Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Fünftes Capitel. Von den Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53541

Fünftes Capitel.

Von den Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen.

§. 77.

Ob wir gleich bisher mehrere veränderliche Größen betrachtet haben, so waren dieselben doch immer von der Art, daß sie insgesammt Funktionen von einer einzigen veränderlichen Größe waren, und daß, wenn man eine davon bestimmte, dadurch zugleich alle übrigen bestimmt wurden. Allein die veränderlichen Größen, die wir nunmehr betrachten werden, sind so beschaffen, daß keine von der andern abhängt, und daß bey der Bestimmung der einen die übrigen nichts desto weniger unbestimmt und veränderlich bleiben. Dergleichen veränderliche Größen, z. B. x, y, z, stimmen also in Ansehung ihrer Bedeutung mit einander überein, weil eine jede alle bestimmte Werthe unter sich begreift; allein, wenn man sie unter einander vergleicht, so findet darunter die größte Verschiedenheit statt; indem, wenn die eine z einen bestimmten Werth erhält, die übrigen x und y noch eben so weit sich erstrecken, als vorher. Der Unterschied zwischen von einander abhängigen und von einander unabhängigen veränderlichen Größen besteht also darin, daß die Bestimmung der einen bey jenen zugleich die Bestimmung aller übrigen nach sich zieht, bey diesen aber auf die Bedeutung der übrigen nicht den geringsten Einfluß hat.

§. 78.

Eine Funktion zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen x, y, z, ist daher ein Ausdruck, der auf irgend eine Art aus diesen Größen zusammengesetzt ist.

Es ist also $x^3 + xyz + az^2$ eine Funktion dreyer veränderlichen Größen x, y, z; und es bleibt diese Funktion, wenn auch darin eine veränderliche Größe z. B. z bestimmt, d. h. an ihrer Stelle eine beständige Größe gesetzt wird, noch immer eine veränderliche Größe, nemlich eine Funktion von x und y; ja wenn auch außer z noch y bestimmt wird, so ist sie doch noch eine Funktion von x. Es erhält daher eine solche Funktion mehrerer veränderlichen Größen nicht eher einen bestimmten Werth, als bis alle einzelne veränderlichen Größen derselben bestimmt sind. Da nun jede veränderliche Größe auf unendlich viele Arten bestimmt werden kann, so muß eine Funktion zweyer veränderlicher Größen, da sie für jede dieser Größen unendlich vieler Bestimmungen fähig ist, auf unendliche mal unendlich viele Arten bestimmt werden können. Bey einer Funktion dreyer veränderlichen Größen ist aus eben dem Grunde die Anzahl der Bestimmungen noch unendlich vielmal größer, und auf eine ähnliche Art wächst dieselbe, wenn noch mehr veränderliche Größen da sind.

§. 79.

Man theilt die Funktionen mehrerer veränderlichen Größen, eben so wie die Funktionen einer einzigen, sehr bequem in algebraische und transcendente ein.

Unter jenen versteht man solche, deren Zusammensetzung bloß auf den algebraischen Operationen beruht; unter diesen aber diejenigen, zu welchen zugleich transcendente Operationen erfordert werden. Man könnte diese letztern von

neuem

neuem darnach eintheilen, daß die transcendenten Operationen entweder alle, oder nur einige, oder gar nur eine einzige veränderliche Größe angehen können. Man nehme z. B. den Ausdruck $zz + y \log. z$. Dies ist allerdings eine transcendente Funktion von y und z, weil sie den Logarithmen von z enthält; aber sie ist solches gleichwohl nur in einem niedrigen Grade, weil bey der Bestimmung der veränderlichen Größe z eine algebraische Funktion von y übrig bleibt. Indeß wäre es von keinem Nutzen, wenn man durch dergleichen Unterabtheilungen die Untersuchung weitläuftiger machte.

§. 80.

Ferner werden die algebraischen Funktionen in rationale und irrationale, und die rationalen wieder in ganze und gebrochene eingetheilt.

Was man unter einer jeden dieser Arten von Funktionen zu verstehen habe, ist aus dem ersten Capitel [§. 8 und 9] bekannt. Eine Funktion ist nemlich alsdann rational, wenn keine von den veränderlichen Größen, von welchen sie eine Funktion ist, ein Wurzelzeichen vor sich hat, und eine ganze Funktion, wenn darin keine veränderlichen Brüche vorkommen, so wie sie in diesem Falle ein Bruch ist. Der allgemeine Ausdruck einer ganzen Funktion zweyer veränderlichen Größen ist daher: $\alpha + \beta y + g z + \delta y^2 + \epsilon yz + \zeta z^2 + \eta z^3 + \theta y^2 z + \iota y z^2 + \kappa z^3 +$ u. s. f.; und wenn P und Q dergleichen ganze Funktionen entweder zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen bedeuten, so ist $\frac{P}{Q}$ ein allgemeiner Ausdruck der gebrochenen Funktionen. Die irrationalen Funktionen endlich sind auch hier wieder entweder entwickelte oder verwickelte; jene werden vermittelst der Wurzelzeichen abgesondert dargestellt, diese aber in einer unauflösbaren Gleichung gegeben. So ist V eine verwickelte irrationale Funktion von y und z, wenn $V^5 = (ayz + z^3)V^2 + (y^4 + z^4)V + y^5 + 2ayz^3 + z^5$ ist.

§. 81.

Auch findet bey den gegenwärtigen Funktionen die Eintheilung in einförmige und vielförmige eben so gut statt, als bey den Funktionen einer einzigen veränderlichen Größe.

So sind die rationalen Funktionen einförmige, weil sie, wenn man jede ihrer veränderlichen Größen bestimmt, nicht mehr als einen Werth geben. Läßt man nun P, Q, R, S, u. s. f. rationale oder einförmige Funktionen von x, y, z bedeuten, so ist V eine zweyförmige Funktion eben dieser Größen, wenn $V^2 - PV + Q = 0$ ist; denn in diesem Falle erhält V, man mag x, y und z, was für einen bestimmten Werth man will ertheilen, nie Einen, sondern allezeit einen doppelten bestimmten Werth. Auf eine ähnliche Art ist V eine dreyförmige Funktion, wenn $V^3 - PV^2 + QV - R = 0$; und eine vierförmige, wenn $V^4 - PV^3 + QV^2 - RV + S = 0$ ist. Hieraus läßt sich leicht beurtheilen, wie es mit den übrigen vielförmigen Funktionen beschaffen ist.

§. 82.

So wie, wenn man eine Funktion Einer veränderlichen Größe $= 0$ setzt, dadurch die veränderliche Größe z einen bestimmten, einfachen entweder oder vielfachen, Werth erhält: so wird, wenn man eine Funktion zweyer veränder-

lichen

lichen Größen x und z gleich o setzt, jede von diesen veränderlichen Größen durch die andere bestimmt, und daher eine Funktion derselben, ohnerachtet sie vorher nicht von einander abhiengen. Auf eine ähnliche Art wird, wenn man eine Funktion dreyer veränderlichen Größen x, y und $z = o$ setzt, jede dieser veränderlichen Größen durch die beyden übrigen bestimmt, und eine Funktion derselben. Eben das geschieht, wenn eine Funktion nicht der Null, sondern einer beständigen Größe, oder auch einer andern Funktion gleich gesetzt wird; denn es wird aus jeder Gleichung, so viel veränderliche Größen sie auch enthalten mag, doch immer die eine veränderliche Größe durch die übrigen bestimmt, und eine Funktion derselben: zwey verschiedene Gleichungen aber zwischen ein und denselben veränderlichen Größen bestimmen je zwey und zwey davon durch die übrigen u. s. f.

§. 83.

Vorzüglich merkwürdig aber ist die Eintheilung der Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlichen Größen in homogene und heterogene.

Homogen ist eine Funktion, wenn darin allenthalben eben dieselbe Anzahl von Dimensionen der veränderlichen Größen befindlich ist; und heterogen, wenn die Anzahl dieser Dimensionen verschieden ist. Es wird aber hierbey eine jede einzelne veränderliche Größe für eine Dimension, das Quadrat davon, oder ein Produkt aus zweyen, für zwey Dimensionen, ein Produkt aus dreyen, sie mögen nun einander gleich oder ungleich seyn, für drey Dimensionen gerechnet, u. s. w. und auf die beständigen Größen sieht man bey der Zählung der Dimensionen gar nicht. Auf diese Art legt man den Ausdrücken αy; βz eine; diesen, αy^2; βyz; γz^2, zwey; den folgenden, αy^3; $\beta y^2 z$; $\gamma y z^2$; δz^3, drey;

drey; und diesen αy^4; $\beta y^3 z$; $\gamma y^2 z^2$; $\delta y z^3$; ϵz^4, vier Dimensionen bey, u. s. f.

§. 84.

Wir wollen diese Eintheilungen zuvörderst auf die ganzen Funktionen, und zwar bloß auf die ganzen Funktionen zweyer veränderlichen Größen anwenden, indem mehr veränderliche Größen hier keinen Unterschied machen.

Es ist also eine ganze Funktion eine homogene Funktion, wenn sich in allen ihren Gliedern, einzeln genommen, eine gleiche Anzahl von Dimensionen findet.

Diese Funktionen theilt man wieder sehr bequem nach der Anzahl der Dimensionen ein, welche man allenthalben in ihnen antrifft. So ist $\alpha y + \beta z$ die allgemeine Form der ganzen Funktion von einer Dimension; $\alpha y^2 + \beta y z + \gamma z^2$ hingegen die allgemeine Form der Funktionen von zwey Dimensionen; ferner $\alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3$ die allgemeine Form der Funktionen von drey Dimensionen; $\alpha y^4 + \beta y^3 z + \gamma y^2 z^2 + \delta y z^3 + \epsilon z^4$ die allgemeine Form der Funktionen von vier Dimensionen; u. s. f. Nach der Analogie kann man daher auch eine beständige Größe α, ohne alle veränderliche Größe, eine Funktion von keiner Dimension nennen.

§. 85.

Eine gebrochene Funktion ferner ist homogen, wenn ihr Zähler und Nenner homogene Funktionen sind.

So ist dieser Bruch $\frac{ayy + bzz}{\alpha y + \beta z}$ eine homogene Funktion von y und z. Was aber die Anzahl der Dimensionen bey dergleichen Funktionen betrifft, so erhält man sie, wenn man die Zahl der Dimensionen im Nenner von der Zahl der

der Dimensionen im Zähler abzieht; so daß also der angeführte Bruch eine Funktion von einer Dimension, und $\frac{y^5 + z^5}{yy + zz}$ eine Funktion von drey Dimensionen ist. Wenn daher der Zähler und Nenner gleiche Mengen von Dimensionen enthalten, so wird der Bruch eine Funktion von keiner Dimension, wie solches bey $\frac{y^3 + z^3}{yyz}$, desgleichen bey $\frac{y}{z}$; $\frac{azz}{yy}$; $\frac{\beta y^3}{z^3}$, statt findet: und ist die Anzahl der Dimensionen im Nenner größer als im Zähler, so wird die Zahl der Dimensionen des Bruchs negativ. So ist z. B. $\frac{y}{zz}$ eine Funktion von -1 Dimension; $\frac{y + z}{y^4 + z^4}$ eine Funktion von -3 Dimensionen; $\frac{1}{y^5 + ayz^4}$ eine Funktion von -5 Dimensionen, weil in dem Zähler gar keine Dimension anzutreffen ist. Uebrigens erhellet von selbst, daß mehrere homogene Funktionen, die alle eine und dieselbe Anzahl von Dimensionen haben, zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, wieder eine homogene Funktion von eben der Anzahl von Dimensionen geben. So ist der Ausdruck $\alpha y + \frac{\beta zz}{y} + \frac{\gamma y^4 + \delta z^4}{yyz + yzz}$ eine Funktion von einer, dieser hingegen $\alpha + \frac{\beta y}{z} + \frac{\gamma zz}{yy} + \frac{yy + zz}{yy - zz}$ eine Funktion von gar keiner Dimension.

§. 86.

Was bisher von den homogenen Funktionen gesagt worden ist, erstreckt sich auch auf die irrationalen Funktionen. Ist daher P irgend eine homogene Funktion, und die Zahl

ihrer

ihrer Dimensionen also n: so ist $\sqrt{P}$ eine Funktion von $\frac{1}{2}$ n, $\sqrt[3]{P}$ eine Funktion von $\frac{1}{3}$ n, und überhaupt $P^{\frac{\mu}{\nu}}$ eine Funktion von $\frac{\mu}{\nu}$ n Dimensionen. Es ist folglich $\sqrt{(yy + zz)}$ eine Funktion von einer, $\sqrt[3]{(y^9 + z^9)}$ eine Funktion von dreyen, $(yz + zz)^{\frac{3}{4}}$ eine Funktion von $\frac{3}{2}$ Dimensionen, und $\frac{yy + zz}{\sqrt{(y^4 + z^4)}}$ eine Funktion von keiner Dimension. Dieses mit dem vorhergehenden zusammengenommen, so erhellet, daß

$$\frac{1}{y} + \frac{y\sqrt{(yy+zz)}}{z^3} - \frac{y}{\sqrt[3]{(y^6 - z^6)}} + \frac{y\sqrt{z}}{zz\sqrt{y} + \sqrt{(y^5 + z^5)}}$$

eine homogene Funktion von -1 Dimension ist.

§. 87.

Ob eine verwickelte irrationale Funktion homogen sey oder nicht? läßt sich hieraus leicht erkennen. Es sey V eine solche verwickelte Funktion, und $V^3 + PV^2\ QV + R = 0$, so daß P, Q und R Funktionen von y und z sind. Hier fällt nun zuvörderst in die Augen, daß V keine homogene Funktion seyn kann, wofern nicht auch P, Q und R homogene Funktionen sind. Setzt man ferner die Anzahl der Dimensionen in V gleich n, so ist V^2 eine Funktion von 2n, und V^3 eine Funktion von 3n Dimensionen; und da nun allenthalben eben dieselbe Anzahl von Dimensionen statt finden muß, so muß P eine Funktion von n, Q eine Funktion von 2n, und R eine Funktion von 3n Dimensionen seyn. Wenn also P, Q und R in der Ordnung, in welcher sie hier stehen, homogene Funktionen von n, 2n, 3n Dimensionen, sind,

sind, so schließt man daraus, daß V eine Funktion von n Dimensionen sey. Ist z. B. $V^5 + (y^4 + z^4) V^3 + a y^8 V - z^{10} = 0$; so ist V eine homogene Funktion von zwey Dimensionen von y und z.

§. 88.

Wenn V eine homogene Funktion von n Dimensionen von y und z ist, und man darin allenthalben $y = uz$ setzt: so verwandelt sich die Funktion V in ein Produkt aus der Dignität z^n in eine Funktion der veränderlichen Größe u.

Es werden nemlich durch die Substitution $y = uz$ in alle einzelne Glieder eben so hohe Potestäten von z gebracht, als sie vorher von y enthielten: und da die Anzahl der Dimensionen von y und z in jedem Gliede n war, so muß nun die veränderliche Größe z allenthalben n Dimensionen haben, und also in jedem Gliede die Dignität z^n seyn. Nunmehr ist daher auch die Funktion V durch z^n theilbar, und der Quotient wird, wenn man wirklich theilt, eine Funktion von der einzigen veränderlichen Größe u. Um dieses zuvörderst an einer ganzen Funktion zu zeigen, so sey $V = \alpha y^3 + \beta y^2 z + \gamma y z^2 + \delta z^3$. Setzt man hier $y = uz$, so wird $V = z^3 (\alpha u^3 + \beta u^2 + \gamma u + \delta)$. Aber auch von den Brüchen gilt diese Behauptung. Denn es sey $V = \frac{\alpha y + \beta z}{yy + zz}$, und also eine Funktion von -1 Dimension. Macht man wieder $y = uz$, so wird $V = z^{-1} \left(\frac{\alpha u + \beta}{uu + 1}\right)$. Ja selbst die irrationalen Funktionen sind nicht davon ausgeschlossen. Denn ist $V = \frac{y + \sqrt{(yy + zz)}}{z\sqrt{(y^3 + z^3)}}$, und aso eine Funktion von $-\frac{3}{2}$ Dimensionen: so wird, wenn man $y = uz$

setzt,

setzt, $V = z^{-\frac{3}{2}} \left(\frac{u + \sqrt{(uu + 1)}}{\sqrt{(u^3 + 1)}}\right)$. Auf diese Art lassen sich daher die homogenen Funktionen Zweyer veränderlichen Größen in Funktionen von Einer veränderlichen Größe verwandeln; denn die Potestät von z ist, da sie ein Faktor ist, nicht mit in der Funktion von u enthalten.

§. 89.

Wenn also V eine homogene Funktion der beyden veränderlichen Größen y und z von keiner Dimension ist, so wird sie, wenn man $y = uz$ setzt, in eine reine Funktion einer einzigen veränderlichen Größe u verwandelt.

Denn da die Zahl der Dimensionen $= 0$ ist, so wird die Dignität von z, womit die Funktion von u multiplicirt werden muß, $z^0 = 1$, und in diesem Falle fällt die veränderliche Größe z ganz aus der Rechnung weg. Ist z. B. $V = \frac{y + z}{y - z}$, so wird, wenn man $y = uz$ setzt, $V = \frac{u + 1}{u - 1}$ und ist die Funktion irrational, und z. B. $V = \frac{y - \sqrt{(yy - zz)}}{z}$, so wird, wenn man $y = uz$ setzt, $V = u - \sqrt{(uu - 1)}$.

§. 90.

Eine jede ganze homogene Funktion zweyer veränderlichen Größen y und z kann in so viele einfache Faktoren von der Form $\alpha y + \beta z$ aufgelöset werden, als sie Dimensionen hat.

Denn weil die Funktion homogen ist, so wird sie durch die Substitution $y = uz$ in ein Produkt aus z^n in eine ganze Funktion von u verwandelt, welche folglich in einfache Faktoren von der Form $\alpha u + \beta$ aufgelöset werden kann. Multiplicirt man nun alle diese Faktoren mit z, so

wird

wird ein jeder auf die Form $\alpha uz + \beta z = \alpha y + \beta z$ gebracht, indem $uz = y$ ist; und da z^n ein Multiplicator ist, so entstehen daher so viel solcher Faktoren, als n Einheiten hat. Es sind aber diese einfachen Faktoren entweder reell oder imaginär, d. h. die Coefficienten α und β sind entweder reelle oder imaginäre Größen.

Hieraus folgt also, daß die Funktion von zwey Dimensionen $ayy + byz + czz$ zwey einfache Faktoren von der Form $\alpha y + \beta z$; die Funktion $ay^3 + by^2z + cyz^2 + dz^3$ aber drey einfache Faktoren von der Form $\alpha y + \beta z$ hat; und auf eine ähnliche Art verhält es sich ferner mit den übrigen ganzen homogenen Funktionen von mehrern Dimensionen. *)

*) Die entwickelte Form einer ganzen homogenen Funktion von y und z ist:

$$Ay^n + By^{n-1}z + Cy^{n-2}z^2 + Dy^{n-3}z^3 + \ldots + Oz^n$$

und selbige verwandelt sich durch die Substitution $y = uz$ in

$$z^n (Au^n + Bu^{n-1} + Cu^{n-2} + Du^{n-3} + \ldots\ldots + O)$$

Da nun

$$Au^n + Bu^{n-1} + Cu^{n-2} + Du^{n-3} + \ldots + O = A \times (u + a)(u + b)(u + c)(u + d) \text{ ꝛc.}$$

ist: so wird

$$z^n(Au^n + Bu^{n-1} + Cu^{n-2} + Du^{n-3} + \ldots + O) = Az^n(u + a)(u + b)(u + c)(u + d) \text{ ꝛc.}$$

und hiervon sind die Faktoren

$$uz\sqrt[n]{A} + az\sqrt[n]{A};$$

$$uz\sqrt[n]{A} + bz\sqrt[n]{A};$$

$$uz\sqrt[n]{A} + cz\sqrt[n]{A};$$

$$uz\sqrt[n]{A} + dz\sqrt[n]{A}; \text{ u. s. w.}$$

Setzt man also in diesen Faktoren $uz = y$, $\sqrt[n]{A} = \alpha$, und $\sqrt[n]{A}$, mit a oder b oder c oder d ꝛc. multiplicirt, $= \beta$, so erhält man für einen jeden die Form $\alpha y + \beta z$.

§. 91.

So wie daher der Ausdruck $\alpha y + \beta z$ eine allgemeine Form für die ganzen Funktionen von einer Dimension ist: so ist $(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)$ eine allgemeine Form der ganzen Funktionen von zwey, und $(\alpha y + \beta z)(\gamma y + \delta z)(\varepsilon y + \zeta z)$ eine allgemeine Form der ganzen Funktionen von drey Dimensionen; und auf eine ähnliche Art kann man jede ganze homogene Funktion durch ein Produkt aus so viel Faktoren von der Form $\alpha y + \beta z$ darstellen, als die Funktion Dimensionen hat. Man findet aber diese Faktoren auf eben die Art durch die Auflösung der Gleichungen, auf welche nach dem Obigen die einfachen Faktoren der ganzen Funktionen Einer veränderlichen Größe gefunden werden. Uebrigens erstreckt sich diese Eigenschaft der homogenen Funktionen zweyer veränderlichen Größen nicht auf die homogenen Funktionen dreyer oder mehrerer veränderlichen Größen: denn die allgemeine Form dieser Funktionen von nicht mehr als zwey Dimensionen, nemlich $\alpha yy + byz + cyx + dxz + exx + fzz$, läßt sich nicht in jedem Falle auf ein Produkt von der Form $(\alpha y + \beta z + \gamma x)(\delta y + \varepsilon z + \zeta x)$ bringen; und noch weniger ist man im Stande die Funktionen von noch mehrern Dimensionen in dergleichen Produkte zu verwandeln.

§. 92.

Aus dem, was von den homogenen Funktionen gesagt worden ist, erhellet zugleich, was man unter einer heterogenen Funktion zu verstehen hat; dies sind nemlich solche, wo in den einzelnen Gliedern nicht allenthalben eben dieselbe Anzahl von Dimensionen statt findet. Es lassen sich aber die heterogenen Funktionen nach der Anzahl der in ihnen vorkommenden verschiedenen Dimensionen in Arten eintheilen. So ist eine Funktion zweytheilig, wenn darin eine doppelte Anzahl von Dimensionen statt findet, so daß man sie als ein Aggregat zweyer homogenen Funktionen, die in der Zahl ihrer Dimensionen verschieden sind, betrachten kann. So ist $y^5 + 2y^3z^2 + yy + zz$ eine zweytheilige Funktion, weil sie theils fünf, theils zwey Dimensionen enthält. Eine dreytheilige Funktion hingegen ist eine solche, worin eine dreyfache Anzahl von Dimensionen angetroffen wird, oder welche in drey homogene Funktionen zerlegt werden kann; z. B. $y^6 + y^2z^2 + z^4 + y - z$. Außerdem giebt es aber auch gebrochene und irrationale heterogene Funktionen, die so vermischt sind, daß sie in keine homogene Funktionen aufgelöset werden können; z. B. $\frac{y^3 + ayz}{by + zz}$; $\frac{a + \sqrt{(yy + zz)}}{yy - bz}$.

§. 93.

Bisweilen kann man eine heterogene Funktion durch eine geschickte Substitution, entweder für eine oder für beyde veränderliche Größen, in eine homogene verwandeln; indeß ist es nicht leicht, die Fälle anzugeben, wo solches geschehen kann. Es wird daher hinlänglich seyn, einige Beyspiele anzuführen, wobey eine solche Reduction statt findet. Ist also die Funktion $y^5 + zzy + y^3z + \frac{z^3}{y}$ gegeben: so fällt bey einiger Ueberlegung in die Augen, daß man dieselbe durch die Substitution $z = xx$ in eine homogene Funktion verwandeln kann; indem man dadurch $y^5 +$ $x^4y + y^3xx + \frac{x^6}{y}$ erhält, welches eine homogene Funktion von fünf Dimensionen von x und y ist. Ferner wird die Funktion $y + y^2x + y^3xx + y^5x^4 + \frac{a}{x}$ in eine homogene Funktion verwandelt, wenn man $x = \frac{1}{z}$ setzt; denn man erhält dadurch diese Funktion von einer Dimension $y + \frac{yy}{z} + \frac{y^3}{zz} + \frac{y^5}{z^4} + az$. Wenn man aber seinen Endzweck nicht durch eine so einfache Substitution erreichen kann, so ist dieses Geschäft mit viel größern Schwierigkeiten verknüpft.

§. 94.

Auch verdient noch die sehr gebräuchliche Eintheilung der ganzen Funktionen nach ihrer Ordnung, wobey man auf die größte Zahl der in der Funktion vorkommenden Dimensionen sieht, besonders bemerkt zu werden. So ist $xx + yy + zz + ay - aa$ eine Funktion von der zweyten Ordnung, weil darin zwey Dimensionen vorkommen; und $y^4 + y^3 - ay^2z + abyz - aayy + b^4$ eine Funktion von der vierten Ordnung. Auf diese Eintheilung nimmt man vorzüglich in der Lehre von den krummen Linien Rücksicht.

§. 95.

Endlich ist noch die Eintheilung der ganzen Funktionen in complexe und incomplexe übrig. Complex nennt man eine Funktion, wenn man dieselbe in rationale Faktoren auflösen kann, oder wenn sie ein Produkt aus zweyen oder meh-

mehrern rationalen Funktionen ist. Ein Beyspiel einer solchen Funktion giebt $y^4 - z^4 + 2az^3 - 2byzz - aazz + 2abzy - bbyy$, welches ein Produkt aus den beyden Funktionen $(yy + zz - az + by)(yy - zz + az - by)$ ist. Auf diese Weise haben wir gesehen, daß eine jede ganze homogene Funktion von nicht mehr als zwey veränderlichen Größen eine complexe Funktion ist, weil sie so viel einfache Faktoren von der Form $ay + \beta z$ hat, als sie Dimensionen enthält. Incomplex ist hingegen eine ganze Funktion, wenn sie auf keine Art in rationale Faktoren aufgelöset werden kann; wie $yy + zz - aa$, denn davon fällt solches bald in die Augen. Uebrigens ergiebt es sich bey der Aufsuchung der Divisoren, ob eine Funktion complex ist oder nicht.