Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Erstes Capitel. Von den Funktionen überhaupt.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53541

Erstes Buch.

Erstes Capitel.

Von den Funktionen überhaupt.

§. 1.

Eine beständige Größe ist eine bestimmte Größe, die immer denselben Werth behält.

Zu diesen Größen gehören z. B. alle Zahlen, indem sie den ihnen einmal beygelegten Werth beständig behalten: und wenn dergleichen beständige Größen allgemein ausgedruckt werden sollen, so gebraucht man dazu die ersten Buchstaben des Alphabeths a, b, c u. s. f. Zwar pflegt man in der gemeinen Analysis, wo man bloß bestimmte Größen untersucht, durch diese ersten Buchstaben des Alphabets die bekannten, und durch die letzten dagegen die unbekannten Größen zu bezeichnen; allein in der höhern Analysis sieht man nicht so sehr auf diesen Unterschied, sondern theilt daselbst die Größen vorzüglich in beständige und in veränderliche ein.

§. 2.

Eine veränderliche Größe ist eine unbestimmte oder allgemeine Größe, die alle bestimmte Werthe ohne Ausnahme unter sich begreift.

Da man einen jeden bestimmten Werth durch eine Zahl ausdrucken kann, so schließt also eine veränderliche Größe alle Zahlen ohne Ausnahme in sich. Auf eben die Art nemlich, als man die Begriffe der Gattungen und der Geschlechter aus den Begriffen der einzelnen Dinge ableitet, ist auch die veränderliche Größe ein Geschlecht, unter welchem alle bestimmte Größen begriffen sind. Dergleichen veränderliche Größen bezeichnet man durch die letzten Buchstaben des Alphabets z, y, x u. s. f.

§. 3.

Eine veränderliche Größe wird bestimmt, wenn ihr irgend ein bestimmter Werth beygelegt wird.

Es kann daher eine veränderliche Größe auf unzählige Arten bestimmt werden, indem man für sie jede Zahl ohne Ausnahme setzen kann. Auch wird die Bedeutung einer veränderlichen Größe nicht erschöpft, bevor nicht alle bestimmte Werthe für sie gesetzt worden sind. Die veränderliche Größe begreift daher alle nur irgend gedenkbare Zahlen, die positiven und negativen, die ganzen und die gebrochenen, die rationalen, irrationalen und transcendenten *) unter sich; ja selbst die Null und die imaginären Zahlen sind davon nicht ausgeschlossen.

*) Das Beywort, Transcendent, steht der Benennung, Algebraisch entgegen. Algebraische Größen werden diejenigen Größen genannt, deren Verhältniß zu gegebenen Größen durch Gleichungen von einem bestimmten Grade ausgedruckt werden kann; und unter transcendenten Größen hat man daher solche zu verstehen, bey welchen dieses nicht möglich ist. Auf diese Art erklärt Leibnitz die transcendenten Größen, Opp. Tom. III. p. 106. nach der Genfer Ausgabe vom Jahr 1768. Ein Beyspiel einer transcendenten Größe hat man an einem unbestimmten Kreisbogen, von welchem erwiesen ist, daß zwischen ihm und seinem Halbmesser keine algebraische Gleichung statt findet.

§. 4.

§. 4.

Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist ein algebraischer Ausdruck, der auf irgend eine Art aus dieser veränderlichen Größe und aus Zahlen oder beständigen Größen zusammengesetzt ist.

Ein jeder algebraischer Ausdruck, der außer der veränderlichen Größe z lauter beständige Größen enthält, ist also eine Funktion dieser z. So sind $a + 3z$; $az - 4zz$; $az + b\sqrt{(aa - zz)}$; c^z; u. s. f. Funktionen von z.

§. 5.

Eine Funktion einer veränderlichen Größe ist daher selbst eine veränderliche Größe.

Denn da man für die veränderliche Größe jeden bestimmten Werth setzen kann, so kann auch die Funktion derselben unzählige bestimmte Werthe erhalten; ja es läßt sich, da die veränderliche Größe auch die imaginären Werthe unter sich begreift, kein bestimmter Werth gedenken, den die Funktion nicht sollte erhalten können. So kann zwar die Funktion $\sqrt{(9 - zz)}$, wenn man für z bloß die möglichen Zahlen setzt, nie einen größern Werth als 3 bekommen; allein setzt man dafür auch die imaginären Zahlen von der Form $5\sqrt{-1}$, so läßt sich kein bestimmter Werth angeben, den man nicht aus der Formel $\sqrt{(9 - zz)}$ sollte herleiten können. Es giebt indeß auch Ausdrücke, die, ob sie gleich dem Scheine nach zu den Funktionen gehören, dennoch nichts anders als beständige Größen sind, weil sie bey aller Veränderung der in ihnen vorkommenden veränderlichen Größe immer einen und denselben Werth behalten; z. B. z^0; 1^z; $\frac{aa - az}{a - z}$.

§. 6.

Der Hauptunterschied der Funktionen beruhet auf der Art und Weise, wie sie aus der veränderlichen und aus beständigen Größen zusammengesetzt sind.

Er hängt also von den Operationen ab, durch welche Größen mit einander verbunden werden können, als der Addition, Subtraction, Multiplication, Division, Erhebung zu Potestäten, Extraction der Wurzeln, so wie auch der Auflösung der Gleichungen. Außer diesen sogenannten algebraischen Operationen giebt es noch eine Menge anderer, welche den Beynamen der transcendenten führen, und wohin die Formation der Exponential- und der logarithmischen Größen und unzählige andere gehören, welche die Integral-Rechnung an die Hand giebt.

Inzwischen können einige Arten der Funktionen bemerkt werden; als die Vielfachen $2z$; $3z$; $\frac{3}{5}z$; az; die Potestäten von z, z. B. z^2; z^3; $z^{\frac{1}{2}}$; z^{-1}; u. s. f.: und so wie diese auf einer einzigen Operation beruhen, so werden auch die Ausdrücke, die durch jede andere Operation entstehen, mit dem Namen der Funktionen belegt. *)

*) Vielleicht soll dies so viel sagen: So wie diese auf einer einzigen Operation beruhende Arten, so werden auch die Ausdrücke, die durch jede andere Operation entstehen, mit einem daher genommenen Namen belegt.

§. 7.

Man theilt die Funktionen in Algebraische und Transcendente ein; unter jenen versteht man die, in welchen bloß die algebraischen, unter diesen aber die, in welchen transcendente Operationen vorkommen.

Es sind also die Vielfachen und die Potestäten von z, so wie auch alle die Ausdrücke, welche durch die vorhin genannten algebraischen Operationen formiret werden, z. B. $\frac{a + bz^n - c\sqrt{(2z - zz)}}{aaz - 3bz^3}$, algebraische Funktionen. Ja öfters können die algebraischen Funktionen nicht einmal entwickelt dargestellt werden, wie die Funktion Z von z, wenn sie durch folgende Gleichung gegeben wird. $Z^5 = azzZ^3 - bz4Z^2 + cz3Z - 1$. Denn obgleich diese Gleichung nicht aufgelöset werden kann, so ist doch ausgemacht, daß Z einem gewissen aus der veränderlichen Größe z und verschiedenen beständigen Größen zusammengesetzten Ausdrucke gleich, und deswegen eine Funktion von z ist. In Ansehung der transcendenten Funktionen aber ist zu merken, daß sie nur dann wirklich transcendent sind, wenn die darin vorkommende transcendente Operation die veränderliche Größe betrifft. *) Denn wenn die transcendenten Operationen nur die beständigen Größen angehen, so bleibt die Funktion algebraisch. Bedeutet z. B. c den Umkreis eines Zirkels, dessen Halbmesser $= 1$ ist: so ist c allerdings eine transcendente Größe, **) aber die Ausdrücke $c + z$; cz^2; $4z^c$; u. d. g. sind nichts desto weniger algebraische Funktionen von z. Wenn übrigens einige Bedenken tragen, z^c zu den algebraischen Funktionen zu rechnen, oder Potestäten von z mit irrationalen Exponenten, wie $z^{\sqrt{2}}$ lieber interscendente als algebraische Funktionen nennen wollen, so ist das eine Sache von geringer Erheblichkeit. ***)

*) Man vergleiche hiermit die Erklärung der transcendenten Funktionen in des Hrn. Hofr. Kästners Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen §. 571.

**) Ob sich der ganze Umfang des Kreises nicht durch den Halbmesser, freylich vermittelst Wurzelgrößen, ausdrucken lasse? darüber ist selbst nach einer Erinnerung Eulers im zweyten Theile seiner Opusc. analyt. Petersburg 1785, noch nichts ausgemacht. Ließe sich das thun, so wäre die Peripherie des Kreises nicht transcendentisch.

***) Dieses thut Leibnitz in dem Briefe an Wallis, in welchem die bey §. 3 angeführte Stelle steht, in der Nachschrift. Cramer geht in seiner Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques, Genf 1750, S. 8 hier noch weiter im Unterscheiden.

§. 8.

Die algebraischen Funktionen werden wieder in Rationale und in Irrationale eingetheilt; jene sind solche, in welchen die veränderliche Größe kein Wurzelzeichen hat, diese aber solche, in welchen Wurzelzeichen bey der veränderlichen Größe anzutreffen sind.

In den rationalen Funktionen kommen also weiter keine Operationen vor als die Addition, die Subtraction, die Multiplication, die Division, und die Erhebung zu Potestäten, deren Exponenten ganze Zahlen sind: und es sind also $a+z$; $a-z$; az; $\frac{aa+zz}{a+z}$; az^3-bz^5; u. s. f. rationale; hingegen $\sqrt{z}$; $a+\sqrt{(aa-zz)}$; $\sqrt[3]{(a-2z+zz)}$; $\frac{aa-z\sqrt{(aa+zz)}}{a+z}$ irrationale Funktionen von z.

Die irrationalen Funktionen sind ferner entweder Entwickelte oder Verwickelte.

Entwickelt heißt eine irrationale Funktion, wenn sie vermittelst der Wurzelzeichen abgesondert dargestellt ist, wie in den angeführten Beyspielen. Die verwickelten irrationalen Funktionen rühren von der Unvollständigkeit der Auflösungskunst oder Algebra her. So ist Z eine verwickelte Funktion von z, wenn es durch die Gleichung $Z^7=azZ^2-bz^5$ gegeben wird; denn man ist, wenn man auch die Wurzel-

zeichen

zeichen gebrauchen will, nicht im Stande, den Werth von Z abgesondert darzustellen.

§. 9.

Die rationalen Funktionen werden wieder in ganze und in gebrochene eingetheilt.

In den ganzen rationalen Funktionen kommt weder z mit einem negativen Exponenten, noch ein Bruch vor, dessen Nenner die z enthielte; und gebrochene Funktionen sind also solche, worin entweder Brüche mit z im Nenner, oder z mit einem negativen Exponenten vorkommt. Die allgemeine Formel für die ganzen Funktionen ist: $a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 +$ u. s. w. denn es läßt sich keine ganze Funktion von z gedenken, die nicht in dieser Formel begriffen seyn sollte. Die allgemeine Formel für die gebrochenen Funktionen hingegen ist, da mehrere Brüche in Einen verwandelt werden können,

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{ꝛc.}}{\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \zeta z^5 + \text{ꝛc.}}$$

Die beständigen Größen a, b, c, d, ꝛc. α, β, γ, δ, ꝛc. machen keine Veränderung, wie sie auch immer beschaffen seyn mögen, und man kann sich darunter sowohl positive als negative, sowohl ganze als gebrochene, desgleichen rationale, irrationale, ja selbst transcendente Größen gedenken.

§. 10.

Hiernächst ist die Eintheilung der Funktionen in Einförmige und Vielförmige zu merken.

Einförmig ist eine Funktion, wenn sie für jeden bestimmten Werth von z nicht mehr als einen einzigen, vielförmig aber, wenn sie für jeden bestimmten Werth von z mehrere bestimmte Werthe bekömmt. Die rationalen, ganzen sowohl als gebrochenen, Funktionen sind daher einförmige Funktionen; denn sie geben für jedes bestlmmte z nie mehr als einen bestimmten Werth, wie man auch z bestimmen mag. Die irrationalen Funktionen hingegen sind vielförmige, weil die Wurzelzeichen auf mehr als einen Werth führen. Auch die transcendenten Funktionen sind theils einförmig, theils vielförmig; ja es giebt darunter selbst unendlich vielförmige, z. B. den Bogen, der zu dem Sinus x gehört, indem jeder Sinus als ein Sinus von unendlich vielen Bogen betrachtet werden kann. Zur Bezeichnung einzelner einförmigen Funktionen wollen wir uns der Buchstaben P, Q, R, S, T ꝛc. bedienen.

§. 11.

Eine Funktion von z heißt zweyförmig, wenn sie für jeden bestimmten Werth von z einen doppelten Werth giebt.

Dergleichen Funktionen geben die Quadratwurzeln, z. B. $\sqrt{(2z + zz)}$: denn hier giebt jeder Werth von z einen doppelten Werth, einen positiven und einen negativen. Ueberhaupt aber ist Z eine zweyförmige Funktion von z, wenn es durch die quadratische Gleichung $Z^2 - PZ + Q = 0$ bestimmt wird, und P und Q einförmige Funktionen von z sind. Denn es ist alsdenn $Z = \frac{1}{2}P \pm \sqrt{(\frac{1}{4}P^2 - Q)}$ u. Z erhält für jeden bestimmten Werth von z einen doppelten Werth. Uebrigens sind entweder beyde Werthe von Z reell, oder beyde imaginär, und, wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist, ihre Summe = P und ihr Produkt = Q.

§. 12.

Eine Funktion von z heißt dreyförmig, wenn sie für jeden bestimmten Werth von z einen dreyfachen Werth giebt.

Der-

Dergleichen Funktionen entspringen aus der Auflösung der cubischen Gleichungen. Sind nemlich P, Q und R einförmige Funktionen von z, und $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = o$; so ist Z ein dreyförmige Funktion von z, weil es für jeden bestimmten Werth von z einen dreyfachen Werth bekömmt. Diese drey Werthe von Z sind entweder alle drey reell, oder es ist solches nur der eine, und die beyden übrigen sind imaginär. Auch ist bekannt, daß ihre Summe $= P$, die Summe der Produkte aus je zwey und zweyen von ihnen $= Q$, und das Produkt aus allen dreyen $= R$ ist.

§. 13.

Eine Funktion von z heißt vierförmig, wenn sie für jeden bestimmten Werth von z einen vierfachen Werth giebt.

Dergleichen Funktionen entspringen aus der Auflösung der biquadratischen Gleichungen. Bedeuten nemlich P, Q, R und S einförmige Funktionen von z, und ist $Z^4 - PZ^3 + QZ^2 - RZ + S = o$: so ist Z eine vierförmige Funktion von z, weil Z für jedes bestimmte z einen vierfachen Werth bekommt. Diese vier Werthe sind nun entweder alle vier reell, oder alle viere imaginär, oder es sind davon zwey reell und zwey imaginär. Ferner ist ihre Summe $= P$, die Summe der Produkte aus je zwey und zweyen von ihnen $= Q$, die Summe aus je drey und dreyen $= R$, und das Produkt aus allen vieren $= S$. Auf eine ähnliche Art verhält es sich mit den fünfförmigen und den übrigen vielförmigen Funktionen.

§. 14.

Es ist also Z eine vielförmige Funktion von z, wenn $Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \text{etc.} = o$, und also Z für jedes bestimmte z so viel bestimmte Werthe giebt, als n Einheiten enthält.

Es

Es muß aber n eine ganze Zahl seyn, und also die Gleichung, wodurch Z gegeben wird, auf die rationale Form gebracht werden, wenn man beurtheilen will, wie vielförmig Z ist; wo alsdann der Exponent der höchsten Potestät von Z die Menge der Werthe anzeigt, die für jedes bestimmte z zu Z gehören. Außerdem müssen P, Q, R, S ꝛc. einförmige Funktionen von z seyn. Denn sobald einige von diesen Buchstaben vielförmige Funktionen von z anzeigen, so giebt Z für jedes bestimmte z viel mehr Werthe, als n Einheiten enthält. Sind unter diesen Werthen imaginäre Werthe, so ist ihre Zahl allezeit gerade; und wenn also n eine ungerade Zahl ist, so muß zum wenigstens ein Werth von Z reell seyn; ist aber n eine gerade Zahl, so können auch alle Werthe von Z imaginär seyn.

§. 15.

Wenn Z eine solche vielförmige Funktion von z ist, daß es nie mehr als einen reellen Werth giebt; so wird es gewissermaßen eine einförmige Funktion von z, und kann auch meistens als eine einförmige Funktion gebraucht werden.

Dergleichen Funktionen sind $\sqrt[3]{P}$, $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P}$ ꝛc. denn diese haben nie mehr als einen reellen Werth, vorausgesetzt, daß P eine einförmige Funktion von z ist. Aus eben der Ursache kann man auch $P^{\frac{m}{n}}$, wenn n eine ungerade Zahl ist, zu den einförmigen Funktionen zählen, m mag eine gerade, oder eine ungerade Zahl seyn. Ist hingegen n eine gerade Zahl, so hat $P^{\frac{m}{n}}$ entweder gar keinen oder zwey reelle Werthe; und ist daher n eine gerade Zahl und $\frac{m}{n}$ ein Bruch, der durch die kleinsten Zahlen ausgedruckt ist, so kann man auch $P^{\frac{m}{n}}$, als eine zweyförmige Funktion betrachten.

§. 16.

Wenn y eine Funktion von z ist, so ist auch z eine Funktion von y.

Denn da y eine Funktion von z ist, so giebt es, was auch y für eine Funktion von z seyn mag, eine Gleichung, worin y durch z und beständige Größen gegeben ist. Aus dieser Gleichung läßt sich aber auch umgekehrt z durch y und beständige Größen bestimmen; und da y eine veränderliche Größe ist, so wird alsdann z einem aus y und aus beständigen Größen zusammengesetzten Ausdrucke gleich, und also eine Funktion von y. Nun läßt sich auch beurtheilen, eine wievielförmige Funktion z von y ist, und es kann z eine vielförmige Funktion von y werden, wenn gleich y eine einförmige Funktion von z ist. Ist z. B. $y^3 = ayz - bzz$; so ist y eine dreyförmige Funktion von z, allein z nur eine zweyförmige von y.

§. 17.

Wenn y und x Funktionen von z sind, so ist auch y eine Funktion von x, und x eine Funktion von y.

Denn da y eine Funktion von z ist, so ist auch z eine Funktion von y [§. 16.] und eben so z eine Funktion von x. Folglich ist die Funktion von y der Funktion von x gleich; und da aus dieser Gleichung sowohl y durch x als x durch y bestimmt werden kann, so ist klar, daß y eine Funktion von x, und x eine Funktion von y ist. Oft ist man zwar wegen der Unzulänglichkeit der Algebra nicht im Stande, diese Funktionen entwickelt darzustellen: allein das hindert die Ueberzeugung von der angeführten Behauptung nicht. Das lehrt aber die Algebra, wie man aus zwey Gleichungen, davon die eine y und z, die andere hingegen x und z

ent-

enthält, eine andere herleitet, worin bloß x und y enthalten sind. *)

*) Man findet solches z. B. in Newtons Arithmetica universali, in dem Abschnitte: De duabus pluribusve aequationibus in unam transformandis, ut incognitae quantitates exterminentur, in der, Leyden 1732 herausgekommenen, Gravesandischen Ausgabe, S. 57. f.; in des Hrn. Hofr. Kästners Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen, in dem Abschnitte von den Gleichungen §. 199. f. und in Eulers Nouvelle méthode d'éliminer les quantités inconnues des équations, in der Histoire de l'Académie royale des Sciences & belles Lettres vom Jahr 1764. Was ich darüber hier beybringen zu müssen geglaubt habe, findet man im Anhange zu dem gegenwärtigen ersten Theile unter der ersten Nummer.

§. 18.

Endlich sind noch einige besondere Arten von Funktionen zu merken. So ist eine Funktion eine gerade Funktion von z, wenn sie eben denselben Werth giebt, man mag für z entweder + k oder — k setzen.

Eine solche gerade Funktion von z ist zz; denn man mag für z entweder + k oder — k setzen, so erhält man in beyden Fällen für zz einerley Werth, nemlich $zz = + kk$. Aus eben dem Grunde sind auch diese Potestäten von z, z^4, z^6, z^8, und überhaupt z^m, wenn m eine gerade, positive entweder oder negative, Zahl ist, gerade Funktionen von z.

Ja da auch $z^{\frac{m}{n}}$ zu den einförmigen Funktionen gerechnet werden kann, wenn n eine ungerade Zahl ist [§. 15]: so ist auch $z^{\frac{m}{n}}$ eine gerade Funktion von z, wenn m eine gerade, n aber eine ungerade Zahl ist. Es werden daher auch alle Ausdrücke, die aus dergleichen Potestäten, auf was für eine

Ar-

Art man will, zusammengesetzt sind, gerade Funktionen von z seyn. So ist Z eine gerade Funktion von z, wenn $Z = a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \text{ꝛc.}$ oder $Z = \dfrac{a + bz^2 + cz^4 + dz^6 + \text{ꝛc.}}{\alpha + \beta z^2 + \gamma z^4 + \delta z^6 + \text{ꝛc.}}$ desgleichen wenn $Z = a + bz^{\frac{2}{3}} + cz^{\frac{2}{5}} + dz^{\frac{4}{7}} + \text{ꝛc.}$ oder $Z = a + bz^{-\frac{2}{3}} + cz^{-\frac{4}{3}} + dz^{-\frac{2}{5}} + \text{ꝛc.}$ oder $Z = \dfrac{a + bz^{\frac{2}{7}} + cz^{-\frac{4}{5}} + dz^{\frac{8}{3}}}{\alpha + \beta z^{\frac{2}{3}} + \gamma z^{-\frac{2}{5}} + \delta z^{\frac{4}{7}}}$ ist. Und da dergleichen Ausdrücke insgesammt zu den einförmigen Funktionen von z gehören, so kann man sie auch gerade einförmige Funktionen von z nennen.

§. 19.

Eine vielförmige gerade Funktion von z ist eine Funktion, die zwar für jedes z verschiedene Werthe, aber doch immer eben dasselbe giebt, man mag $z = +k$ oder $= -k$ setzen.

Es sey Z eine solche vielförmige gerade Funktion von z. Da die Natur einer vielförmigen Funktion durch eine Gleichung zwischen Z und z ausgedruckt wird, in welcher Z so viel Dimensionen hat, als es verschiedene Werthe unter sich begreift: so ist offenbar, daß Z eine vielförmige gerade Funktion seyn wird, wenn die veränderliche Größe z in der Gleichung, welche die Natur von Z ausdruckt, allenthalben eine gerade Anzahl von Dimensionen hat. So ist Z eine zweyförmige gerade Funktion von z, wenn $Z^2 = az^4Z + bz^2$, und eine dreyförmige, wenn $Z^3 - az^2Z^2 + bz^4Z - cz^8 = 0$. Ueberhaupt ist $Z^2 - PZ + Q = 0$, eine zweyförmige gerade, $Z^3 - PZ^2 + QZ - R = 0$ eine dreyförmige gerade Funktion von z, u. s. f., wenn P, Q, R, S u. s. w. einförmige gerade Funktionen von z sind.

§. 20.

Es ist also jede, einförmige sowohl als vielförmige, gerade Funktion von z ein Ausdruck, der auf die Art aus der veränderlichen Größe z und aus beständigen Größen zusammengesetzt ist, daß die Anzahl der Dimensionen von z allenthalben eine gerade Zahl ist.

Außer den einförmigen Funktionen, wovon vorhin schon [§. 18] Beyspiele angeführt worden sind, gehören also hieher, $a + \sqrt{(bb - zz)}$; $azz + \sqrt[3]{(a^6 z^4 - bz^2)}$ desgleichen $az^{\frac{2}{3}} + \sqrt[3]{(z^2 + \sqrt{(a^4 - z^4)})}$ u. s. w.

Hieraus erhellet, daß man die geraden Funktionen auch durch Funktionen von zz erklären kann.

Denn ist Z irgend eine Funktion von y, so erhält man, wenn man darin allenthalben zz anstatt y setzt, eine solche Funktion von z, in welcher die Anzahl der Dimensionen von z allenthalben eine gerade Zahl ist. Doch muß man den Fall ausnehmen, wenn in dem Ausdrucke für Z, $\sqrt{y}$ und andere ähnliche Formen vorkommen, welche dadurch, daß man zz für y setzt, die Wurzelzeichen verlieren. Denn wenn auch gleich $y + \sqrt{ay}$ eine Funktion von y ist, so wird doch dieser Ausdruck, wenn man $y = zz$ setzt, keine gerade Funktion von z, weil alsdann $y + ay = zz + z\sqrt{a}$ ist. Diese Fälle also ausgenommen, so ist die gegebene Erklärung der geraden Funktionen richtig, und sehr brauchbar, wenn man dergleichen Funktionen machen will.

§. 21.

Eine ungerade Funktion von z ist eine Funktion, deren Werth negativ wird, wenn man $-z$ anstatt z setzt.

Dergleichen ungerade Funktionen sind alle Potestäten von z, deren Exponenten ungerade Zahlen sind, z. B. z^1, z^3, z^5, z^7; u. s. w. ferner z^{-1}, z^{-3}, z^{-5} u. s. f. so wie auch

auch $z^{\frac{m}{n}}$, wenn sowohl m als n eine ungerade Zahl ist. Ueberhaupt aber ist jeder Ausdruck, der aus solchen Potestäten von z zusammengesetzt ist, eine ungerade Funktion von z, z. B. $az + bz^3$; $az + az^{-1}$; desgleichen $z^{\frac{1}{3}} + az^{\frac{3}{5}} + bz^{-\frac{5}{3}}$ u. s. f. Was aber die Natur dieser Funktionen und die Art und Weise betrifft, dergleichen zu erfinden: so läßt sich beydes aus dem, was über die geraden Funktionen gesagt worden ist, leicht abnehmen.

§. 22.

Wenn man eine gerade Funktion von z durch z oder irgend eine ungerade Funktion von z multiplicirt, so ist das Produkt eine ungerade Funktion von z.

Es sey P eine gerade Funktion von z, die folglich dieselbe bleibt, wenn man darin $-z$ anstatt z setzt. Setzt man also in dem Produkte Pz, $-z$ anstatt z, so erhält man $-Pz$, und Pz ist daher eine ungerade Funktion von z. Ferner sey P eine gerade und Q eine ungerade Funktion von z. Hier fließt aus der Erklärung der geraden und ungeraden Funktion [§. 21. 18.] daß P stets einerley Werth behält, man mag z positiv oder negativ nehmen, Q aber negativ wird, wenn man darin $-z$ anstatt z setzt. Es wird also auch das Produkt PQ, wenn man z negativ nimmt, in $-PQ$, oder in eine negative Größe, verwandelt, und es ist daher PQ eine ungerade Funktion von z. So ist das Produkt aus $a + \sqrt{(aa + zz)}$, einer geraden, und z^3, einer ungeraden Funktion von z, nemlich $az^3 + z^3\sqrt{(aa + zz)}$, eine ungerade Funktion von z; und eben das ist das Produkt $z \times \frac{a + bzz}{\alpha + \beta zz} = \frac{az + bz^3}{\alpha + \beta z^2}$. Hieraus aber erhellet auch, daß $\frac{P}{Q}$ oder $\frac{Q}{P}$ eine ungerade Funktion von z seyn wird, wenn von den beyden Funktionen P und Q die eine eine gerade und die andere eine ungerade Funktion ist.

§. 23.

Wenn eine ungerade Funktion durch eine ungerade Funktion multiplicirt oder dividirt wird: so ist das Produkt oder der Quotient eine gerade Funktion.

Es seyen Q und S zwey ungerade Funktionen von z, so daß, wenn man $-z$ anstatt z setzt, Q in $-Q$, und S in $-S$ übergeht: so fällt in die Augen, daß sowohl das Produkt QS als der Quotient $\frac{Q}{S}$ eben denselben Werth behält, man mag z positiv oder negativ nehmen, und es sind daher beyde gerade Funktionen von z. Auch ist nunmehr offenbar, daß das Quadrat einer ungeraden Funktion eine gerade, der Cubus aber eine ungerade, das Biquadrat davon wiederum eine gerade Funktion u. s. w. ist.

§. 24.

Wenn y eine ungerade Funktion von z ist, so ist auch z eine ungerade Funktion von y.

Da y eine ungerade Funktion von z ist, so muß sich, wenn man $-z$ statt z setzt, y in $-y$ verwandeln. Wird daher z durch y bestimmt, so muß auch z in $-z$ übergehen, wenn man $-y$ anstatt y setzt, und also z eine ungerade Funktion von y seyn. Ist also $y = z^3$, folglich y eine ungerade Funktion von z; so ist auch aus der Gleichung $z^3 = y$ oder $z = y^{\frac{1}{3}}$, z eine ungerade Funktion von y. Und da für $y = az + bz^3$, y eine ungerade Funktion von z ist, so ist auch, wenn man aus der Gleichung $bz^3 + az = y$ den Werth von z durch y ausdruckt, dieser Werth eine ungerade Funktion von y.

§. 25.

Wenn die Natur einer Funktion von y durch eine solche Gleichung bestimmt wird, daß die Dimensionen, welche y und z zusammengenommen in einem jeden Gliede haben, entweder allenthalben eine gerade, oder allenthalben eine ungerade Zahl ausmachen: so ist y eine ungerade Funktion von z.

Denn wenn man in einer solchen Funktion nicht nur $-z$ anstatt z, sondern auch $-y$ anstatt y setzt: so bleiben entweder alle Glieder der Gleichung unverändert, oder sie werden negativ; allein die Gleichung bleibt in beyden Fällen dieselbe. Hieraus erhellet, daß $-y$ eben so durch $-z$, als $+y$ durch $+z$ bestimmt wird, und daß also, wenn man $-z$ anstatt z setzt, der Werth von y in $-y$ übergehen, und also y eine ungerade Funktion von z seyn muß. Ist z. B. $yy = ayz + bzz + c$; oder $y^3 + ayyz = byzz + cy + dz$: so ist y aus beyden Gleichungen eine ungerade Funktion von z.

§. 26.

Wenn Z eine Funktion von z, und Y eine Funktion von y ist, und Y auf eben die Art durch y und beständige Größen, als Z durch z und beständige Größen bestimmt wird: so werden diese Funktionen Y und Z ähnliche Funktionen von y und z genannt.

So sind Z und Y ähnliche Funktionen von z und y, wenn $Z = a + bz + cz^2$, und $Y = a + by + cy^2$; oder um auch vielförmige Funktionen anzuführen, wenn $Z^3 = azzZ + b$, und $Y^3 = ayyY + b$. Wenn daher Y und Z dergleichen ähnliche Funktionen von y und z sind: so verwandelt sich die Funktion Z, wenn man darin y anstatt z

setzt, in die Funktion Y. Man pflegt diese Aehnlichkeit auch auf die Art auszudrucken, daß man sagt, Y sey eine eben solche Funktion von y als Z von z; und diese Ausdrücke werden gebraucht, es mögen z und y von einander abhängen oder nicht. Es ist daher $a(y+n)+b(y+n)^3$ eine eben solche Funktion von $y+n$, als $ay+by^3$ von y; und $\frac{azz+bz+c}{\alpha zz+\beta z+\gamma}$ eine eben solche Funktion von $\frac{1}{z}$, als $\frac{a+bz+czz}{\alpha+\beta z+\gamma zz}$ von z ist: im ersten Falle ist $z=y+n$, und im andern $y=\frac{1}{z}$. Hieraus erhellet sehr deutlich, was es mit der Aehnlichkeit der Funktionen, die in der ganzen höhern Analyse ein Gegenstand von der äußersten Wichtigkeit ist, für eine Bewandniß hat. Uebrigens kann das, was bisher über die Natur der Funktionen Einer veränderlichen Größe überhaupt gesagt worden ist, hier hinreichen, da die weitere Auseinandersetzung desselben bey der folgenden Anwendung vorkommt.