Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Drittes Capitel. Von der Verwandlung der Funktionen durch Substitution.

Drittes Capitel.

Von der Verwandlung der Funktionen durch Substitution.

§. 46. b.

Wenn y irgend eine Funktion von z ist, und z durch eine neue veränderliche Größe x bestimmt wird, so kann auch y durch x bestimmt werden.

Durch die Einführung einer solchen neuen veränderlichen Größe x kann man daher, wenn y eine Funktion von z ist, sowohl y als z bestimmen. Ist z. B. $y = \frac{1 - zz}{1 + zz}$, so wird, wenn man $z = \frac{1 - x}{1 + x}$ setzt, und diesen Werth von z in $\frac{1 - zz}{1 + zz}$ anstatt z bringt, $y = \frac{2x}{1 + xx}$. Setzt man daher irgend einen bestimmten Werth für x, so findet man dadurch nicht nur für z, sondern auch für y einen bestimmten Werth; und der Werth, den man für y erhält, ist zugleich der Werth, welchen y durch z bekommt, wenn man dafür seinen auf diesem Wege gefundenen bestimmten Werth setzt. Nimmt man z. B. $x = \frac{1}{2}$, so wird $z = \frac{1}{3}$, und $y = \frac{4}{5}$; aber eben diesen Werth erhält y auch, wenn man in dem Ausdrucke, $\frac{1 - zz}{1 + zz}$, dem y gleich ist, $z = \frac{1}{3}$ setzt.

Man bedient sich aber dieser Einführung einer neuen veränderlichen Größe in einer doppelten Absicht. Denn einmal schafft man dadurch die Irrationalität weg, wenn sich dergleichen in dem Ausdrucke, worin y durch z bestimmt wird, befindet; und zweytens kann man, wenn das Verhältniß zwischen y und z in einer Gleichung von einem so hohen Grade gegeben wird, daß man daraus keine entwickelte y gleiche Funktion von z abzuleiten im Stande ist, durch die Einführung einer andern veränderlichen Größe x aus der gegebenen eine andre Gleichung machen, aus welcher sich y und z bequem finden lassen. Schon hieraus erhellet der außerordentliche Nutzen dieser Substitution; es wird aber derselbe durch das Folgende noch viel deutlicher dargestellt werden.

§. 47.

Wenn $y = \sqrt{(a + bz)}$; so findet man die neue veränderliche Größe x, wodurch sowohl z als y rational ausgedruckt werden kann, auf folgende Art.

Da sowohl z als y eine rationale Funktion von x werden soll; so setze man $\sqrt{(a + bz)} = bx$; wobey leicht einzusehen ist, daß man dadurch seine Absicht erhalten werde. Denn es wird alsdann einmal $y = bx$, und zweytens $a + bz = bbxx$; folglich $z = bxx - \frac{a}{b}$. Es wird daher sowohl z als y durch eine rationale Funktion von x ausgedruckt; und man darf dazu nur, wenn $y = \sqrt{(a + bz)}$ ist, $z = bxx - \frac{a}{b}$ setzen, indem alsdann $y = bx$ wird.

§. 48.

Wenn $y = (a + bz)^{\frac{m}{n}}$ ist; so findet man die neue veränderliche Größe x, wodurch sowohl y als z rational ausgedruckt werden kann, auf folgende Art.

Man

Man setze $y = x^m$, so wird $(a + bz)^{\frac{m}{n}} = x^m$, und $(a + bz)^{\frac{1}{n}} = x$; folglich $a + bz = x^n$, und $z = \frac{x^n - a}{b}$. Es wird daher in der gegebenen Funktion sowohl y als z rational ausgedruckt, wenn man $z = \frac{x^n - a}{b}$ setzt, indem diese Substitution $y = x^m$ giebt. Ohnerachtet man also weder y durch z, noch z durch y rational ausdrucken kann; so sind dennoch beyde Funktionen durch die Einführung der veränderlichen Größe x rational gemacht worden, so wie solches der Endzweck der Substitution erforderte.

§. 49.

Es ist $y = \left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{\frac{m}{n}}$; man soll eine neue veränderliche Größe x finden, wodurch sowohl y als z rational ausgedruckt werden kann.

Zuvörderst fällt hier bald in die Augen, daß man der Aufgabe ein Genüge thun werde, wenn man $y = x^m$ setzt. Denn es wird alsdann $\left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^{\frac{m}{n}} = x^m$, folglich $\frac{a + bz}{f + gz} = x^n$; und aus dieser Gleichung ergiebt sich $z = \frac{a - fx^n}{gx^n - b}$, so wie diese Substitution hinwiederum $y = x^m$ giebt.

Zum andern aber läßt sich nun auch leicht einsehen, daß man sowohl y als z, wenn $\left(\frac{\alpha + \beta y}{\gamma + \delta y}\right)^n = \left(\frac{a + bz}{f + gz}\right)^m$ ist, rational werde ausdrucken können, wenn man beyde gegebene Ausdrücke $= x^{mn}$ setzt. Denn es wird alsdann $y = \frac{\alpha - \gamma x^m}{\delta x^m - \beta}$ und $z = \frac{a - fx^n}{gx^n - b}$.

§. 50.

Wenn $y = \sqrt{((a + bz)(c + dz))}$; so findet man die Substitution, wodurch y und z rational ausgedruckt werden können, auf folgende Art.

Man setze $\sqrt{((a + bz)(c + dz))} = (a + bz)x$; denn es ist leicht einzusehen, daß z daher einen rationalen Werth bekommen werde, weil der Werth von z in einer einfachen Gleichung gegeben ist. Alsdann wird $c + dz = (a + bz)xx$, und hieraus $z = \frac{c - axx}{bxx - d}$. Ferner ist nunmehr $a + bz = \frac{bc - ad}{bxx - d}$; u. wegen $y = \sqrt{((a + bz)(c + dz))} = (a + bz)x$, $y = \frac{(bc - ad)x}{bxx - d}$. Es wird also die irrationale Funktion $y = \sqrt{(a + bz)(c + dz)}$ durch die Substitution $z = \frac{c - axx}{bxx - d}$ zur Rationalität gebracht, indem dieselbe $y = \frac{(bc - ad)x}{bxx - d}$ giebt. Ist z. B. $y = \sqrt{(aa - zz)} = \sqrt{((a + z)(a - z))}$: so setze man, da $b = 1, c = a$, und $d = -1$ ist, $z = \frac{a - axx}{1 + xx}$, wo denn $y = \frac{2ax}{1 + xx}$ seyn wird. So oft daher die Größe unter dem Zeichen $\sqrt{}$ zwey einfache reelle Faktoren hat, kann man sich dieser Art, sie auf die Rationalform zu bringen, bedienen; wenn aber die beyden einfachen Faktoren imaginär sind, so ist folgender Weg vorzüglicher.

§. 51.

Es ist $y = \sqrt{(p + qz + rzz)}$; man soll eine Substitution für z finden, wodurch der Werth von y rational wird.

Es kann dies auf mehrere Arten geschehen, je nachdem p und q positive oder negative Größen sind. Es sey zuvörderst p positiv und $= aa$; denn wenn auch p kein Quadrat ist, so verursacht doch bey dem gegegenwärtigen Geschäfte die Irrationalität der beständigen Größen keine Schwierigkeit. Es sey also

1. $y = \surd(aa + bz + czz)$. Setzt man hier $\surd(aa + bz + czz) = a + xz$, so wird $b + cz = 2ax + xxz$; und also $z = \frac{b - 2ax}{xx - c}$: folglich $y = a + xz = \frac{bx - axx - ac}{xx - c}$, wo z und y rationale Funktionen von x sind. Ferner sey.

2. $y = \surd(aazz + bz + c)$. Setzt man nun $\surd(aazz + bz + c) = az + x$, so wird $bz + c = 2axz + xx$, und $z = \frac{xx - c}{b - 2ax}$. Dann aber ist $y = az + x = \frac{-ac + bx - axx}{b - 2ax}$.

3. Wenn p und r negativ sind, so ist der Werth von y, wofern nicht qq größer als $4pr$ ist, allezeit imaginär. Ist aber qq größer als $4pr$; so kann der Ausdruck $p + qz + rzz$ in zwey Faktoren aufgelöset werden, und dann gehört dieser Fall unter den vorhergehenden §. Oft kann man aber denselben bequemer auf diese Form bringen, $y = \surd(aa + (b + cz)(d + ez))$; und um diesen Ausdruck rational zu machen, setze man $y = a + (b + cz)x$. Dann ist $d + ez = 2ax + bxx + cxxz$, und daher $z = \frac{d - 2ax - bxx}{cxx - e}$, und $y = \frac{-ae + (cd - be)x - acxx}{cxx - e}$. Oft ist die Reduction auf diese Form leichter, $y = \surd(aazz + (b + cz)(d + ez)$. Dann setze man $y = az + (b + cz)x$, wo $d + ez = 2axz + bxx + cxxz$, und $z = \frac{bxx - d}{e - 2ax - cxx}$, und $y = \frac{-ad + (be - cd)x - abxx}{e - 2ax - cxx}$ wird.

Exempel.

Hätte man die irrationale Funktion von z, $y=\sqrt{(-1+3z-zz)}$; so könnte man dieselbe auf die Form, $y=\sqrt{(1-2+3z-zz}=\sqrt{(1-(1-z)(2-z))}$ bringen. Setzt man aber darauf $y=1-(1-z)x$; so wird $-2+z=-2x+xx-xxz$, und $z=\frac{2-2x+xx}{1+xx}$; und dann ist $1-z=\frac{-1+2x}{1+xx}$, und $y=1-(1-z)x$ $=\frac{1+x-xx}{1+xx}$. Und dies sind ohngefehr die Fälle, welche die unbestimmte Analytik, oder die Diophantäische Analysis darbietet; denn es lassen sich keine andere irrationale Formeln, die nicht unter den erwogenen begriffen wären, durch die Substitution rational machen. Es soll daher nunmehr von dem andern Nutzen der Substitution geredet werden.

§. 52.

Es ist y eine solche Funktion von z, daß $ay^{\alpha}+bz^{\beta}+cy^{\gamma}z^{\delta}=0$: man soll eine neue veränderliche Größe x finden, wodurch man die Werthe von y und z entwickelt darstellen kann.

Da man keine allgemeine Regel für die Auflösung der Gleichungen hat; so kann aus dieser Gleichung weder y durch z, noch z durch y entwickelt dargestellt werden. Um also dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, setze man $y=x^m z^n$, wo dann $ax^{\alpha m}z^{\alpha n}+bz^{\beta}+cx^{\gamma m}z^{\gamma n+\delta}=0$ seyn wird, und bestimme darauf den Exponenten n so, daß der Werth von z aus dieser letzten Gleichung entwickelt werden kann. Dies kann auf dreyerley Arten geschehen.

1. Es sey $\alpha n = \beta$, und also $n = \frac{\beta}{\alpha}$; so ist, wenn man die gedachte Gleichung durch $z^{\alpha n} = z^{\beta}$ dividirt, $ax^{\alpha m} + b + cx^{\gamma m} z^{\gamma n - \beta + \delta} = 0$. Hieraus ergiebt sich

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{1}{\gamma n - \beta + \delta}}, \text{ oder}$$

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\alpha}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}, \text{ und}$$

$$y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - b}{cx^{\gamma m}}\right)^{\frac{\beta}{\beta\gamma - \alpha\beta + \alpha\delta}}$$

2. Es sey $\beta = \gamma n + \delta$, oder $n = \frac{\beta - \delta}{\gamma}$; so ist, wenn man die obige Gleichung durch $z^{\beta} = z^{\gamma n + \delta}$ dividirt, $ax^{\alpha m} z^{\alpha n - \beta} + b + cx^{\gamma m} = 0$. Hieraus ergiebt sich

$$z = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{1}{\alpha n - \beta}}, \text{ oder}$$

$$z = \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\gamma}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}, \text{ und}$$

$$y = x^m \left(\frac{-b - cx^{\gamma m}}{ax^{\alpha m}}\right)^{\frac{\beta - \delta}{\alpha\beta - \alpha\delta - \beta\gamma}}$$

3. Es sey $\alpha n = \gamma n + \delta$, oder $n = \frac{\delta}{\alpha - \gamma}$; so ist, wenn man dieselbe Gleichung durch $z^{\alpha n} = z^{\gamma n + \delta}$ dividirt, $ax^{\alpha m} + bz^{\beta - \alpha n} + cx^{\gamma m} = 0$. Hieraus ergiebt sich

$z =$

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{1}{\beta - \alpha n}}, \text{ oder}$$

$$z = \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\alpha - \gamma}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}, \text{ und}$$

$$y = x^m \left(\frac{-ax^{\alpha m} - cx^{\gamma m}}{b}\right)^{\frac{\delta}{\alpha\beta - \beta\gamma - \alpha\delta}}$$

Hier sind also auf drey verschiedene Arten Funktionen von x gefunden worden, die z und y gleich sind. Uebrigens kann man für m eine Zahl setzen, was für eine man will, bloß die Null ausgenommen; und auf diese Art lassen sich die Formeln auf die bequemste Form bringen.

Exempel.

Es sey die Natur der Funktion y durch die Gleichung $y^3 + z^3 - cyz = 0$ gegeben, und es werde verlangt, daß man Funktionen von x finden soll, die den Funktionen y und z gleich sind.

Hier ist also $a = -1$; $b = -1$; $\alpha = 3$; $\beta = 3$; $\gamma = 1$; und $\delta = 1$. Folglich giebt die erste Bestimmungsart, wenn man $m = 1$ setzt, $z = \left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1}$ und $y = x\left(\frac{x^3 + 1}{cx}\right)^{-1}$ oder $z = \frac{cx}{1 + x^3}$ und $y = \frac{cxx}{1 + x^3}$: wo so gar beyde Formeln rational sind.

Die andere Art führt zu folgenden Werthen:

$$z = \left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{1}{3}}, \text{ und } y = x\left(\frac{cx - 1}{x^3}\right)^{\frac{2}{3}}; \text{ oder}$$

$$z = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)} \text{ und } y = \frac{1}{x}\sqrt[3]{(cx - 1)^2}.$$

Die dritte endlich giebt

$$z = (cx - x^3)^{\frac{2}{3}}, \text{ und } y = x\,(cx - z^3)^{\frac{1}{3}}$$

§. 53.

Hieraus läßt sich rückwärts beurtheilen, wie die Gleichungen, in welchen y durch z gegeben ist, beschaffen seyn müssen, wenn sie durch die Einführung einer neuen veränderlichen Größe x sollen entwickelt werden können.

Denn nimmt man an, daß man durch eine bereits vorgenommene Auflösung

$$z = \left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \text{etc.}}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \text{etc.}}\right)^{p:r} \quad \text{und}$$

$$y = x\left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \text{etc.}}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \text{etc.}}\right)^{q:r}$$

erhalten habe; so wird daher $y^p = x^p z^q$, [weil aus den angenommenen Gleichungen $z^{\frac{1}{p}} = \left(\frac{y}{x}\right)^{\frac{1}{q}}$, und hieraus $z^q = \left(\frac{y}{x}\right)^p$ wird] und also $x = y z^{-q:p}$. Da also

$$z^{r:p} = \frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \text{etc.}}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \text{etc.}}:$$

so wird, wenn man in diese Gleichung den Werth $y z^{-q:p}$ von x anstatt x setzt,

$$z^{r:p} = \frac{a y^{\alpha} z^{-\alpha q:p} + b y^{\beta} z^{-\beta q:p} + c y^{\gamma} z^{-\gamma q:p} + \text{etc.}}{A + B y^{\mu} z^{-\mu q:p} + C y^{\nu} z^{-\nu q:p} + \text{etc.}}$$

und aus dieser Gleichung ergiebt sich ferner

$$Az^{r:p} + By^{\mu}z^{(r-\mu q):p} + Cy^{\nu}z^{(r-\nu q):p} + \text{ꝛc.} =$$

$$ay^{\alpha}z^{-\alpha q:p} + by^{\beta}z^{-\beta q:p} + cy^{\gamma}z^{-\gamma q:p} + \text{ꝛc.}$$

so wie hieraus, wenn man mit $z^{\alpha q:p}$ multiplicirt,

$$Az^{(\alpha q + r):p} + By^{\mu}z^{(\alpha q-\mu q + r):p} + Cy^{\nu}z^{(\alpha q-\nu q + r):p} + \text{ꝛc.}$$

$$= ay^{\alpha} + by^{\beta}z^{(\alpha q-\beta q):p} + cy^{\gamma}z^{(\alpha q-\gamma q):p} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun $\frac{\alpha q + r}{p} = m$, und $\frac{\alpha q - \beta q}{p} = n$; so wird

$p = \alpha - \beta$, $q = n$, und $r = \alpha m - \beta m - \alpha n$; folglich

$$Az^{m} + By^{\mu}z^{m-\mu n:(\alpha-\beta)} + Cy^{\nu}z^{m-\nu n:(\alpha-\beta)} + \text{ꝛc.} =$$

$$ay^{\alpha} + by^{\beta}z^{n} + cy^{\gamma}z^{(\alpha-\gamma)n:(\alpha-\beta)} + \text{ꝛc.}$$

und dies ist die Gleichung, aus welcher man bey der Auflösung

$$z = \left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \text{ꝛc.}}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \text{ꝛc.}}\right)^{\frac{\alpha - \beta}{\alpha m - \beta m - \alpha n}}$$ und

$$y = x\left(\frac{ax^{\alpha} + bx^{\beta} + cx^{\gamma} + \text{ꝛc.}}{A + Bx^{\mu} + Cx^{\nu} + \text{ꝛc.}}\right)^{\frac{n}{\alpha m - \beta m - \alpha n}}$$

erhält.

Oder man setze $\frac{\alpha q + r}{p} = m$, uud $\frac{\alpha q - \mu q + r}{p} = n$; so wird $m - n = \frac{\mu q}{p}$; $\frac{q}{p} = \frac{m - n}{\mu}$, und $\frac{r}{p} = m - \frac{\alpha m + \alpha n}{\mu}$; ferner $p = \mu$, $q = m - n$, und $r = \mu m - \alpha m + \alpha n$. Vermittelst dieser Werthe aber wird

A z

$Az^m + By^\mu z^n + Cy^\nu z^{\mu m - \nu (m-n):\mu} +$ u. s. f. $=$

$ay^\alpha + by^\beta z^{(\alpha-\beta)(m-n):\mu} + cy^\gamma z^{(\alpha-\gamma)(m-n):\mu}$ + u. s. f.; und dies ist nunmehr die Gleichung, welche bey der Auflösung

$$z = \left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \text{u. s. f.}}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \text{u. s. f.}}\right)^{\frac{\mu}{\mu m - \alpha m + \alpha n}}$$ und

$$y = x\left(\frac{ax^\alpha + bx^\beta + cx^\gamma + \text{u. s. f.}}{A + Bx^\mu + Cx^\nu + \text{u. s. f.}}\right)^{\frac{m-n}{\mu m - \alpha m + \alpha n}}$$ giebt.

§. 54.

Wenn y auf die Art mit z verbunden ist, daß $ayy + byz + czz + dy + ez = o$ ist: so findet man mit Hülfe einer neuen veränderlichen Größe x sowohl für y als für z auf folgendem Wege einen rationalen Ausdruck.

Man setzet $y = xz$, und dividirt die dadurch aus $ayy + byz + czz + dy + ez = o$ entstehende Gleichung durch z. Alsdann hat man $axxz + bxz + cz + dx + e = o$; und hieraus

$$z = \frac{-dx - e}{axx + bx + c} \text{ und } y = \frac{-dxx - ex}{axx + bx + c}.$$

Auf die gegebene Form kann man aber auch diese Gleichung zwischen y und z, $ayy + byz + czz + dy + ez + f = o$ bringen; wenn man beyde veränderliche Größen um eine gewisse beständige Größe vermehrt oder vermindert; daher sich auch diese Gleichung durch eine neue veränderliche Größe x entwickeln läßt.

§. 55.

Wenn y auf die Art von z abhängt, daß $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 + eyy + fyz + gzz = o$ ist: so

läßt

läßt sich sowohl y als z auf folgende Art rational ausdrucken.

Man setzet $y = xz$, und dividirt, wenn man hiernach die gegebene Gleichung verändert hat, dieselbe durch zz. Dadurch erhält man $ax^3z + bxxz + cxz + dz + exx + fx + g = 0$; und hieraus wird

$$z = \frac{-exx - fx - g}{ax^3 + bxx + cx + d} \text{ u. } y = \frac{-ex^3 - fxx - gx}{ax^3 + bxx + cx + d}.$$

Aus diesen Beyspielen läßt sich leicht erkennen, wie die Gleichungen von höhern Graden zwischen y und z beschaffen seyn müssen, wenn eine ähnliche Auflösung statt finden soll. Uebrigens sind dieselben unter den Formeln des 53sten §. begriffen; aber wegen der Schwierigkeit, womit die Anwendung der allgemeinen Formeln auf diese öfters vorkommende Fälle verknüpft ist, schien es zweckmäßig, einige davon besonders zu entwickeln.

§. 56.

Wenn das Verhältniß zwischen y und z durch die Gleichung $ayy + byz + czz = d$ gegeben ist: so lassen sich beyde Größen y und z auf folgende Art durch eine neue veränderliche Größe x bestimmen.

Man setzt $y = xz$, und da dadurch $(axx + bx + c) \times zz = d$ wird, so bekommt man

$$z = \sqrt{\frac{d}{axx + bx + c}} \text{ und } y = x\sqrt{\frac{d}{axx + bx + c}}.$$

Auf eine ähnliche Art erhält man, wenn $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3 = ey + fx$ ist, durch die Substitution $y = xz$ und durch die Division der daher entstandenen Gleichung durch z, $(ax^3 + bxx + cx + d)zz = ex + f$; und folglich

$$z = \sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bxx + cx + d}}, \text{ und } y = x\sqrt{\frac{ex + f}{ax^3 + bxx + cx + d}}$$

Ei

Es sind aber diese, so wie auch alle übrigen Fälle, die eine ähnliche Auflösung zu assen, unter dem allgemeinen Falle des folgenden §. begriffen.

§. 57.

Wenn das Verhältniß zwischen y und z durch die Gleichung $ay^m + by^{m-1}z + cy^{m-2}z^2 + dy^{m-3}z^3 + \text{etc.} = \alpha y^n + \beta y^{n-1}z + \gamma y^{n-2}z^2 + \delta y^{n-3}z^3 + \text{etc.}$ gegeben ist: so läßt sich sowohl y als z auf folgende Art bequem durch eine neue veränderliche Größe x darstellen.

Man setze $y = xz$, so kann man, nachdem man vermittelst dieser Substitution die gegebene Gleichung abgeändert hat, die ganze abgeänderte Gleichung, vorausgesetzt, daß der Exponent m größer als n ist, durch z^n dividiren, und dadurch erhält man $(ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \text{etc.}) \times z^{m-n} = \alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \text{etc.}$ Hieraus aber fließt

$$z = \left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \text{etc.}}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \text{etc.}}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

und

$$y = x\left(\frac{\alpha x^n + \beta x^{n-1} + \gamma x^{n-2} + \text{etc.}}{ax^m + bx^{m-1} + cx^{m-2} + \text{etc.}}\right)^{\frac{1}{m-n}}$$

Es findet nemlich diese Auflösung alsdann statt, wenn in der ganzen zwischen y und z gegebenen Gleichung nicht mehr als eine doppelte Menge von Dimensionen beyder veränderlichen Größen y und z vorkommt; so wie in dem betrachteten Falle die Anzahl dieser Dimensionen in jedem einzelnen Gliede der Gleichung entweder m oder n ist.

§. 58.

Wenn in einer Gleichung zwischen y und z dreyerley Dimensionen vorkommen, so daß die höchste die mittelste in Ansehung der Höhe um eben so viel übersteigt, als die niedrigste unter der mittelsten ist: so kann man mit

Hülfe der Auflösung der quadratischen Gleichungen die veränderlichen Größen y und z durch eine neue veränderliche Größe x ausdrucken.

Denn setzt man $y = xz$, und dividirt man die durch diese Substitution erhaltene Gleichung durch die niedrigste Potestät von z; so läßt sich nun der Werth von z, durch x bestimmt, vermittelst der Extraction der Quadrat-Wurzel erhalten. Folgende Beyspiele werden dieses deutlich machen.

Erstes Exempel.

Es sey $ay^3 + by^2z + cyzz + dz^3 = 2eyy + 2fyz + 2gzz + hy + iz$. Setzt man nun $y = xz$, und dividirt man die dadurch erhaltene Gleichung durch z; so bekommt man

$$(ax^3 + bxx + cx + d)\,zz = 2\,(exx + fx + g)\,z + hx + i;$$

und hieraus $z =$

$$\frac{exx + fx + g \pm \sqrt{((exx + fx + g)^2 + (ax^3 + bxx + cx + d)(hx + i))}}{ax^3 + bxx + cx + d.}$$

Hat man aber z gefunden, so ist $y = xz$.

Zweytes Exempel.

Es sey $y^5 = 2az^3 + by + cz$. Setzt man nun wieder $y = xz$, so wird $x^5z^4 = 2azz + bx + c$; und hieraus findet man

$$zz = \frac{a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)}}{x^5}$$

so wie hieraus

$$z = \frac{\sqrt{(a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)})}}{xx\sqrt{x}} \text{ und}$$

$$y = \frac{\sqrt{(a \pm \sqrt{(aa + bx^6 + cx^5)})}}{x\sqrt{x}}$$

Drittes Exempel.

Es sey $y^{10} = 2ayz^6 + byz^3 + cy^4$; wo man also die Dimensionen 10, 7 und 4 hat. Setzt man $y = xz$, und dividirt man die dadurch erhaltene Gleichung durch z^4; so so erhält man, $x^{10}z^6 = 2axz^3 + bx + c$, oder $z^6 = \frac{2axz^3 + bx + c}{x^{10}}$. Hieraus ergiebt sich

$$z^3 = \frac{ax \pm x\sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)}}{x^{10}},$$ und folglich ist

$$z = \frac{\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)})}}{x^3},$$ und

$$y = \frac{\sqrt[3]{(a \pm \sqrt{(aa + bx^9 + cx^8)})}}{x^2}$$

Aus diesen Beyspielen läßt sich die Art des Gebrauchs dieser Substitutionen zur Genüge einsehen.