendlichen dargethan werden, wenn diese nicht schon ohnehin bekannt wären, und sich von Tage zu Tage immer mehr vermehrten. Den größten Nutzen aber gewährt diese Untersuchung bey der Auflösung der gebrochenen Funktionen in reelle Faktoren; und da man diese Operation in der Integral-Rechnung auf keine Weise entbehren kann, so habe ich davon umständlich gehandelt. Hierauf habe ich die unendlichen Reihen betrachtet, die aus der Entwickelung dieser Funktionen entspringen und wiederkehrende Reihen genannt werden; und dabey sowohl die Summen als die allgemeinen Glieder derselben, nebst andern merkwürdigen Eigenschaften,

wodurch

wodurch sie sich auszeichnen, untersucht. Da ich hierauf durch die Auflösung in Faktoren geführt wurde, so habe ich darauf ebenfalls gezeigt, wie Produkte, die aus mehrern, ja selbst aus unendlich vielen Faktoren bestehen, in Reihen verwandelt werden können. Diese Untersuchung hat nicht nur den Weg zur Kenntniß unzähliger Reihen gebahnt, sondern auch, weil man dadurch in den Stand gesetzt wird, Reihen in Produkte aus unzähligen Faktoren zu verwandeln, sehr bequeme Zahl-Ausdrücke zur Berechnung der Logarithmen der Sinus, der Cosinus und der Tangenten an die Hand gegeben. Aus eben dieser Quelle habe ich außerdem die Auflösung vieler Aufgaben von der Theilung der Zahlen geschöpft, welche sonst die Kräfte der Analysis zu übersteigen scheinen. Bey einer so großen Verschiedenheit der Materien wäre es leicht gewesen, mehrere Bände anzufüllen; ich habe aber alles so sehr als möglich zusammen zu drängen gesucht, so daß ich zwar den Grund von allen deutlich gezeigt, die weitere Ausführung aber den Lesern überlassen habe, um ihnen auf diese Art Gelegenheit zur Uebung ihrer Kräfte und zur Erweiterung der Grenzen der Analysis zu geben. Denn ich trage kein Bedenken zu behaupten, nicht nur, daß dieses Buch viele neue Entdeckungen enthält, sondern auch, daß darin Quellen geöffnet sind, woraus noch eine Menge anderer wichtiger Entdeckungen geschöpft werden kann.

Eben dasselbe Verfahren habe ich bey dem zweyten Buche beobachtet, welches sich mit den Gegenständen beschäftiget, die man gewöhnlich unter dem Titel, höhere Geometrie, abhandelt. Ich habe darin vor der Betrachtung der Kegelschnitte, worauf man sich sonst fast allein einschränkt, die Theorie der krummen Linien auf eine solche Art vorgetragen, daß man dieselbe bey der Untersuchung jeder Gattung dieser Linien mit Nutzen gebrauchen kann. Ich brauche dazu nichts weiter als die Gleichung, wodurch die Natur jeder krummen Linie ausgedruckt wird, und zeige, wie man daraus sowohl die Gestalt als die vornehmsten Eigenschaften derselben zu finden im Stande ist. Vorzüglich glaube ich dieses bey den Kegel-Schnitten geleistet zu haben, die man sonst entweder bloß geometrisch, oder auf eine unvollkommene und nicht genug natürliche Weise analytisch untersucht hat. Ich habe nemlich zuvörderst aus der allgemeinen Gleichung für die Linien der zweyten Ordnung ihre allgemeinen Eigenschaften abgeleitet, und darauf dieselben in Geschlechter oder Arten eingetheilt. Hierbey habe ich darauf Rücksicht genommen, ob die Curve ohne Ende fortlaufende Schenkel hat, oder in

einen

einen endlichen Raum eingeschlossen ist, und im ersten Falle wieder auf die Zahl und Beschaffenheit jener Schenkel gesehen, ob sie nemlich geradlinige Asymtoten haben oder nicht. Auf diese Art habe ich die drey bekannten Arten der Kegel-Schnitte erhalten, die Ellipse, die ganz in einem endlichem Raume enthalten ist, die Hyperbel, die vier ohne Ende fortlaufende und geraden Asymtoten sich nähernde Schenkel hat, und die Parabel, deren zwey ohne Ende fortgehende Schenkel keine Asymtoten haben. Auf eine ähnliche Art habe ich die Linien der dritten Ordnung betrachtet, und dieselben, nach der Auseinandersetzung ihrer allgemeinen Eigenschaften, in sechszehn Geschlechter getheilt, unter welchen die von **Newton** angenommenen zwey und siebenzig Arten insgesammt begriffen sind. Das Verfahren dabey ist von mir so deutlich und vollständig beschrieben worden, daß es bey der Eintheilung der Linien aller übrigen Ordnungen leicht nachgeahmt werden kann, indeß habe ich es gleichwohl noch bey den Linien der vierten Ordnung angewandt. Nachdem ich auf diese Art das Nöthige von den Ordnungen der Linien gesagt habe, kehre ich wieder zur Erklärung der allgemeinen Eigenschaften aller Linien zurück. Hier beschreibe ich die Methode, die Tangenten und Normalen der Curven, ja selbst ihre Krümmung, die man aus dem Krümmungs-Halbmesser beurtheilt, zu bestimmen. Eigentlich gehören zwar diese Gegenstände in die Differential-Rechnung, allein ich habe hier eben das bloß durch die gemeine Algebra geleistet, so daß in der Folge der Uebergang von der Analysis des Endlichen zu der Analysis des Unendlichen desto leichter ist. Auch habe ich die Wendungs-Punkte, die Spitzen, die doppelten und vielfachen Punkte der Curven betrachtet, und gezeigt, wie alle diese Dinge aus den Gleichungen auf eine leichte Art bestimmt werden; ob ich gleich nicht leugnen will, daß die Differential-Rechnung hierzu noch bequemere Wege enthalte. Eben so findet man den Streit wegen der Spitze der zweyten Art, wenn beyde in der Spitze zusammenkommende Bogen ihre Krümmung nach eben der Seite kehren, berührt, und hoffentlich auf eine solche Art entschieden, daß weiter kein Zweifel statt finden kann. Endlich habe ich einige Capitel hinzugefügt, um die Erfindung der krummen Linien aus gegebenen Eigenschaften von ihnen zu lehren, und außerdem verschiedene Aufgaben, besondere Sectionen des Kreises betreffend, aufgelöset. Da dieses die geometrischen Gegenstände sind, deren Kenntniß vorzüglich zur Erlernung der Analysis des Unendlichen erfordert wird: so habe ich Anhangsweise

weise aus der Stereometrie die Theorie der Körper und ihrer Oberflächen analytisch behandelt, und gezeigt, wie die Natur einer jeden Oberfläche durch eine Gleichung dreyer veränderlicher Größen bestimmt werden kann. Nachdem ich die Flächen nach der Anzahl der Dimensionen der veränderlichen Größen in der Gleichung, auf eine der bey den Linien ähnliche Art, in Ordnungen getheilt; so habe ich gezeigt, daß die erste Ordnung bloß die Ebene enthält. Die Flächen der zweyten Ordnung aber habe ich, in Ansehung der ins Unendliche sich erstreckenden Theile, in sechs Classen gebracht, und auf eine ähnliche Art lassen sich auch die Flächen der übrigen Ordnungen eintheilen. Zugleich habe ich die Durchschnitte zweyer Flächen betrachtet, und, da dieselben meistens krumme Linien sind, die nicht in einer Ebene liegen, dabey gezeigt, wie man sie durch Gleichungen ausdrucken kann. Endlich habe ich die Lage der berührenden Ebenen und der geraden Linien, die auf Flächen senkrecht stehen, zu bestimmen gesucht.

Uebrigens muß ich bey der Menge der in diesem Werke vorkommenden auch schon von andern untersuchten Gegenstände um Verzeihung bitten, daß ich derer, die vor mir eben dieselben Materien bear-

bearbeitet haben, nicht allenthalben rühmliche Erwähnung gethan. Bey meinem Vorsatze, alles so kurz als möglich zu behandeln, würde die Geschichte jedes Satzes das Werk zu sehr vergrößert haben. Indeß sind auch die mehresten von den sonst schon aufgelösten Aufgaben hier aus ganz andern Gründen aufgelöset worden, so daß ich mir davon keinen unbeträchtlichen Theil zueigenen darf. Ich hoffe aber, daß sowohl dieses als auch insbesondere dasjenige, was ganz neu ist, den Liebhabern dieser Wissenschaft nicht unangenehm seyn wird.