# Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Viertes Capitel. Von der Entwickelung der Funktionen durch unendliche Reihen.

# Viertes Capitel.

## Von der Entwickelung der Funktionen durch unendliche Reihen.

Die zu diesem Capitel nöthigen Zusätze stehen insgesammt im Anhange unter der dritten Nummer.

§. 59.

Da die gebrochenen und irrationalen Funktionen von $z$ nicht unter der Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ u. s. f. begriffen sind, wenn die Anzahl der Glieder eine endliche Zahl ist: so pflegt man ähnliche ins Unendliche fortlaufende Ausdrücke zu suchen, welche den Werth einer jeden gebrochenen und irrationalen Funktion darstellen. Ja man ist selbst die Natur der transcendenten Funktionen besser im Stande einzusehen, wenn man sie durch dergleichen ins Unendliche fortlaufende Formeln ausdruckt. Denn so wie man die Natur einer ganzen Funktion am leichtesten erkennt, wenn man sie nach den in ihr vorkommenden verschiedenen Potestäten von $z$ entwickelt, und also auf die Form $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ u. s. f. bringt: so ist auch eben diese Form vor allen andern geschickt, der Seele einen deutlichen Begriff von der Natur einer jeden andern Funktion zu ertheilen, wenn gleich die Anzahl der darin vorkommenden Glieder unendlich ist. Es fällt aber in die Augen, daß keine andern, als bloß die ganzen Funktionen von $z$ durch eine endliche Menge solcher Glieder, $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ u. s. f. ausgedruckt werden können: denn sollte das Gegentheil möglich seyn, so würden eben dadurch die Funktionen

zu

zu ganzen Funktionen. Und sollte jemand daran zweifeln, ob man die übrigen Arten der Funktionen außer den ganzen durch eine unendliche Anzahl solcher Glieder ausdrucken könne: so wird die wirkliche Entwickelung aller dieser Funktionen in dergleichen unendliche Reihen diesen Zweifel hinlänglich aus dem Wege räumen. Damit aber diese Entwickelung einen desto größern Umfang erhalte, so müssen außer den Potestäten von z, deren Exponent eine ganze Zahl ist, auch alle übrigen Potestäten von z zugelassen werden. Auf diese Art leidet es gar keinen Zweifel, daß eine jede Funktion von z durch eine unendliche Reihe von dieser Form $Az^{\alpha} + Bz^{\beta} + Cz^{\gamma} + Dz^{\delta} +$ u. s. f. ausgedruckt werden kann, indem $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. f. ganz allgemeine Zahlzeichen sind, und man also dafür, was für eine Zahl man will, setzen kann.

## §. 60.

Es ist bekannt, daß man den Bruch $\frac{a}{\alpha + \beta z}$ durch eine ohne Ende fortgehende Division in diese unendliche Reihe verwandeln kann: $\frac{a}{\alpha} - \frac{a\beta z}{\alpha^2} + \frac{a\beta^2 z^2}{\alpha^3} - \frac{a\beta^3 z^3}{\alpha^4} + \frac{a\beta^4 z^4}{\alpha^5} -$ ꝛc. Da darin jedes Glied zu dem unmittelbar folgenden das beständige Verhältniß $1 : \frac{\beta z}{\alpha}$ hat, so nennt man selbige eine geometrische Reihe.

Man kann aber diese Reihe auch auf die Art finden, daß man sie anfangs als unbekannt betrachtet. Denn setzt man

$$\frac{a}{\alpha + \beta z} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{ꝛc.}$$

und sucht man, um diese Gleichheit wirklich hervorzubringen, die Coefficienten A, B, C, D, E u. s. f. so wird

$$a = (\alpha + \beta z)(A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}$$

Multiplicirt man nun wirklich, so bekommt man

$$a = \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{u. s. f.}$$
$$+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{u. s. f.}$$

Es muß also $a = \alpha A$, folglich $A = \frac{a}{\alpha}$, und der Coefficient einer jeden Potestät von z gleich Null gesetzt werden. Dies giebt folgende Gleichungen

$$\alpha B + \beta A = 0$$
$$\alpha C + \beta B = 0$$
$$\alpha D + \beta C = 0$$
$$\alpha E + \beta D = 0.$$
u. s. f.

Kennt man also irgend einen von den Coefficienten, so läßt sich daraus der folgende leicht finden. Denn setzt man den Coefficienten irgend eines Gliedes $= P$, und den Coefficienten des unmittelbar folgenden Gliedes $= Q$: so ist $\alpha Q + \beta P = 0$, und folglich $Q = \frac{\beta P}{\alpha}$. Da also das erste Glied A bestimmt und $= \frac{a}{\alpha}$ ist: so findet man daraus die folgenden Größen B, C, D u. s. f., eben so, als sie sich aus der Division ergaben. Uebrigens sieht man ohne Mühe, daß der Coefficient von $z^n$ in der gefundenen unendlichen Reihe $= \pm \frac{a\beta^n}{\alpha^{n+1}}$ ist, wobey das Zeichen + alsdann statt findet, wenn n eine gerade, — aber, wenn n eine ungerade Zahl ist; mit andern Worten: der Coefficient ist allezeit $= \frac{a}{\alpha}\left(\frac{-\beta}{\alpha}\right)^n$.

## §. 61.

Auf eine ähnliche Art kann der Bruch $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$ durch eine ohne Ende fortgehende Division in eine unendliche Reihe verwandelt worden.

Da inzwischen diese Division mühsam ist, und man dabey die Natur der gefundenen unendlichen Reihe nicht so leicht übersieht: so ist es vortheilhafter, die gesuchte Reihe willkührlich anzunehmen, und sie dann auf eben die Art wie vorhin zu bestimmen. Es sey also

$$\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz} = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{u. s. f.}$$

Multiplicirt man hier auf beyden Seiten durch $\alpha + \beta z + \gamma zz$; so erhält man

$$\begin{aligned} a + bz = \alpha A &+ \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{u. s. f.} \\ &+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{u. s. f.} \\ &\phantom{+ \beta Az} + \gamma Az^2 + \gamma Bz^3 + \gamma Cz^4 + \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Hieraus ergiebt sich $\alpha A = a$; $\alpha B + \beta A = b$; und folglich ist $A = \frac{a}{\alpha}$, und $B = \frac{b}{\alpha} - \frac{a\beta}{\alpha^2}$. Die übrigen Buchstaben erhalten ihre Bestimmung aus folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned} \alpha C + \beta B + \gamma A &= 0 \\ \alpha D + \beta C + \gamma B &= 0 \\ \alpha E + \beta D + \gamma C &= 0 \\ \alpha F + \beta E + \gamma D &= 0 \\ \text{u. s. f.} \end{aligned}$$

Man findet hier also aus den Coefficienten jeder zweyer unmittelbar auf einander folgenden Glieder den Coefficienten des nächsten Gliedes. Sind z. B. die Coefficienten zweyer unmittelbar auf einander folgenden Glieder P und Q, und der Coefficient des nächsten Gliedes R: so ist $\alpha R +$

$\beta Q + \gamma P = 0$, oder $R = \frac{-\beta Q - \gamma P}{\alpha}$. Da nun die beyden ersten Buchstaben A und B bereits bekannt sind, so findet man aus ihnen nach und nach alle folgenden C, D, E, F, u. s. f. und auf diese Weise erhält man $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4$ rc. $= \frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$.

Exempel.

Es sey der Bruch $\frac{1 + 2z}{1 - z - zz}$ gegeben, und ihm werde die Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ rc. gleich gesetzt. Alsdann ist, da $a = 1$, $b = 2$, $\alpha = 1$, $\beta = -1$, und $\gamma = -1$ ist, $A = 1$, $B = 3$; und folglich

| | |
|---|---|
| $C = B + A$ | Ein jeder Coefficient ist also die Summe |
| $D = C + B$ | der beyden vorhergehenden; und kennt |
| $E = D + C$ | man daher die Coefficienten zweyer un- |
| $F = E + D$ | mittelbar auf einander folgenden Glieder |
| u. s. w. | P und Q, so ist der nächste $R = P + Q$. |

Da nun die beyden ersten Coefficienten A und B bekannt sind, so giebt der Bruch $\frac{1 + 2z}{1 - z - zz}$ folgende unendliche Reihe: $1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5$ u. s. w. die man ohne Mühe, so weit als man will, fortsetzen kann.

§. 62.

Hieraus ist man bereits im Stande, die Natur der unendlichen Reihen, worin gebrochene Funktionen verwandelt werden können, zu begreifen. Es findet nemlich bey denselben ein solches Gesetz statt, daß ein jedes ihrer Glieder aus einem oder einigen von den vorhergehenden gefunden werden kann. Ist z. B. der Nenner des gegebenen Bruchs $= \alpha + \beta z$, und setzt man die unendliche Reihe

$A + Bz + Cz^2 + \ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} +$ 2c.; so wird jeder Coefficient Q aus dem unmittelbar vor ihm hergehenden allein auf die Art bestimmt, daß $\alpha Q + \beta P = 0$ wird. Bestände der Nenner aus drey Theilen, $\alpha + \beta z + \gamma zz$; so würde jeder Coefficient in der unendlichen Reihe, R, aus den beyden vorhergehenden gefunden werden, wenn man $\alpha R + \beta Q + \gamma P = 0$ setzte. Wäre der Nenner viertheilig, wie $\alpha + \beta z, \gamma zz + \delta z^3$; so würde jeder Coefficient in der unendlichen Reihe, S, erhalten werden, wenn man ihn so annähme, daß $\alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P = 0$ würde; und so geht dies immer weiter fort. Es wird daher in diesen unendlichen Reihen jedes Glied aus einem oder einigen von den unmittelbar vorhergehenden Gliedern nach einem gewissen beständigen Gesetze bestimmt, und dieses Gesetz läßt sich aus dem Nenner des Bruchs, der in eine unendliche Reihe verwandelt werden soll, ohne Mühe erkennen. Man nennt aber diese Reihen mit dem berühmten Moivre, der sich mit der Untersuchung derselben vorzüglich beschäftiget hat, wiederkehrende Reihen, weil man bey denselben immer zu den vorhergehenden Gliedern zurückkehren muß, wenn man die folgenden bestimmen will.

## §. 63.

Es ist aber zur Erhaltung solcher Reihen nothwendig, daß der beständige Theil des Nenners nicht $= 0$ sey; denn da das erste Glied derselben $A = \frac{a}{\alpha}$ ist §. 60. 61. so würde nicht nur dieses Glied, sondern auch alle folgenden unendlich werden, wenn $\alpha = 0$ wäre. Diesen Fall also ausgenommen, der nachher betrachtet werden soll, so läßt sich jede gebrochene Funktion, die in eine unendliche Reihe verwandelt werden soll, auf diese Form bringen: $\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{ꝛc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ꝛc.}}$ wo das erste Glied des Nenners $= 1$ gesetzt worden ist, weil sich auf diese Art alle Brüche ausdrucken lassen, sobald das gedachte Glied nicht $= 0$ ist; die übrigen Theile des Nenners aber haben deswegen alle das Zeichen $-$, damit alle Glieder der Reihe positiv werden. Denn setzt man die daraus entspringende wiederkehrende Reihe $= A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ u. s. f. so werden die Coefficienten auf die Art bestimmt, daß

$$\begin{aligned} A &= a \\ B &= \alpha A + b \\ C &= \alpha B + \beta A + c \\ D &= \alpha C + \beta B + \gamma A + d \\ E &= \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e \end{aligned}$$

u. s. w.

ist. Ein jeder Coefficient ist also ein Aggregat des Vielfachen eines oder mehrerer vorhergehenden Coefficienten, und einer gewissen Zahl, welche der Zähler an die Hand giebt. Wenn indeß der Zähler nicht aus einer unendlichen Menge von Theilen besteht, so hört das Hinzukommen dieser Zahl bald auf, und dann wird jeder folgende Coefficient nach einem beständigen Gesetze bloß aus den vorhergehenden Coefficienten bestimmt. Damit nun die Folge unter den Gliedern der Reihe ununterbrochen fortgehe, so muß man zu der gegenwärtigen Verwandlung ächte gebrochene Funktionen nehmen; denn bey den unächten gebrochenen Funktionen ändert die darin enthaltene ganze Funktion in den Gliedern, in welche sie kommt, das Fortschreiten der Reihe. So giebt z. B. der unächte Bruch $\frac{1 + 2z - z^3}{1 - z - zz}$ diese Reihe:

$1 + 3z + 4zz + 6z^3 + 10z^4 + 16z^5 + 26z^6 + 42z^7 +$ u. s. f.; es macht aber das vierte Glied $6z^3$ eine Ausnahme von der Regel, nach welcher jeder Coefficient die Summe der beyden vorhergehenden ist.

## §. 64.

Unter den wiederkehrenden Reihen, die man durch die bisher beschriebene Entwickelung der Funktionen erhält, verdienen diejenigen, die aus Brüchen entspringen, deren Nenner eine Potestät ist, eine besondere Betrachtung. So findet man z. B. wenn man den Bruch $\frac{a + bz}{(1 - \alpha z)^2}$ in eine solche Reihe auflöset, diese:

$$\begin{array}{l} a + 2\alpha a \, z + 3\alpha^2 a \, z^2 + 4\alpha^3 a \, z^3 + 5\alpha^4 a \, z^4 + \text{ꝛc.} \\ \quad + \; b \quad\; + 2\alpha b \quad\;\; + 3\alpha^2 b \quad\;\; + 4\alpha^3 b \quad\;\; + \text{ꝛc.} \end{array}$$

und der Coefficient von der Potestät $z^n$ ist $(n + 1)\,\alpha^n a + n\alpha^{n-1} b$. Es ist indeß auch diese Reihe eine wiederkehrende, weil darin ein jedes Glied durch die beyden vorhergehenden bestimmt wird; und man erkennt das Gesetz, nach welchem solches geschiehet, aus dem entwickelten Nenner, der $1 - 2\alpha z + \alpha\alpha zz$ ist. Setzt man $\alpha = 1$ und $z = 1$; so geht die Reihe in eine allgemeine arithmetische Progression, $a + (2a + b) + (3a + 2b) + (4a + 3b) +$ u. s. f. über, deren Differenzen unveränderlich oder einander gleich sind. Es ist daher eine jede arithmetische Progression eine wiederkehrende Reihe. Denn druckt man dieselbe auf diese Art aus $A + B + C + D + E + F +$ ꝛc. so ist $C = 2B - A$; $D = 2C - B$; $E = 2D - C$; u. s. f.

## §. 65.

Ferner wird der Bruch $\frac{a + bz + czz}{(1 - \alpha)^3}$, da $\frac{1}{(1 - \alpha z)}{}^3 =$ $(1 - \alpha z)^{-3} = 1 + 3\alpha z + 6\alpha^2 z^2 + 10\alpha^3 z^3 + 15\alpha^4 z^4 +$ u. s. f. ist, in diese unendliche Reihe verwandelt:

$$\begin{array}{llllll} a + 3\alpha a_z & + 6\alpha^2 a_{z^2} & + 10\alpha^3 a_{z^3} & + 15\alpha^4 a_{z^4} & + \text{u. s. f.} \\ + \quad b & + 3\alpha b & + 6\alpha^2 b & + 10\alpha^3 b & + \ldots \\ & + \quad c & + 3\alpha c & + 6\alpha^2 c & + \ldots \end{array}$$

worin der Coefficient der Potestät $z^n = \frac{(n+1)(n+2)}{1.\ 2.}\alpha^n a +$ $\frac{n(n+1)}{1.\ 2.}\alpha^{n-1} b + \frac{(n-1)n}{1.\ 2.}\alpha^{n-2} c$ ist. Setzt man aber $\alpha = 1$, und $z = 1$; so geht diese Reihe in eine allgemeine Progression der zweyten Ordnung über, deren zweyte Differenzen unveränderlich sind. Es bezeichne $A + B + C + D + E +$ rc. eine solche Progression, so wird dieselbe zugleich eine wiederkehrende Reihe seyn, worin jedes Glied aus den drey vorhergehenden auf die Art bestimmt wird, daß $D = 3C - 3B + A$; $E = 3D - 3C + B$; $F = 3E - 3D + C$; u. s. f. ist. Da in einer arithmetischen Progression die zweyten Differenzen ebenfalls einander gleich sind, indem dieselben $= 0$ werden: so kommt diese Eigenschaft auch den arithmetischen Progressionen zu.

## §. 66.

Auf eine ähnliche Art giebt der Bruch $\frac{a + bz + czz + dz^3}{(1 - \alpha z)^4}$ eine unendliche Reihe, in welcher die Potestät $z^n$ den Coefficienten $\frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1.\ 2.\ 3.}\alpha^n a + \frac{n(n+1)(n+2)}{1.\ 2.\ 3.}$ $\alpha^{n-1} b + \frac{(n-1)n(n+1)}{1.\ 2.\ 3.}\alpha^{n-2} c + \frac{(n-2)(n-1)n}{1.\ 2.\ 3.}$ $\alpha^{n-3} d$ hat. Setzt man daher $\alpha = 1$, und $z = 1$; so begreift

greift diese Reihe alle algebraische Progressionen der dritten Ordnung, deren dritte Differenzen unveränderlich sind, unter sich. Alle Progressionen von dieser Ordnung, dergleichen hier wider $A + B + C + D + E + F +$ u. s. f. vorstellen mag, sind daher zugleich wiederkehrende Reihen, die aus dem Nenner $1 - 4z + 6zz - 4z^3 + z^4$ entspringen. Es ist folglich $E = 4D - 6C + 4B - A$; $F = 4E - 6D + 4C - B$; u. s. f., und diese Eigenschaft kommt zugleich allen Progressionen der niedern Ordnungen zu.

## §. 67.

Auf diese Art läßt sich zeigen, daß alle algebraische Progressionen einer jeden Ordnung, welche zuletzt auf unveränderliche Differenzen führen, wiederkehrende Reihen sind, und daß das Gesetz, nach welchem jedes Glied aus den vorhergehenden gemacht wird, durch den Nenner $(1 - z)^n$ gegeben wird, wobey n eine größere Zahl ist, als diejenige, welche die Ordnung der Progression anzeigt. Da also $a^m + (a + b)^m + (a + 2b)^m + (a + 3b)^m +$ u. s. w. eine Progression von der Ordnung m darstellt: so ist wegen der Natur der wiederkehrenden Reihen.

$$0 = a^m - \frac{n}{1}(a + b)^m + \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}(a + 2b)^m - \frac{n(n-1)}{1.\ 2.}\frac{(n-2)}{3.}(a + 3b)^m + \ldots\ldots \pm \frac{n}{1}(a + (n-1)b)^m$$

$\mp (a + nb)^m$; wo die obern Zeichen gelten, wenn n eine gerade, die untern aber, wenn n eine ungerade Zahl ist. Diese Gleichung ist allgemein wahr, wenn n eine ganze Zahl und größer als m ist. Hieraus läßt sich beurtheilen, von was für einem weiten Umfange die Lehre von den wiederkehrenden Reihen ist.

§. 68.

Wenn der Nenner eine Potestät, nicht einer zweytheiligen, sondern einer vieltheiligen Wurzel ist: so läßt sich die Natur der daraus entstehenden wiederkehrenden Reihe auch auf eine andere Art erklären. Es sey nemlich der Bruch

$$\frac{1}{(1-\alpha z-\beta z^2-\gamma z^3-\delta z^4-\text{ꝛc.})^{m+1}}$$

gegeben; so ist die daher entspringende unendliche Reihe

$$1+\frac{(m+1)}{1}\alpha z+\frac{(m+1)(m+2)}{1.\ 2.}\alpha^2+\frac{(m+1)(m+2)(m+3)}{1.\ 2.\ 3.}\alpha^3$$
$$z^2$$
$$+\frac{(m+1)}{1}\beta+\frac{(m+1)(m+2)}{1.\ 2.}2\alpha\beta z^3+\text{ꝛc.}$$
$$+\frac{(m+1)}{1}\gamma$$

Um die Natur dieser Reihe desto besser einzusehen, drücke man sie durch allgemeine Buchstaben aus. Man erhält alsdann

$1+Az+Bz^2+Cz^3+\ldots+Kz^{n-3}+Lz^{n-2}+Mz^{n-1}+Nz^n+$ ꝛc. und ein jeder Coefficient $N$ wird auf die Art aus so viel vorhergehenden, als Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ u. s. f. da sind, bestimmt, daß $N=\frac{m+n}{n}\alpha M+\frac{2m+n}{n}\beta L+\frac{3m+n}{n}\gamma K+\frac{4m+n}{n}\delta I+$ ꝛc. ist. Ob nun gleich hier das Gesetz der Fortschreitung nicht beständig ist, sondern von dem Exponenten der Potestät $z$ abhängt; so richtet sich doch gleichwohl eben diese Reihe nach einem andern beständigen Gesetze, welches man aus dem entwickelten Nenner findet, und welches der Natur der wiederkehrenden Reihen gemäß ist. Jenes nicht beständige Gesetz hat aber nur alsdann statt, wenn der Zähler des Bruchs die Einheit, oder eine beständige Größe ist; denn wenn er zugleich

Pote-

Potestäten von z enthält, so wird dasselbe noch viel zusammengesetzter. Dies wird sich nach der Erklärung der Anfangsgründe der Differential-Rechnung mit größerer Leichtigkeit zeigen lassen.

## §. 69.

Bisher haben wir angenommen, daß der erste und beständige Theil des Nenners nicht $= 0$ sey; und haben an seiner Stelle die Einheit gesetzt. Nun wollen wir untersuchen, was man für Reihen erhält, wenn das beständige Glied des Nenners verschwindet. In diesem Falle hat die gebrochene Funktion folgende Form:

$$\frac{a + bz + czz + \text{ꝛc.}}{z(1 - \alpha z - \beta zz - \text{ꝛc.})}$$

Läßt man hier den Faktor des Nenners z aus der Acht, so giebt der Bruch, $\frac{a + bz + czz + \text{ꝛc.}}{1 - \alpha z - \beta zz - \text{ꝛc.}}$ der dann übrig bleibt, die Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{ꝛc.}$ und so ist offenbar, daß

$$\frac{a + bz + cz\ \text{ꝛc.}}{z(1 - \alpha z - \beta zz - \gamma z^3 - \text{ꝛc.})} = \frac{A}{z} + B + Cz + Dz^2 + Ez^3 + \text{ꝛc.}$$

seyn werde. Auf eine ähnliche Art wird $\frac{1 - \alpha z - \beta z^2 - \text{ꝛc.}}{z^2(a + bz + cz^2 + \text{ꝛc.})}$ $= \frac{A}{zz} + \frac{B}{z} + C + Dz + Bz^2 + \text{ꝛc.}$ und überhaupt ist

$$\frac{a + bz + cz^2 + \text{ꝛc.}}{z^m(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \text{ꝛc.})} = \frac{A}{z^m} + \frac{B}{z^{m-1}} + \frac{C}{z^{m-2}}$$

$+ \frac{D}{z^{m-3}} + \text{ꝛc.}$ m mag eine Zahl bedeuten, was für eine es will.

§. 70.

Da man durch die Substitution eine andere veränderliche Größe x anstatt der z in die gebrochenen Funktionen einführen, und also jede gebrochene Funktion auf unzählige Arten ausdrucken kann: so kann man auch eine und dieselbe gebrochene Funktion auf unendlich viele Arten durch wiederkehrende Reihen darstellen. Ist z. B. der Bruch $y = \frac{1+z}{1-z-zz}$ gegeben, wo also $y = 1 + 2z + 3z^2 + 5z^3 + 8z^4 +$ rc. wird: so erhält man, wenn man $z = \frac{1}{x}$ setzt, $y = \frac{xx+x}{xx-x-1} = \frac{-x(1+x)}{1+x-xx}$; und da $\frac{1+x}{1+x-xx} = 1 + 0x + xx - x^3 + 2x^4 - 3x^5 + 5x^6 -$ rc. so wird nun $y = -x - 0x^2 - x^3 + x^4 - 2x^5 + 3x^6 - 5x^7 +$ rc. Setzt man ferner $z = \frac{1-x}{1+x}$; so wird $y = \frac{-2-2x}{1-4x-xx}$, und daraus $y = -2 - 10x - 42xx - 178x^3 - 754x^4 -$ rc. und auf diese Weise lassen sich für y unzählige wiederkehrende Reihen finden.

§. 71.

Die irrationalen Funktionen verwandelt man nach dem Theorem, daß

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}P^{\frac{m-n}{n}}Q + \frac{m(m-n)}{n.2n}P^{\frac{m-2n}{n}}Q^2 + \frac{m(m-n)(m-2n)}{n.2n.3n}P^{\frac{n-3n}{n}}Q^3 + \text{rc.}$$

in unendliche Reihen: dann es laufen hier die Glieder, wenn $\frac{m}{n}$ keine ganze positive Zahl ist, ohne Ende fort. Setzt man nun statt m und n bestimmte Zahlen, so ist

$$(P+Q)^{\frac{1}{2}} = P^{\frac{1}{2}} + \tfrac{1}{2} P^{-\frac{1}{2}} Q - \frac{1.1}{2.4} P^{-\frac{3}{2}} Q^2 + \frac{1.1.3}{2.4.6} P^{-\frac{5}{2}} Q^3 - \text{ꝛc.}$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{2}} = P^{-\frac{1}{2}} - \tfrac{1}{2} P^{-\frac{3}{2}} Q + \frac{1.3}{2.4} P^{-\frac{5}{2}} Q^2 - \frac{1.3.5}{2.4.6} P^{-\frac{7}{2}} Q^3 + \text{ꝛc.}$$

$$(P+Q)^{\frac{1}{3}} = P^{\frac{1}{3}} + \tfrac{1}{3} P^{-\frac{2}{3}} Q - \frac{1.2}{3.6} P^{-\frac{5}{3}} Q^2 + \frac{1.2.5}{3.6.9} P^{-\frac{8}{3}} Q^3 - \text{ꝛc.}$$

$$(P+Q)^{-\frac{1}{3}} = P^{-\frac{1}{3}} - \tfrac{1}{3} P^{-\frac{4}{3}} Q + \frac{1.4}{3.6} Q^{-\frac{7}{3}} Q^2 - \frac{1.4.7}{3.6.9} P^{-\frac{10}{3}} Q^3 + \text{ꝛc.}$$

$$(P+Q)^{\frac{2}{3}} = P^{\frac{2}{3}} + \tfrac{2}{3} P^{-\frac{1}{3}} Q - \frac{2.1}{3.6} P^{-\frac{4}{3}} Q^2 + \frac{2.1.4}{3.6.9} P^{-\frac{7}{3}} Q^3 - \text{ꝛc.}$$

u. s. f.

## §. 72.

Die Glieder dieser Reihen folgen also auf die Art auf einander, daß man ein jedes aus dem vorhergehenden erhalten kann. Denn ist irgend ein Glied der Reihe, welche aus $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ entspringt, $= M P^{\frac{m-kn}{n}} Q^k$, so ist das folgende $= \frac{m-kn}{(k+1)n} M P^{\frac{m-(k+1)n}{n}} Q^{k+1}$. Man muß aber hierbey bemerken, daß in jedem folgenden Gliede der Exponent von P um eins abnimmt, und dagegen der Exponent von Q um eins wächset. Und damit die Anwendung auf einzelne Fälle leichter werde, so kann man die allgemeine Form $(P+Q)^{\frac{m}{n}}$ so ausdrucken $P^{\frac{m}{n}}\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$; denn entwickelt man den Ausdruck $\left(1+\frac{Q}{P}\right)^{\frac{m}{n}}$, und multiplicirt man die daraus entspringende Reihe durch $P^{\frac{m}{n}}$, so erhält man dadurch die vorhergehende. Ferner kann man, da m nicht bloß die ganzen Zahlen, sondern auch jeden Bruch vorstellt, n immer der Einheit gleich setzen. Thut man nun dieses, so wird, wenn man $\frac{Q}{P}$, welches eine Funktion von z ist, $= Z$ setzt,

$$(1+Z)^m = 1 + \frac{m}{1}Z + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2}Z^2 + \frac{m(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}Z^3 + \text{ꝛc.}$$

Um aber die folgenden Progressions-Gesetze zu finden, ist es dienlich, auch diese Verwandlung der allgemeinen Formel in eine Reihe zu bemerken

$$(1+Z)^{m-1} = 1 + \frac{(m-1)}{1}Z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}Z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}Z^3 + \text{ꝛc.}$$

## §. 73.

Es sey also zuvörderst $Z = \alpha z$, so ist $(1+\alpha z)^{m-1} = 1 + \frac{m-1}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \cdot 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\alpha^3 z^3 + \text{ꝛc.}$ Setzt man nun anstatt dieser Reihe die allgemeine Formel:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots\ldots + Mz^{n-1} + Nz^n + \text{u. s. f.}$$

so wird ein jeder Coefficient N aus dem vorhergehenden M auf die Art bestimmt, daß $N = \frac{m-n}{n}\alpha M$ ist. So ist, wenn man $n = 1$ setzt, da alsdann $M = 1$ ist, $N = A = \frac{m-1}{1}\alpha$; ferner, wenn man $n = 2$ setzt, da alsdann $M = A = \frac{m-1}{1}\alpha$ ist, $N = B = \frac{m-2}{2}\alpha M =$

(m—

$\frac{(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2}\alpha^2$; und eben so $C = \frac{m-3}{3}\alpha B$ $= \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\alpha^3$ u. s. f. gerade so, als wir die Coefficienten in der vorhin gefundenen Reihe gehabt haben.

## §. 74.

Ferner sey $Z = \alpha z + \beta zz$. Alsdann ist $(1 + \alpha z + \beta zz)^{m-1} =$ $1 + \frac{(m-1)}{1}(\alpha z + \beta zz) + \frac{(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2}(\alpha z + \beta zz)^2 +$ u. s. f.

Ordnet man nun die Glieder nach den Potestäten von $z$, so wird $(1 + \alpha z + \beta zz)^{m-1} =$

$$1 + \frac{(m-1)}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-3)(m-2)}{1\ .\ 2\ .\ 3}\alpha^3 z^3 + \text{rc.}$$
$$+ \frac{(m-1)}{1}\beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1\ .\ 2} 2\alpha\beta z^3 + \text{rc.}$$

Setzt man daher anstatt dieser Reihe die allgemeine Formel: $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots . Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n +$ rc. so wird jeder Coefficient aus den beyden vorhergehenden auf die Art bestimmt, daß $N = \frac{m-n}{n}\alpha M + \frac{2m-n}{n}\beta L$ ist; und hiernach lassen sich die Coefficienten aller Glieder aus dem ersten $= 1$ finden. Es ist nemlich

$$A = \frac{(m-1)}{1}\alpha$$

$$B = \frac{(m-2)}{2}\alpha A + \frac{(2m-2)}{2}\beta$$

$$C = \frac{(m-3)}{3}\alpha B + \frac{(2m-3)}{3}\beta A$$

$$D = \frac{(m-4)}{4}\alpha C + \frac{(2m-4)}{4}\beta B$$

u. s. f.

 §. 75.

§. 75.

Wenn $Z = \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3$ ist, so ist

$$(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3)^{m-1} = 1 + \frac{(m-1)}{1}(\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3) + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2}(\alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3)^2 + \text{etc.}$$

und ordnet man die Glieder dieser Reihe nach den Potestäten von $z$, so erhält man

$$1 + \frac{(m-1)}{1}\alpha z + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2}\alpha^2 z^2 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3}\alpha^3 z^3 + \text{etc.}$$
$$+ \frac{(m-1)}{1}\beta z^2 + \frac{(m-1)(m-2)}{1 \,.\, 2} 2\alpha\beta z^3 + \text{etc.}$$
$$+ \frac{(m-1)}{1}\gamma z^3 + \text{etc.}$$

Damit aber das Gesetz dieser Reihe desto besser in die Augen falle, so setze man an ihrer Stelle
$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + \ldots + Kz^{n-3} + Lz^{n-2} + Mz^{n-1} + Nz^n$.
Hier wird der Coefficient eines jeden Gliedes aus den drey vorhergehenden auf die Art bestimmt, daß $N = \frac{(m-n)}{n}\alpha M + \frac{(2m-n)}{n}\beta L + \frac{(3m-n)}{n}\gamma K$ ist. Da nun das erste Glied $=1$, und die vor demselben vorhergehenden $=0$ sind; so ist

$$A = \frac{(m-1)}{1}\alpha$$

$$B = \frac{(m-2)}{2}\alpha A + \frac{(2m-2)}{2}\beta$$

$$C = \frac{(m-3)}{3}\alpha B + \frac{(2m-3)}{3}\beta A + \frac{(3m-3)}{3}\gamma$$

$$D = \frac{(m-4)}{4}\alpha C + \frac{(2m-4)}{4}\beta B + \frac{(3m-4)}{4}\gamma A$$

$$E = \frac{(m-5)}{5}\alpha D + \frac{(2m-5)}{5}\beta C + \frac{(3m-5)}{5}\gamma B$$

u. s. f.

§. 76.

Ueberhaupt also werden, wenn

$$(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{ꝛc.})^{m-1} = 1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + \text{ꝛc.}$$

gesetzt wird, die Coefficienten eines jeden einzeln Gliedes aus dem vorhergehenden auf die Art bestimmt, daß

$$A = \frac{(m-1)}{1}\alpha$$

$$B = \frac{(m-2)}{2}\alpha A + \frac{(2m-2)}{2}\beta$$

$$C = \frac{(m-3)}{3}\alpha B + \frac{(2m-3)}{3}\beta A + \frac{(3m-3)}{3}\gamma$$

$$D = \frac{(m-4)}{4}\alpha C + \frac{(2m-4)}{4}\beta B + \frac{(3m-4)}{4}\gamma A + \frac{(4m-4)}{4}\delta$$

$$E = \frac{(m-5)}{5}\alpha D + \frac{(2m-5)}{5}\beta C + \frac{(3m-5)}{5}\gamma B + \frac{(4m-5)}{5}\delta A + \frac{(5m-5)}{5}\varepsilon$$

u. s. f.

Es wird nemlich ein jedes Glied aus so viel vorhergehenden bestimmt, als man Buchstaben $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, u. s. f. in der Funktion von $z$ hat, deren Potestät in eine wiederkehrende Reihe verwandelt wird. Uebrigens stimmt dieses Gesetz mit dem §. 68, wo wir die ähnliche Formel $(1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \text{u. s. w.})^{-m-1}$ in eine unendliche Reihe auflösten, überein. Denn wenn man — m anstatt m setzt, und die Buchstaben $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, u. s. f. negativ nimmt, so erhält man in beyden Fällen durchaus einerley Reihen. Inzwischen ist hier nicht der Ort, dieses Gesetz aus allgemeinen Gründen zu beweisen, dies kann erst dann auf eine bequeme Art geschehen, wenn die Anfangsgründe der Differential-Rechnung vorausgesetzt werden können: jetzt ist es hinlänglich, die Richtigkeit desselben durch die Anwendung auf alle darunter begriffene einzelne Fälle gezeigt zu haben.