Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Zweytes Capitel. Von der Umformung der Funktionen.

Zweytes Capitel.

Von der Umformung der Funktionen.

§. 27.

Die Funktionen können auf eine zwiefache Weise in andere verwandelt, oder auf eine andere Form gebracht werden, indem man dabey entweder die veränderliche Größe beybehalten, oder an ihrer Stelle eine andere einführen kann.

Wenn die veränderliche Größe beybehalten wird, so wird die Funktion eigentlich nicht verändert, sondern nur auf eine andere Art ausgedruckt; so wie aus der Algebra bekannt ist, daß man eine und dieselbe Größe auf mancherley Weise darstellen kann. Beyspiele von dergleichen Verwandlungen sind, wenn man anstatt der Funktion $2 - 3z + zz$, diese, $(1 - z)(2 - z)$; oder $(a + z)^3$ anstatt $a^3 + 3aaz + 3azz + z^3$; oder $\frac{a}{a - z} + \frac{a}{a + z}$ anstatt $\frac{2aa}{aa - zz}$; oder $\sqrt{(1 + zz)} + z$ anstatt $\frac{1}{\sqrt{(1 + zz)} - z}$ setzt: denn so verschieden auch die Gestalt dieser Ausdrücke ist, so bedeuten sie doch vollkommen ein und dasselbe. Oft ist aber die eine Art des Ausdrucks zu der gegenwärtigen Absicht passender als ein anderer gleichbedeutender, und man muß deswegen jedesmal den schicklichsten wählen.

Die andere Art der Verwandlung der Funktionen, wobey man anstatt der veränderlichen Größe z eine andere y nimmt, welche zu z ein gegebenes Verhältniß hat, nennt man die Verwandlung durch Substitution; und ihrer muß man sich auf die Weise bedienen, daß die gegebene Funktion dadurch kürzer und bequemer ausgedruckt wird. So erhält man, wenn man in der Funktion von z, $a^4 - 4a^3z + 6aazz - 4az^3 + z^4$, für $a - z$ die veränderliche Größe y setzt, die viel einfachere Funktion y^4 von y; und wenn man in der irrationalen Funktion $\sqrt{(aa + zz)}$ von z, $z = \frac{aa - yy}{2y}$ nimmt, an ihrer Stelle die rationale Funktion $\frac{aa + yy}{2y}$ von y. Von dieser letzten Art der Verwandlung der Funktionen soll in dem folgenden, so wie von der, wobey keine Substitution statt findet, in dem gegenwärtigen Capitel gehandelt werden.

§. 28.

Die ganzen Funktionen werden öfters sehr vortheilhaft in ihre Faktoren aufgelöset, und in ein Produkt verwandelt.

Wenn eine ganze Funktion in ihre Faktoren aufgelöset wird, so fällt ihre Beschaffenheit weit leichter in die Augen; denn man sieht alsdann sogleich ein, in was für Fällen ihr Werth $= 0$ wird. Verwandelt man z. B. diese Funktion von z, $6 - 7z + z^3$ in das Produkt $(1 - z)(2 - z)(3 + z)$: so ist sogleich offenbar, daß sie in drey Fällen $= 0$ wird; nemlich wenn $z = 1$, $z = 2$, und $z = -3$ ist, welches man aus dem Ausdrucke $6 - 7z + z^3$ selbst weit schwerer erkennt. Man nennt aber dergleichen Faktoren, worin bloß die erste Potestät von z vorkommt, zum Unterschiede von den zusammengesetzten Faktoren, welche das Quadrat, oder den Cubus, oder irgend eine andere höhere Potestät von z enthalten, einfache Faktoren;

ren; und ihre allgemeine Form ist $f + gz$, so wie der allgemeine Ausdruck der doppelten Faktoren $f + gz + hzz$, und der dreyfachen, $f + gz + hzz + iz^3$ u. s. w. *) Dabey fällt in die Augen, daß ein jeder doppelter Faktor zwey einfache, ein jeder dreyfache Faktor drey einfache u. s. w. in sich fasse. Wenn der Exponent der höchsten Potestät von z in einer ganzen Funktion von $z = n$ ist: so enthält die Funktion n einfache Faktoren; und sind unter ihren Faktoren etwa auch doppelte oder dreyfache u. s. w. so läßt sich die Anzahl ihrer Faktoren nach dem Angeführten ebenfalls beurtheilen.

*) Wenn ein doppelter Faktor zwey einander gleiche einfache Faktoren hat, so heißt er ein quadratischer Faktor, wie $aa + 2az + zz$ §. 150, und $\frac{xx}{ii}$ §. 155.

§. 29.

Man findet die einfachen Faktoren einer jeden ganzen Funktion Z von z, wenn man die Funktion Z gleich o setzt, und aus dieser Gleichung die Wurzeln von z zu erhalten sucht; indem eine jede Wurzel von z einen einfachen Faktor der Funktion Z giebt.

Ist daher von der Gleichung $Z = o$ irgend eine Wurzel $z = f$; so ist $z - f$ ein Divisor und folglich auch ein Faktor der Funktion Z. Sucht man also alle Wurzeln der Gleichung $Z = o$, nemlich $z = f$, $z = g$, $z = h$, u. s. w.: so wird dadurch die Funktion Z in ihre Faktoren aufgelöset, und in das Produkt $(z - f)(z - g)(z - h)$ ꝛc. verwandelt; wobey indeß zu merken ist, daß man dies Produkt, wenn der Coefficient der höchsten Potestät von z nicht $= + 1$ ist, noch durch diesen Coefficienten multipliciren muß. Ist z. B. $Z = Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} +$ ꝛc. so ist $Z =$

$A(z-f)(z-g)(z-h)$ ꝛc. *) Ist hingegen $Z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Cz^4 +$ u. s. f. und sind die Wurzeln der Gleichung $Z = o$, f; g; h; i; u. s. w. so ist $Z = A\left(1 - \frac{z}{f}\right)\left(1 - \frac{z}{g}\right)\left(1 - \frac{z}{h}\right)$ u. s. f. **) Auch erhellet hieraus, daß umgekehrt $Z = o$ werden muß, wenn $z - f$, oder $1 - \frac{z}{f}$ ein Faktor der Funktion Z ist, und man f anstatt z setzt. Denn ist $z = f$, so wird ein Faktor von der Funktion Z, $z - f$ oder $1 - \frac{z}{f}$, und also auch die Funktion selbst $= o$.

*) Aus

$$Z = Az^n + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + Dz^{n-3} + \text{ꝛc.}$$

folgt,

$$Z = A\left(z^n + \frac{B}{A}z^{n-1} + \frac{C}{A}z^{n-2} + \frac{D}{A}z^{n-3} + \text{ꝛc.}\right)$$

Verwandelt man also

$$z^n + \frac{B}{A}z^{n-1} + \frac{C}{A}z^{n-2} + \frac{D}{A}z^{n-3}\ \text{ꝛc.}$$

in das Produkt

$$(z-f)(z-g)(z-h)(z-i)(z-k).\ \text{ꝛc.}$$

so wird

$$Z = A(z-f)(z-g)(z-h)\ \text{ꝛc.}$$

**) Aus

$$Z = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ꝛc.}$$

folgt

$$Z = A\left(1 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A}z^2 + \frac{D}{A}z^3 + \frac{E}{A}z^4 + \text{ꝛc.}\right.$$

Verwandelt man also

$$1 + \frac{B}{A}z + \frac{C}{A}z^2 + \frac{D}{A}z^3 + \frac{E}{A}z^4 + \text{ꝛc.}$$

in das Produkt

$$\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right)\left(1-\frac{z}{i}\right)\left(1-\frac{z}{k}\right) \text{ꝛc.}$$

so wird

$$Z = A\left(1-\frac{z}{f}\right)\left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{h}\right) \text{ꝛc.}$$

§. 30.

Die einfachen Faktoren sind entweder reell oder imaginär; und wenn die Funktion Z imaginäre Faktoren hat, so ist ihre Anzahl immer eine gerade Zahl.

Denn da die einfachen Faktoren aus den Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ entspringen: so müssen die reellen Wurzeln reelle Faktoren und die imaginären Wurzeln imaginäre Faktoren geben. Und da die Anzahl der imaginären Wurzeln einer jeden Gleichung eine gerade Zahl ist: so muß die Funktion Z entweder gar keine, oder zwey, oder vier oder sechs, u. s. w. imaginäre Faktoren haben. Hat nun die Funktion Z nur zwey imaginäre Faktoren, so ist das Produkt derselben ein reelles Produkt, und giebt also einen reellen doppelten Faktor. Denn setzt man das Produkt aus allen reellen Faktoren $= P$, so ist das Produkt der beyden imaginären Faktoren $= \frac{Z}{P}$, und also reell. Auf eben die Art ist das Produkt aller imaginären Faktoren, wenn die Funktion Z deren viere, oder sechs, oder achte u. s. w. hat, immer reell; weil es jedesmal dem Quotienten gleich ist, den man aus der Division der Funktion Z durch das Produkt aller reellen Faktoren erhält.

§. 31.

Wenn Q ein reelles Produkt aus vier einfachen imaginären Faktoren ist, so kann man dasselbe in zwey doppelte reelle Faktoren zerfällen.

Denn es hat alsdann Q die Form $z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$; und sollte es nicht in zwey doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden können, so müßte es ein Produkt aus zwey doppelten imaginären Faktoren seyn. Ferner wäre die Form dieser beyden doppelten imaginären Faktoren

$$zz - 2(p + q\sqrt{-1})z + r + s\sqrt{-1}$$
$$zz - 2(p - q\sqrt{-1})z + r - s\sqrt{-1}$$

denn es lassen sich keine andere imaginäre Formen gedenken, deren Produkt reell und $= z^4 + Az^3 + Bz^2 + Cz + D$ wäre. Aus diesen zwey doppelten imaginären Faktoren erhielte man aber folgende vier einfache imaginäre Faktoren von Q,

$$1.\ z - (p + q\sqrt{-1}) + \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})}$$
$$2.\ z - (p + q\sqrt{-1}) - \sqrt{(pp + 2pq\sqrt{-1} - qq - r - s\sqrt{-1})}$$
$$3.\ z - (p - q\sqrt{-1}) + \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})}$$
$$4.\ z - (p - q\sqrt{-1}) - \sqrt{(pp - 2pq\sqrt{-1} - qq - r + s\sqrt{-1})}$$

Und multiplicirte man nun den ersten und dritten dieser Faktoren mit einander, und setzte dabey der Kürze wegen $t = pp - qq - r$, und $u = 2pq - s$: so erhielte man zum Produkte

$$\begin{aligned} zz &- (2p - \sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})})z + pp + qq \\ &- p\sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})} + \sqrt{(tt + uu)} \\ &- q\sqrt{(-2t + 2\sqrt{(tt + uu)})} \end{aligned}$$

welches allerdings ein reelles Produkt ist. Eben so ist das Produkt aus dem zweyten und vierten Faktor reell, und =

$$\begin{aligned} zz &- (2p + \sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})})z + pp + qq \\ &+ p\sqrt{(2t + 2\sqrt{(tt + uu)})} + \sqrt{(tt + uu)} \\ &+ q\sqrt{(-2t + 2\sqrt{(tt + uu)})} \end{aligned}$$

Auf diese Weise ist das Produkt Q, wovon angenommen wurde, daß es nicht in zwey doppelte reelle Faktoren auf-

gelöset

gelöset werden könne, wirklich in dergleichen aufgelöset worden. *)

*) Wenn man $t = pp - qq - r$, und $u = 2pq - s$ setzt, so erhalten die einfachen imaginären Faktoren von Q folgende Gestalt.

1. $z - (p + q\sqrt{-1}) + \sqrt{(t + u\sqrt{-1})}$
2. $z - (p + q\sqrt{-1}) - \sqrt{(t + u\sqrt{-1})}$
3. $z - (p - q\sqrt{-1}) + \sqrt{(t - u\sqrt{-1})}$
4. $z - (p - q\sqrt{-1}) - \sqrt{(t - u\sqrt{-1})}$

Setzt man nun ferner

$\sqrt{(t + u\sqrt{-1})} = a + b\sqrt{-1}$ und $\sqrt{(t - u\sqrt{-1})}$
$= a - b\sqrt{-1}$

so erhält man, wenn man die Quadrate nimmt,

$$t + u\sqrt{-1} = aa + 2ab\sqrt{-1} - bb$$
$$t - u\sqrt{-1} = aa - 2ab\sqrt{-1} - bb$$

folglich

$$t = aa - bb, \text{ und } u = 2ab.$$

Dieses giebt

$$(aa + bb)^2 = (aa - bb)^2 + 4aabb = tt + uu$$

woraus $aa + bb = \sqrt{(tt + uu)}$ wird. Nunmehr ist also

$aa = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{(tt + uu)}$
$bb = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{(tt + uu)}$ und folglich
$a = \sqrt{(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{(tt + uu)})}$ und
$b = \sqrt{(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\sqrt{(tt + uu)})}$.

Wenn man daher den Größen a, b, aa, bb, die hier gefundenen Werthe beylegt, so sind selbige reell, und überdies hat man dabey $\sqrt{(t + u\sqrt{-1})} = a + b\sqrt{-1}$ und $\sqrt{(t - u\sqrt{-1})} = a - b\sqrt{-1}$. Hierdurch aber werden die einfachen imaginären Faktoren von Q

1. $z - p - q\sqrt{-1} + a + b\sqrt{-1} = z - p + a + (b - q)\sqrt{-1}$
2. $z - p - q\sqrt{-1} - a - b\sqrt{-1} = z - p - a - (b + q)\sqrt{-1}$

$$3.\ z-p+q\sqrt{-1}+a-b\sqrt{-1}=z-p+a-(b-q)\sqrt{-1}$$

$$4.\ z-p+q\sqrt{-1}-a+b\sqrt{-1}=z-p-a+(b+q)\sqrt{-1}$$

Und da das Produkt aus 1. und 3.

$$(z-p+a)^2+(b-q)^2$$

das Produkt aus 2. und 4. aber

$$(z-p-a)^2+(b+q)^2$$

ist, so fällt hieraus auch die Realität dieser Produkte, welche entwickelt die im § geben, in die Augen. Daß $2\sqrt{(\pm\frac{1}{2}t+\sqrt{(tt+uu)})}=\sqrt{(\pm 2t+2\sqrt{(tt+uu)})}$ sey, braucht hier wohl kaum erinnert zu werden.

§. 32.

Wenn eine ganze Funktion Z von z imaginäre Faktoren hat, deren Anzahl übrigens so groß oder so klein seyn kann, als sie will; so kann man allemal je zwey und zwey davon auf eine solche Art mit einander verbinden, daß ihr Produkt reell wird.

Da die Anzahl der imaginären Faktoren immer eine gerade Zahl ist, so kann man sie durch 2n ausdrucken, und aus §. 30 ist bekannt, daß das Produkt aus allen diesen imaginären Faktoren reell ist. Giebt es daher nur zwey imaginäre Faktoren, so ist aus diesem Grunde ihr Produkt nothwendiger Weise reell; und sind der imaginären Faktoren viere, so läßt sich ihr Produkt nach dem vorhergehenden § in zwey doppelte reelle Faktoren von der Form $fzz+gz+h$ verwandeln. Nun läßt sich zwar diese Beweisart nicht auf die höhern Potestäten ausdehnen; indeß verliert dadurch der angeführte Satz nichts von seiner Gewißheit so daß also allezeit anstatt jeder 2n einfachen imaginären Faktoren n doppelte reelle Faktoren erhalten, und daher

jed

jede ganze Funktion von z entweder in reelle einfache oder in reelle doppelte Faktoren aufgelöset werden kann. In der Folge [im neunten Capitel §. 143 — §. 154] werden Funktionen wie $a + bz^n$; $a + bz^n + cz^{2n}$; $a + bz^n + cz^{2n} + dz^{3n}$; u. s. f. wirklich in dergleichen doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden; und fehlt es daher gleich hier an einem strengen Beweise, so wird doch alsdann aller Zweifel verschwinden. *)

*) Da der Satz: Jede ganze rationale Funktion von x, als $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} +$ rc., läßt sich in reelle, einfache entweder oder doppelte, Faktoren auflösen, in der Integral-Rechnung von der größten Wichtigkeit ist, so hat ihn Euler in seinen Recherches sur les racines imaginaires des équations, in der Histoire de l'Academie royale des Sciences & belles Lettres, vom Jahr 1749, durch verschiedene Beweise außer Zweifel zu setzen gesucht. Einen vollständigen Auszug aus diesen Untersuchungen findet man in dem Anhange zu dem gegenwärtigen ersten Theile unter der zweyten Nummer.

§. 33.

Wenn eine ganze Funktion Z für $z = a$ den Werth A, und für $z = b$ den Werth B erhält: so kann dieselbe dadurch, daß man für z Werthe setzt, die zwischen a und b fallen, jeden zwischen A und B liegenden Werth bekommen.

Denn da Z eine einförmige Funktion von z ist, so muß es bey der Substitution eines jeden reellen Werthes für z auch allemal einen reellen Werth bekommen. Da nun Z, wenn man $z = a$ setzt, den Werth A, und wenn man $z = b$ setzt, den Werth B bekömmt, so kann es nicht anders von dem Werthe A zu dem Werthe B, als durch alle zwischen beyden liegenden Werthe, übergehen. Hat also die Glei-

chung

chung $Z - A = 0$ eine reelle Wurzel, und die Gleichung $Z - B = 0$ ebenfalls: so muß auch $Z - C = 0$ eine reelle Wurzel haben, wenn C zwischen A und B liegt. Geben also die Ausdrücke $Z - A$, $Z - B$ einen einfachen reellen Faktor, so muß auch dem Ausdrucke $Z - C$, wofern nur C zwischen A und B fällt, ein einfacher reeller Faktor zukommen.

§. 34.

Wenn der Exponent der höchsten Potestät von z in einer ganzen Funktion Z eine ungerade Zahl $2n + 1$ ist: so hat die Funktion Z zum wenigsten Einen reellen einfachen Faktor.

Z hat in diesem Falle die Form $z^{2n+1} + \alpha z^{2n} + \beta z^{2n-1} + \gamma z^{2n-2} +$ u. s. f. Setzt man nun darin $z = \infty$, so wird $Z = (\infty)^{2n+1} = \infty$, weil alsdann alle folgende Glieder gegen das erste gehalten verschwinden; und es hat also $Z - \infty$ einen einfachen reellen Faktor, nemlich $z - \infty$. Setzt man ferner $z = -\infty$, so wird $Z = (-\infty)^{2n+1} = -\infty$; und es hat daher $Z + \infty$ den einfachen reellen Faktor $z + \infty$. Da also $Z - \infty$ und $Z + \infty$ einen einfachen reellen Faktor haben, so muß auch $Z + C$ ein einfacher reeller Faktor zukommen, wofern C zwischen den Grenzen $+\infty$ und $-\infty$ enthalten, d. h. irgend eine reelle Zahl ist, sie mag nun positiv oder negativ seyn. Setzt man daher $C = 0$, so hat auch die Funktion Z selbst einen einfachen reellen Faktor $z - c$, und c fällt zwischen $+\infty$ und $-\infty$ und ist folglich entweder eine positive oder negative Größe oder $= 0$.

§. 35.

Es hat daher jede ganze Funktion Z, worin der Exponent der höchsten Potestät von z eine ungerade Zahl ist, entweder einen, oder drey, oder fünf, oder sieben u. s. f. reelle einfache Faktoren.

Denn da bewiesen worden ist, [§. 34.] daß die Funktion Z allemal Einen reellen einfachen Faktor $z - c$ hat, so nehme man an, daß ihr auch außerdem der Faktor $z - d$ zukomme. Dividirt man nun die Funktion Z, in welcher die höchste Potestät von z, z^{2n+1} ist, durch das Produkt $(z - c)(z - d)$ so ist die höchste Potestät des Quotienten $= z^{2n-1}$, und da dient der ungerade Exponent $2n - 1$ zum Beweise, daß die Funktion Z außer jenen Faktoren noch einen einfachen reellen Faktor hat. Wenn also die Funktion Z mehr als einen reellen einfachen Faktor hat, so hat sie entweder drey, oder, da man auf diesem Wege fortgehen kann, fünfe, oder sieben u. s. f. Es ist also die Anzahl der reellen einfachen Faktoren immer eine ungerade Zahl; und da die Zahl aller einfachen Faktoren $= 2n + 1$ ist, so ist auch hieraus die Anzahl der imaginären Faktoren eine gerade Zahl. *)

*) Dieser Satz kann wegen §. 29. auch auf die Art bewiesen werden, daß man zeigt, daß jede Gleichung, worin der Exponent der höchsten Potestät eine ungerade Zahl ist, also jede Gleichung von der Form

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots + N = 0$$

zum wenigsten eine reelle Wurzel, und wenn sie deren mehrere hat, solche immer in ungerader Anzahl habe. Man setze also

$$x^{2m+1} + Ax^{2m} + Bx^{2m-1} + Cx^{2m-2} + \ldots + N = y$$

und betrachte die krumme Linie, welche durch diese Gleichung ausgedruckt wird. Hier ist offenbar, daß zu jeder Abscisse x nicht mehr als eine Applicate y gehört, und daß, wenn $y = 0$ wird, der Werth der Abscisse x eine Wurzel der gegebenen Gleichung ist. Es wird daher diese Gleichung auch so viel reelle Wurzeln haben, als es Stellen giebt, wo

y very verschwindet, und weil dies da geschieht, wo die krumme Linie die Absciſſen-Linie durchschneidet, so wird die Anzahl der reellen Wurzeln der gegebenen Gleichung der Menge der Punkte gleich seyn, in welchen die krumme Linie die Axe schneidet, worauf man die Absciſſen nimmt. Um nun die Menge dieser Durchschnitts-Punkte zu bestimmen, setze man zuvörderst $x = + \infty$. Alsdann wird $y = \infty^{2m+1} = \infty$, und es liegt daher der Theil der krummen Linie, der zu den unendlich großen positiven Absciſſen gehört, über der Axe, weil seine Applicaten y positiv sind. Nun setze man ferner $x = -\infty$. Dann wird $y = (-\infty)^{2m+1} = -\infty$, und es sind also in diesem Falle die Applicaten negativ, und der zugehörige Theil der krummen Linie liegt unter der Axe. Da nun beyde gedachte Theile der krummen Linie Theile von Einer continuirlichen Linie sind, weil zu jeder Abciſſe x nicht mehr als eine Applicate y gehört: so muß diese Linie nothwendig die Axe irgendwo schneiden, und wenn sie solches in mehrern Punkten thut, so muß die Anzahl dieser Punkte jederzeit eine ungerade Zahl seyn. Hieraus folgt, daß die gegebene Gleichung zum wenigsten eine reelle Wurzel, und wenn sie deren mehrere enthält, solche jederzeit in ungerader Anzahl hat.

§. 36.

Ferner ist die Anzahl der einfachen reellen Faktoren einer jeden Funktion Z, worin der Exponent der höchsten Poteſtät von z eine gerade Zahl 2n ist, entweder zwey oder viere oder sechs u. s. f.

Denn nimmt man an, daß die Funktion Z, 2m + einfache reelle Faktoren habe: so erhält man, wenn man die Funktion durch das Produkt aller dieser Faktoren dividirt, einen Quotienten, worin die höchste Poteſtät von $z = z^{2n-2m-1}$, und also eine Poteſtät mit einem ungeraden Exponenten ist. Es muß also die Funktion Z außer jenen Faktoren nothwendig noch Einen reellen einfachen

Fakt

Faktor haben, und die Anzahl aller Faktoren wird also zum wenigsten $= 2m + 2$, und folglich eine gerade Zahl, und die Anzahl aller imaginären einfachen Faktoren ebenfalls eine gerade Zahl seyn. Es ist also die Anzahl aller imaginären einfachen Faktoren einer jeden ganzen Funktion, so wie auch schon vorhin [§. 30] bewiesen worden ist, eine gerade Zahl. *)

*) Auch dieser Satz läßt sich auf eine der beym vorhergehenden §. berührten ähnliche Art, oder so beweisen, daß man zeigt, daß die Gleichung

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots + N = 0$$

entweder gar keine oder eine gerade Anzahl reeller Wurzeln hat. Denn setzt man

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots + N = y$$

und betrachtet man die krumme Linie, welche durch diese Gleichung ausgedruckt wird: so wird y, sowohl wenn man $x = +\infty$, als wenn man $x = -\infty$ nimmt, $= +\infty$, und es liegt daher nicht nur der Theil der Curve, welcher zu den unendlich großen positiven, sondern auch der, welcher zu den unendlich großen negativen Abscissen gehört, über der Axe. Es kann daher die durch die gegebene Gleichung ausgedruckte krumme Linie die Axe gar nicht schneiden; aber wenn sie es irgendwo thut, und dadurch in die Gegend unter der Axe kommt, so muß sie es auch jederzeit noch einmal thun, um dadurch wieder in die Gegend über der Axe zu kommen. Es giebt daher hier entweder gar keinen oder eine gerade Anzahl von Durchschnitts-Punkten, und es hat folglich auch die Gleichung

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots + N = 0$$

entweder gar keine oder eine gerade Anzahl reeller Wurzeln.

§. 37.

Wenn in einer ganzen Funktion Z der Exponent der höchsten Potestät von z eine gerade Zahl ist, und die absolute oder beständige Größe das Zeichen — vor sich hat: so hat die Funktion Z zum wenigsten zwey einfache reelle Faktoren.

Eine solche Funktion hat diese Form: $z^{2n} \pm \alpha z^{2n-1} \pm \beta z^{2n-2} \ldots \pm rz - A$. Setzt man nun $z = \infty$ so wird [§. 34] $Z = \infty$, und setzt man $z = o$, so wird $Z = - A$. Es hat also $Z - \infty$ den einfachen reellen Faktor $z - \infty$, und $Z + A$ den einfachen reellen Faktor $z - o$; und da nun o zwischen die Grenzen $- \infty$ und $+ A$ fällt, so muß auch $Z + o$ den einfachen reellen Faktor $z - c$ haben, wobey c zwischen o und ∞ enthalten ist. Setzt man nun ferner $z = - \infty$, so wird $Z = \infty$; und da alsdann $Z - \infty$ den Faktor $z + \infty$, und $Z + A$ den Faktor $z + o$ hat: so muß $Z + o$ auch einen einfachen reellen Faktor $z + d$ haben, wobey d zwischen o und ∞ fällt, und daraus ist das zu Beweisende klar. Wenn also Z eine Funktion von der beschriebenen Art ist, so muß die Gleichung $Z = o$ zum wenigsten zwey reelle Wurzeln, eine positive und eine negative, haben. So hat z. B. die Gleichung $z^4 + \alpha z^3 + \beta z^2 + \gamma z - aa = o$ zwey reelle Wurzeln, und die eine davon ist positiv und die andere negativ. *)

*) Vermittelst einer geometrischen Construction kann man sich von diesem Satze auf folgende leichte Art überzeugen. Man setze

$$x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots - OO = y$$

so erstreckt sich die Curve, welche durch diese Gleichung ausgedruckt wird, nach der Anmerkung zum vorhergehenden §. auf beyden Seiten über der Axe ins Unendliche. Setzt man nun $x = o$, so wird $y = - OO$, und der Punkt der Curve, der zu $x = o$ gehört, liegt also unter der Axe, und es muß daher die Curve, um sich von diesem Punkte auf gedachten beyden Seiten über der Axe continuirlich ins Unendliche erstrecken zu können, auch auf beyden Seiten diesel dieses Punktes die Axe schneiden, um in die Gegend über ihr zu kommen. Da nun jeder Durchschnitts-Punkt eine reelle Wurzel der gegebenen Gleichung giebt, und von den gefundenen zwey Durchschnitts-Punkten der eine zu einer positiven und der andere zu einer negativen Abscisse führt, so ist klar, daß die gegebene Gleichung zum wenigsten zwey reelle Wurzeln, eine positive und eine negative hat.

Dieser Beweis, so wie auch die in den Anmerkungen zu den beyden vorhergehenden §§. enthaltenen, sind aus Eulers beym 32sten §. angeführten Recherches sur les racines imaginaires des équations entlehnt.

§. 38.

Wenn die veränderliche Größe z in einer gebrochenen Funktion eben so viel oder noch mehr Dimensionen im Zähler als im Nenner hat: so läßt sich die Funktion in zwey Theile auflösen, davon der eine eine ganze, der andere aber eine gebrochene Funktion ist, wo die veränderliche Größe z im Zähler weniger Dimensionen hat als im Nenner.

Denn wenn der Exponent der höchsten Potestät von z im Zähler größer ist als im Nenner, so darf man nur den Zähler auf die gewöhnliche Art durch den Nenner dividiren, und die Division abbrechen, wenn bey der Fortsetzung derselben in den Quotienten negative Exponenten von z kommen würden. Der so gefundene Quotient besteht aus einem ganzen und einem gebrochenen Theile, der Zähler des letztern enthält z mit weniger Dimensionen als der Nenner, und beyde Theile sind zusammengenommen der gegebenen Funktion gleich. Wäre z. B. die gebrochene Funktion

$\frac{1+z^4}{1+zz}$ gegeben, so lösete man dieselbe durch die Division auf folgende Art auf:

$$\begin{array}{r|l|l} zz+1 & z^4+1 & zz-1+\frac{2}{zz+1} \\ & \underline{z^4+zz} & \\ & \quad -zz+1 & \\ & \quad \underline{-zz-1} & \\ & \qquad +2 & \end{array}$$

und es ist folglich

$$\frac{1+z^4}{1+zz} = zz - 1 + \frac{2}{1+zz}.$$

Man kann solche gebrochene Funktionen, in welchen die veränderliche Größe z im Zähler mehr Dimensionen hat als im Nenner, nach dem Beyspiele der Arithmetik, welche die Brüche in unächte und ächte theilt, entweder ebenfalls unächte Brüche oder unächte gebrochene Funktionen nennen, und sie dadurch von den ächten gebrochenen Funktionen oder solchen unterscheiden, wo die veränderliche Größe im Zähler weniger Dimensionen hat als im Nenner. Es kann also jede unächte gebrochene Funktion in eine ganze und in eine ächte gebrochene Funktion aufgelöset werden, und diese Auflösung geschieht auf dem Wege der gemeinen Division.

§. 39.

Wenn der Nenner einer gebrochenen Funktion ein Produkt aus zwey Faktoren ist, die keinen gemeinschaftlichen Divisor haben: so kan man diese Funktion in zwey Brüche auflösen, deren Nenner jenen beyden Faktoren gleich sind.

Ungeachtet diese Auflösung eben so wohl bey den unächten als bey den ächten gebrochenen Funktionen statt findet; so haben wir doch dieselbe vorzüglich bey den ächten

gebro-

gebrochenen Funktionen zu betrachten. Zerfällt man aber den Nenner einer solchen Funktion in zwey Faktoren, die keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, so läßt sich die Funktion selbst in zwey andere ächte gebrochene Funktionen verwandeln, deren Nenner den Faktoren des Nenners der gegebenen Funktion gleich sind. Ueberdies giebt es bey den ächten gebrochenen Funktionen nicht mehr als Einen Weg, diese Auflösung zu verrichten; wovon man sich durch ein Beyspiel noch deutlicher als durch allgemeine Schlüsse überzeugen kann. Es sey also die gebrochene Funktion $\frac{1 - 2z + 3zz - 4z^3}{1 + 4z^4}$ gegeben. Da der Nenner dieser Funktion $1 + 4z^4$ dem Produkte $(1 + 2z + 2zz)(1 - 2z + 2zz)$ gleich ist: so läßt sich die Funktion in zwey Brüche auflösen, davon der eine $1 + 2z + 2zz$, und der andere $1 - 2z + 2zz$ zum Nenner hat. Um diese Brüche zu finden, setze man, da sie ächte Brüche sind, die Zähler derselben, und zwar in der Ordnung, worin die Nenner angeführt worden sind, $\alpha + \beta z$, und $\gamma + \delta z$. Alsdann ist

$$\frac{1 - 2z + 3zz - 4z^3}{1 + 4z^4} = \frac{\alpha + \beta z}{1 + 2z + 2zz} + \frac{\gamma + \delta z}{1 - 2z + 2zz}$$

Addirt man nun diese beyden Brüche, so erhält man für die Summe

zum Zähler	und zum Nenner
$\alpha - 2\alpha z + 2\alpha zz$ $+ \beta z - 2\beta zz + 2\beta z^3$ $\gamma + 2\gamma z + 2\gamma zz$ $+ \delta z + 2\delta zz + 2\delta z^3$	$1 + 4z^4$

Da nun der Nenner dieser Summe dem Nenner der gegebenen gebrochenen Funktion gleich ist, so müssen auch die Zähler von beyden gleich werden; und da es hier eben so viel unbekannte Größen giebt, als Glieder, die einander gleich gesetzt werden müssen, so kann solches allerdings, aber auch nur auf eine einzige Art geschehen. Man erhält nemlich die vier Gleichungen

1. $\alpha + \gamma = 1$

2. $-2\alpha + \beta + 2\gamma + \delta = -2$

3. $2\alpha - 2\beta + 2\gamma + 2\delta = 3$, und

4. $2\beta + 2\delta = -4$;

und da $\alpha + \gamma = 1$, und $\beta + \delta = -2$ ist, so geben die zweyte und dritte Gleichung (wenn man -2 statt $\beta + \delta$ in die zweyte, und 2 statt $2\alpha + 2\gamma$ in die dritte Gleichung bringt,) $\alpha - \gamma = 0$, und $\delta - \beta = \frac{1}{2}$. Hieraus aber wird $\alpha = \frac{1}{2}$; $\gamma = \frac{1}{2}$; $\beta = -\frac{5}{4}$; $\delta = -\frac{3}{4}$, und folglich die gegebene gebrochene Funktion $\frac{1 - 2z + 3zz - 4z^3}{1 + 4z^4}$ gleich folgenden beyden $\frac{\frac{1}{2} - \frac{5}{4}z}{1 + 2z + 2zz} + \frac{\frac{1}{2} - \frac{3}{4}z}{1 - 2z + 2zz}$. Es ist leicht einzusehen, daß diese Auflösung allemal müsse angestellt werden können, weil allemal so viel unbekannte Größen angenommen werden, als erforderlich sind, um den Zähler zu entwickeln. Wenn aber die gedachten Faktoren des Nennners der gegebenen Funktion keine Prim-Größen zu einander sind, oder einen gemeinschaftlichen Divisor haben: so läßt sich aus dem, was in der gemeinen Arithmetik von den Brüchen gelehret wird, einsehen, daß eine solche Auflösung nicht statt findet. *)

*) Was Euler hier gesagt hat, kann allerdings hinreichen; indeß habe ich, da es vielleicht manchem nicht unangenehm ist, diesen Gegenstand ganz allgemein behandelt zu finden, das in dieser Rücksicht Nöthige im Anhange beygebracht.

gebracht. Man findet es daselbst unter der zweyten Nummer, unter dem Titel: Zusatz zu §. 39.

§. 40.

Es kann daher eine jede gebrochene Funktion $\frac{M}{N}$ in so viel einfache Brüche von der Form $\frac{A}{p - qz}$ aufgelöset werden, als der Nenner N einfache und einander ungleiche Faktoren hat.

Es stellt dieser Bruch $\frac{M}{N}$ eine jede ächte gebrochene Funktion vor, so daß M und N ganze Funktionen von z sind, und die höchste Potestät von z in M niedriger ist als in N. Wird nun der Nenner N in seine einfachen Faktoren zerfällt, und sind dieselben einander ungleich: so kann die Funktion $\frac{M}{N}$ in so viel Brüche aufgelöset werden, als N einfache Faktoren enthält; weil ein jeder Faktor der Nenner eines solchen Partial-Bruchs wird. Ist daher $p - qz$ ein Faktor von N, so ist er auch der Nenner eines der Partial-Brüche von $\frac{M}{N}$; und da z in dem Zähler dieses Bruchs weniger Dimensionen haben muß, als in dem Nenner, so muß daher der Zähler nothwendiger Weise eine beständige Größe seyn. Es erwächst also aus jedem einfachen Faktor $p - qz$ des Nenners N ein einfacher Bruch von der Form $\frac{A}{p - qz}$, und die Summe aller dieser Brüche ist der gegebenen gebrochenen Funktion $\frac{M}{N}$ gleich.

Exempe

Es sey die Funktion $\frac{1 + zz}{z - z^3}$ gegeben. Da hier die einfachen Faktoren des Nenners, z, $1 - z$, $1 + z$, sind, so läßt sich diese Funktion in die drey einfachen Brüche $\frac{A}{z} + \frac{B}{1 - z} + \frac{C}{1 + z} = \frac{1 + zz}{z - z^3}$ auflösen, wo die beständigen Zähler A, B und C zu bestimmen sind. Bringt man diese Brüche auf eine gemeinschaftlichen Nenner, der $z - z^3$ ist: so muß die Summe ihrer Zähler $= 1 + zz$ seyn; und daher entsteht die Gleichung

$$\left.\begin{array}{l} A + Bz - Azz \\ + Cz + Bzz \\ - Czz \end{array}\right\} = 1 + 0z + zz$$

und aus dieser Gleichung ergeben sich wieder eben so viel andere, als man unbekannte Größen in A, B, und C hat. Es ist nemlich

1. $A = 1$
2. $B + C = 0$
3. $-A + B - C = 1.$

Hieraus ergiebt sich $B - C = 2$; $A = 1$; $B = 1$; $C = -1$; und die Funktion $\frac{1 + zz}{z - z^3}$ ist also gleich $\frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z}$.

Daß man auf eine ähnliche Art bey einer jeden Anzahl von einfachen und einander ungleichen Faktoren in N verfahren, und den Bruch $\frac{M}{N}$ jedesmal in eben so viel einfache Brüche auflösen könne, als N einfache Faktoren enthält, läßt sich leicht begreifen: wenn aber einige dieser Faktoren einander gleich sind, so ist ein anderer Weg nöthig, von welchem nachher [§. 42. f.] geredet werden soll.

§. 41.

§. 41.

Da also ein jeder einfacher Faktor des Nenners N einen einfachen Bruch zur Auflösung der Funktion $\frac{M}{N}$ an die Hand giebt: so frägt sich, wie man, wenn man einen einfachen Faktor des Nenners N kennt, den dazu gehörigen einfachen Bruch findet?

Es sey $p - qz$ ein einfacher Faktor von N, so daß $N = (p - qz)\,S$, und S eine ganze Funktion von z sey. Setzt man nun den Bruch, der aus dem Faktor $p - qz$ erwächst, $= \frac{A}{p - qz}$, und den Bruch, der aus dem andern Faktor des Nenners S entspringt $= \frac{P}{S}$, so daß nach §. 39. $\frac{M}{N} = \frac{A}{p-qz} + \frac{P}{S} = \frac{M}{(p-qz)S}$: so ist $\frac{P}{S} = \frac{M - AS}{(p - qz)\,S}$ wo nothwendig $M - AS$ durch $p - qz$ theilbar seyn muß, weil die ganze Funktion P dem daher sich ergebenden Quotienten gleich ist. Setzt man also $z = \frac{p}{q}$ und zwar auch in M und in S, so wird $M - AS = 0$, folglich $A = \frac{M}{S}$ u. auf diese Art ist also der Zähler A des Bruchs $\frac{A}{p - qz}$ gefunden.

Macht man aus einem jeden einfachen Faktor des Nenners N, vorausgesetzt, daß keine darunter gleich sind, dergleichen Brüche, so ist die Summe derselben der gegebenen Funktion $\frac{M}{N}$ gleich.

Exempel.

Wenn man z. B. in dem vorhergehenden Exempel $\frac{1 + zz}{z - z^3}$, wo $M = 1 + zz$, und $N = z - z^3$ ist, z als einen einfachen Faktor annimmt, so ist $S = 1 - zz$, und der Zähler des einfachen Bruchs $\frac{A}{z}$, den z an die Hand giebt, $A = \frac{1 + zz}{1 - zz} = 1$, wenn man $z = 0$ setzt; und diesen Werth erhält man dadurch, daß man den einfachen Faktor, der hier selbst z ist, $= 0$ setzt. Eben so wird, wenn man den einfachen Faktor des Nenners $1 - z$ nimmt, wodurch $S = z + zz$ wird, $A = \frac{1 + zz}{z + zz}$, für $1 - z, = 0$: also $A = 1$, und der Bruch, der aus dem Faktor $1 - z$ entspringt, $= \frac{1}{1 - z}$. Der dritte Faktor $1 + z$ endlich giebt, da dadurch $S = z - zz$, und $A = \frac{1 + zz}{z - zz}$, für $1 + z = 0$, oder $z = -1$, wird, $A = -1$, und den einfachen Bruch $= \frac{-1}{1 + z}$. Man findet also auf diesem Wege eben so wie vorhin [§. 40.] $\frac{1 + zz}{z - z^3} = \frac{1}{z} + \frac{1}{1 - z} - \frac{1}{1 + z}$.

§. 42.

Eine gebrochene Funktion von der Form $\frac{P}{p - qz^n}$, in welcher die höchste Potestät von z in dem Zähler P eine niedrigere Potestät ist, als die höchste Potestät eben dieser z in dem Nenner $(p - qz)^n$, kann in Partial-Brüche von der Form $\frac{A}{(p - qz)^n} + \frac{B}{(p - qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p - qz)^{n-2}}$ $\ldots\ldots + \frac{K}{p - qz}$ verwandelt werden, deren Zähler insgesammt beständige Größen sind.

Da die höchste Potestät von z in dem Zähler P eine niedrigere Potestät als z^n ist, so muß sie z^{n-1} seyn, und also P die Form haben:

$$\alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3 + \ldots\ldots + K z^{n-1},$$

wo die Anzahl aller Glieder $= n$, und außerdem P dem Zähler der Summe aller gedachten Partial-Brüche, nachdem man dieselben zuvor auf den gemeinschaftlichen Nenner $(p - qz)^n$ gebracht hat, oder $A + B(p - qz) + C(p - qz)^2 + D(p - qz^3 + \ldots\ldots + (p - qz)^{n-1} = \alpha + \beta z + \gamma zz + \delta z^3 + \ldots\ldots + K z^{n-1}$ ist. In dieser Gleichung ist aber die höchste Potestät von z auf beyden Seiten dieselbe, nemlich z^{n-1}, und überdies hat man darin eben so viel unbekannte Größen $A, B, C, D \ldots\ldots K$ (in allen n) als man Glieder gleich setzen muß. Man kann daher die beständigen Größen A, B, C u. s. w. auf die Art bestimmen, daß die ächte gebrochene Funktion $\frac{P}{(p - qz)^n} = \frac{A}{(p - qz)^n} + \frac{B}{(p - qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p - qz)^{n-2}} + \frac{D}{(p - qz)^{n-3}} + \ldots + \frac{K}{p - qz}$ wird; und die sogleich folgenden §. §. werden diese Bestimmung auf eine sehr leichte Art verrichten lehren.

§. 43.

Wenn der Nenner der gebrochenen Funktion $\frac{M}{N'}$ $(p - qz)^2$ zum einfachen Faktor hat, so lassen sich die Partial-Brüche, die aus diesem Faktor entspringen, auf folgende Art finden.

Es ist in dem Vorhergehenden [§. 40. 41.] gezeigt worden, wie man die Partial-Brüche findet, die aus den einfachen Faktoren des Nenners entspringen, wenn alle diese

Fakto-

Faktoren ungleich sind; jetzt nehme man an, daß zwey von diesen Faktoren gleich seyen, oder man betrachte $(p-qz)^2$ als einen Faktor des Nenners N. Aus diesem Faktor entspringen nach dem vorhergehenden §. die Partial-Brüche $\frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz}$. Nun sey $N = (p-qz)^2 S$, so wird $\frac{M}{N} = \frac{M}{(p-qz)^2 S} = \frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz} + \frac{P}{S}$, wenn $\frac{P}{S}$ alle die einfachen Brüche zusammengenommen bedeutet, die aus dem Faktor S des Nenners N entspringen. Dann ist $\frac{P}{S} = \frac{M - AS - B(p-qz)S}{(p-qz)^2 S}$, und

$$P = \frac{M - AS - B(p-qz)S}{(p-qz)^2} = \text{einer ganzen Funktion,}$$

und $M - AS - B(p-qz)S$ durch $(p-qz)^2$ theilbar. Es sey zuvörderst durch $p - qz$ theilbar, so wird der ganze Ausdruck $M - AS - B(p-qz)S$ verschwinden, wenn man $p - qz = o$, oder $z = \frac{p}{q}$ setzt. Setzt man also allenthalben $\frac{p}{q}$ anstatt z, so wird $M - AS = o$, und folglich $A = \frac{M}{S}$, oder es giebt der Bruch $\frac{M}{S}$, wenn man darin allenthalben $\frac{p}{q}$ anstlt z setzt, den Werth der beständigen Größe A. Hat man diesen gefunden, so ist nun auch die Größe $M - AS - B(p-qz)S$ durch $(p-qz)^2$, oder $\frac{M - AS}{p-qz} - BS$ durch $p - qz$ theilbar. Setzt man also allenthalben $z = \frac{p}{q}$, so wird $\frac{M - AS}{p-qz} = BS$, und folg-

lich

lich $B = \frac{M - AS}{(p-qz)S} = \frac{1}{p-qz}\left(\frac{M}{S} - A\right)$; wo aber zu bemerken ist, daß man, da $M - AS$ durch $p - qz$ theilbar ist, diese Theilung vor der Substitution von $\frac{p}{q}$ für z anstellen muß. Oder man setze $\frac{M - AS}{p - qz} = T$, so wird $B = \frac{T}{S}$ wenn man $z = \frac{p}{q}$ annimmt. Hat man nun die Zähler A und B gefunden, so sind die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(p - qz)^2$ des Nenners N entspringen, $\frac{A}{(p-qz)^2} + \frac{B}{p-qz}$.

Erstes Exempel.

Es sey die Funktion $\frac{1 - zz}{zz(1 + zz)}$ gegeben. Da hier das Quadrat zz ein Faktor des Nenners ist, so ist $S = 1 + zz$, und $M = 1 - zz$. Nennt man nun die aus zz entspringende Partial-Brüche $\frac{A}{zz} + \frac{B}{z}$, so wird $A = \frac{M}{S} = \frac{1 - zz}{1 + zz}$, wenn der Faktor $z = 0$ gesetzt wird; folglich $A = 1$. Ferner ist nun $M - AS = -2zz$, welches, durch den einfachen Faktor z dividirt, $T = -2z$ giebt; und hieraus ergiebt sich $B = \frac{T}{S} = \frac{-2z}{1 + zz}$, wenn man $z = 0$ setzt. Es ist daher $B = 0$, und es entspringt folglich aus dem Faktor des Nenners zz bloß dieser eine Partial-Bruch $\frac{1}{zz}$.

Zweytes Exempel.

Es sey die gebrochene Funktion $\frac{z^3}{(1-z)^2(1+z^4)}$ gegeben. Da hier das Quadrat $(1-z)^2$ ein Faktor des Nenners ist, so kann man die Partial-Brüche $= \frac{A}{(1-z)^2} + \frac{B}{1-z}$ setzen. Ferner ist $M = z^3$, und $S = 1 + z^4$; folglich $A = \frac{M}{S} = \frac{z^3}{1+z^4}$, für $1-z=0$, oder $z=1$; also $A = \frac{1}{2}$. Hieraus ergiebt sich weiter $M - AS = z^3 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}z^4 = -\frac{1}{2} + z^3 - \frac{1}{2}z^4$, welches, durch $1+z$ dividirt, $T = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}zz + \frac{1}{2}z^3$, und also $B = \frac{T}{S} = \frac{-1-z-zz+z^3}{2+2z^4}$, für $z=1$, giebt. Es ist also $B = -\frac{1}{2}$, und die gesuchten Partial-Brüche sind $\frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{2(1-z)}$.

§. 44.

Wenn der Nenner N der gebrochenen Funktion $\frac{M}{N}$ den Faktor $(p-qz)^3$ hat: so findet man die aus diesem Faktor entspringenden Partial-Brüche $\frac{A}{(p-qz)^3} + \frac{B}{(p-qz)^2} + \frac{C}{p-qz}$ auf folgende Art.

Man setze $N = (p-qz)^3 S$, und den Bruch, der aus dem Faktor S entspringt, $= \frac{P}{S}$, so ist $P = \frac{M - AS - B(p-qz)S - C(p-qz)^2 S}{(p-qz)^3}$ = einer gan-

zen

zen Funktion. Hier muß zuvörderst der Zähler $M - AS - B(p - qz)S - C(p - qz)^2 S$ durch $p - qz$ theilbar seyn; und setzt man daher $p - qz = 0$, oder $z = \frac{p}{q}$, so wird $M - AS - B(p - qz)S - C(p - qz)^2 S = 0$, und $M - AS = 0$, und folglich $A = \frac{M}{S}$, für $z = \frac{p}{q}$. Hat man auf diese Weise A gefunden, so ist $M - AS$ durch $p - qz$, und wenn man $\frac{M - AS}{p - qz} = T$ setzt, $T - BS - C(p - qz)S$ noch durch $(p - qz)^2$ theilbar. Nimmt man daher $p - qz = 0$, so wird $T - BS - C(p - qz)S = 0$, und $B = \frac{T}{S}$, für $z = \frac{p}{q}$. Ist auf diesem Wege auch B gefunden worden, so setze man $\frac{T - BS}{p - qz} = V$; wo also $V - CS$ durch $q - pz$ theilbar, und daher $V - CS = 0$ werden muß, wenn man $p - qz = 0$ setzt. Es ist daher $C = \frac{V}{S}$, wenn man $z = \frac{p}{q}$ nimmt; und kennt man nun die Zähler A, B und C, so sind die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(p - qz)^3$ des Nenners N entspringen, $\frac{A}{(p - qz)^3} + \frac{B}{(p - qz)^2} + \frac{C}{p - qz}$.

Exempel.

Es sey die gebrochene Funktion $\frac{zz}{(1 - z)^3 (1 + zz)}$ gegeben, und die Partial-Brüche, die aus dem cubischen Faktor $(1 - z)^3$ des Nenners derselben entspringen, seyen $\frac{A}{(1 - z)^3} +$

B

$\frac{B}{(1-z)^2} + \frac{C}{1-z}$. Alsdann ist $M = zz$, und $S = 1 + zz$; und daraus ergiebt sich zuvörderst $A = \frac{zz}{1+zz}$, für $1-z=0$, oder $z=1$; also $A = \frac{1}{2}$. Ferner ist nun hieraus und aus $T = \frac{M - AS}{1-z}$, $T = \frac{\frac{1}{2}zz - \frac{1}{2}}{1-z} = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z$; und daher $B = \frac{-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}z}{1+zz}$, für $z=1$, folglich $B = -\frac{1}{2}$. Endlich ist $V = \frac{T - BS}{1-z} = \frac{T + \frac{1}{2}S}{1-z} = \frac{-\frac{1}{2}z + \frac{1}{2}zz}{1-z} = -\frac{1}{2}z$; folglich $C = \frac{V}{S} = \frac{-\frac{1}{2}z}{1+zz}$, für $z = 1$, also $C = -\frac{1}{4}$. Es sind daher die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(1-z)^3$ des Nenners entspringen, $\frac{1}{2(1-z)^3} - \frac{1}{2(1-z)^2} - \frac{1}{4(1-z)}$.

§. 45.

Wenn der Nenner N der gebrochenen Funktion $\frac{M}{N}$ den Faktor $(p-qz)^n$ hat: so findet man die daraus entspringenden Partial-Brüche $\frac{A}{(p-qz)^n} + \frac{B}{(p-qz)^{n-1}} + \frac{C}{(p-qz)^{n-2}} + \ldots\ldots \frac{K}{p-qz}$ auf folgende Art.

Man setze den Nenner $N = (p-q)z^n Z$, und schließe wie vorhin. Auf diese Art findet man

1. $A = \frac{M}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$, und wenn man nun $P = \frac{M - AZ}{p - qz}$ setzt,

2. $B = \frac{P}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$, und wenn man nun $Q = \frac{P - BZ}{p - qz}$ setzt,

3. $C = \frac{Q}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$, und wenn man nun $R = \frac{Q - CZ}{p - qz}$ setzt,

4. $D = \frac{R}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$, und wenn man nun $S = \frac{R - DZ}{p - qz}$ setzt,

5. $E = \frac{S}{Z}$, für $z = \frac{p}{q}$ u. s. w.

Bestimmt man aber hiernach alle einzelne Zähler, oder die beständigen Größen A, B, C, D, E u. s. w. so werden dadurch auch die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(p - qz)^n$ des Nenners N entspringen, gefunden.

Exempel.

Es sey die gebrochene Funktion $\frac{1 + zz}{z^5 (1 + z^3)}$ gegeben, und die Partial-Brüche, die aus dem Faktor z^5 des Nenners entspringen, seyen $\frac{A}{z^5} + \frac{B}{z^4} + \frac{C}{z^3} + \frac{D}{z^2} + \frac{E}{z}$. Sollen nun nun die beständigen Zähler dieser Brüche gefunden werden, so ist $M = 1 + zz$; $Z = 1 + z^3$; und $\frac{p}{q} = 0$. Man rechne daher auf folgende Art.

Zuvörderst ist hier $A = \frac{M}{Z} = \frac{1 + zz}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich ist $A = 1$.

Nun setze man $P = \frac{M - AZ}{z} = \frac{zz - z^3}{z} = z - zz$; so ist zum andern $B = \frac{P}{Z} = \frac{z - zz}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich ist $B = 0$.

Ferner setze man $Q = \frac{P - BZ}{z} = \frac{z - zz}{z} = 1 - z$; so ist drittens $C = \frac{Q}{Z} = \frac{1 - z}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich ist $C = 1$.

Weiter setze man $R = \frac{Q - CZ}{z} = \frac{-z - z^3}{z} = -1 - zz$; so ist viertens $D = \frac{R}{Z} = \frac{-1 - zz}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich ist $D = -1$.

Endlich setze man $S = \frac{R - DZ}{z} = \frac{-zz + z^3}{z} = -z + zz$; so ist fünftens $E = \frac{S}{Z} = \frac{-z + zz}{1 + z^3}$, für $z = 0$; folglich ist $E = 0$.

Es sind daher die gesuchten Brüche, $\frac{1}{z^5} + \frac{0}{z^4} + \frac{1}{z^3} - \frac{1}{z^2} + \frac{0}{z}$.

§. 46. a.

Wenn daher irgend eine gebrochene rationale Funktion $\frac{M}{N}$ in summirende Theile aufgelöset, und auf die einfachste Art ausgedruckt werden soll: so kann solches auf folgende Weise geschehen.

Man sucht alle einfache Faktoren des Nenners N, sie mögen nun reell oder imaginär seyn; nimmt von denen, die nicht mehr als einmal vorkommen, einen jeden besonders, und entwickelt nach §. 41. den aus ihm entspringenden Partial-Bruch. Kommt ein oder der andere Faktor mehr als einmal vor, so sucht man das Produkt aller einander gleichen Faktoren, welches die Form $(p - qz)^n$ haben wird, und entwickelt die dazu gehörigen Partial-Brüche, nach § 45. Hat man auf diese Art aus den einzelnen einfachen Faktoren des Nenners die daraus entspringenden Partial-Brüche gefunden: so ist das Aggregat derselben der

gege

gegebenen Funktion $\frac{M}{N}$ gleich, wofern sie nicht eine unächte gebrochene Funktion ist. Denn ist sie dies, so muß noch außerdem die ganze Funktion von ihr abgesondert und zu jenen Partial-Brüchen hinzugesetzt werden, wenn der Werth der Funktion $\frac{M}{N}$, auf die einfachste Art ausgedruckt, dargestellt werden soll. Es ist indeß gleich, ob man diese Absonderung der ganzen Funktion vor der Findung der Partial-Brüche oder nach derselben vornimmt. Denn man erhält aus den einzelnen Faktoren des Nenners N eben dieselben Partial-Brüche, man mag den Zähler M selbst oder diesen Zähler um ein Vielfaches von N vermehrt oder vermindert nehmen; so wie solches, wenn man die erklärten Regeln sorgfältig überdenkt, bald in die Augen fällt.

Exempel.

Soll z. B. der Werth der Funktion $\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$ auf die einfachste Art ausgedruckt werden; so nehme man zuerst den nur einmal vorkommenden Faktor $1+z$, welcher $\frac{p}{q}=-1$ giebt. Nun ist hier $M=1$, und $Z=z^3-2z^4+z^5$. Man hat also, um den Bruch $\frac{A}{1+z}$ zu finden, $A=\frac{1}{z^3-2z^4+z^5}$, wenn $z=-1$ gesetzt wird; und folglich ist $A=-\frac{1}{4}$, und der aus $1+z$ entspringende Partial-Bruch $=\frac{-1}{4(1+z)}$. Hierauf nehme man den quadratischen Faktor $(1-z)^2$, der $\frac{p}{q}=1$, $M=1$, und $Z=z^3+z^4$ giebt. Setzt man also die daraus entspringenden Partial-Brüche $= \frac{A}{(1-z)^2} + \frac{B}{1-z}$; so wird $A = \frac{1}{z^3 + z^4}$, wenn man $z = 1$ annimmt; und folglich $A = \frac{1}{2}$. Nun sey $P = \frac{M - \frac{1}{2}Z}{1-z} = \frac{1 - \frac{1}{2}z^3 - \frac{1}{2}z^4}{1-z} = 1 + z + zz + \frac{1}{2}z^3$; so ist $B = \frac{P}{Z} = \frac{1 + z + zz + \frac{1}{2}z^3}{z^3 + z^4}$, wenn man $z = 1$ setzt; folglich $B = \frac{7}{4}$, und die gesuchten Partial-Brüche $= \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)}$. Endlich giebt der dritte cubische Faktor z^3 den Quotienten $\frac{p}{q} = 0$, $M = 1$, und $Z = 1 - z - zz + z^3$. Setzt man daher die dazu gehörigen Partial-Brüche $\frac{A}{z^3} + \frac{B}{z^2} + \frac{C}{z}$; so ist zuvörderst $A = \frac{M}{Z} = \frac{1}{1 - z - zz + z^3}$, wenn man $z = 0$ setzt; folglich $A = 1$. Nun sey $P = \frac{M - Z}{z} = 1 + z - zz$; so ist $B = \frac{P}{Z}$, wenn man $z = 0$ nimmt, und also $B = 1$. Ferner sey $Q = \frac{P - Z}{z} = 2 - zz$; so wird $C = \frac{Q}{Z}$, wenn man $z = 0$ setzt; folglich $C = 2$. Es erhält also die gegebene Funktion $\frac{1}{z^3(1-z)^2(1+z)}$ diese Form: $\frac{1}{z^3} + \frac{1}{z^2} + \frac{2}{z} + \frac{1}{2(1-z)^2} + \frac{7}{4(1-z)} - \frac{1}{4(1+z)}$; denn es kommt hierzu kein ganzer Theil, weil die gegebene Funktion keine unächte Funktion ist.

Drittes