Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Sechstes Capitel. Von den Exponential-Größen und den Logarithmen.

Sechstes Capitel.

Von den Exponential-Größen und den Logarithmen.

Auch bey diesem und dem folgenden Capitel hat es mir besser geschienen, alle dabey nöthigen Zusätze in den schon öfters gedachten Anhang zu bringen. Man findet sie daselbst unter der vierten Nummer.

§. 96.

Obgleich die Betrachtung der transcendenten Funktionen eigentlich das Geschäft der Integral-Rechnung ist: so ist es dennoch nützlich, vorher einige der leichtesten Arten, und die zugleich zu mehrern Untersuchungen den Weg bahnen, zu erwägen. Dahin gehören nun zuvörderst die Exponential-Größen, oder die Potestäten, deren Exponent eine veränderliche Größe ist: denn daß dergleichen Größen nicht zu den algebraischen Funktionen gehören, ist daraus klar, weil in diesen keine andre als bloß beständige Exponenten vorkommen dürfen. Es giebt aber verschiedene Arten von Exponential-Größen, je nachdem entweder bloß der Exponent, oder außerdem auch die zu einer Protestät erhobene Größe veränderlich ist. Zu jenen gehört a^z; zu diesen hingegen y^z. Ja es kann auch der Exponent eine Exponential-Größe seyn, wie in a^{a^z}; a^{y^z}; y^{a^z}; x^{y^z}. Wir setzen indeß jetzt diese Eintheilung bey Seite, weil man die

Natur

Natur der Exponential-Größen durch die Betrachtung der Form a^z hinlänglich zu erkennen im Stande ist.

§. 97.

Es sey also die Exponential-Größe a^z gegeben, welche eine Potestät der beständigen Größe a mit einem veränderlichen Exponenten ist. Da nun der Exponent z alle bestimmte Zahlen unter sich begreift, so ist zuvörderst klar, daß man, wenn man dafür nach und nach alle ganze positive Zahlen setzt, für a^z die bestimmten Werthe, a^1; a^2; a^3; a^4; a^5; a^6; u. s. f. erhält. Setzt man hingegen für z nach und nach die negativen Zahlen -1; -2; -3; u. s. f. so bekommt man $\frac{1}{a}$; $\frac{1}{a^2}$; $\frac{1}{a^3}$; $\frac{1}{a^4}$; u. s. f. und wenn $z = 0$ ist, so ist allemal $a^0 = 1$. Setzt man für z gebrochene Zahlen, wie $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{2}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{3}{4}$; u. s. f. so entstehen dadurch die Werthe $\sqrt{a}$; $\sqrt[3]{a}$; $\sqrt[3]{aa}$; $\sqrt[4]{a}$; $\sqrt[4]{a^3}$ u. s. f. Diese Werthe sind an sich betrachtet vielfach, weil die Extraction der Wurzel allezeit auf vielförmige Werthe, führt: allein man pflegt dafür nur immer die Hauptwerthe, d. h. die reellen und positiven zu nehmen, weil man die Größe a^z als eine einförmige Funktion von z betrachtet. So hat $a^{\frac{5}{2}}$ einen gewissen Werth, der zwischen a^2 und a^3 fällt, und ist daher eine Größe von eben der Art; und obgleich der Werth von $a^{\frac{5}{2}}$ eben sowohl $= -aa\sqrt{a}$, als $= +aa\sqrt{a}$ ist, so wird doch bloß der letzte in Betrachtung gezogen. Eben so verhält es sich, wenn der Werth von dem Exponenten z irrational wird. Denn da es in diesem Falle schwer seyn würde, sich die Anzahl der a^z alsdann zukommenden Werthe zu gedenken, so betrachtet man bloß den einen reellen darvon. Auf diese Art ist $a^{\sqrt{7}}$ ein bestimmter Werth, der zwischen a^2 und a^3 fällt.

§. 98.

Vorzüglich aber hängen die Werthe der Exponential-Größe a^z von der Größe der beständigen Zahl a ab. Denn ist $a = 1$, so ist stets $a^z = 1$, z mag einen Weth bekommen, was für einen es will: ist aber a größer als 1, so wird der Werth von a^z desto größer, je größer die Zahl ist, die man für z setzt, und wächst selbst ins unendliche, wenn $z = \infty$ wird; wird $z = 0$, so wird $a^z = 1$, und ist z kleiner als 0, so werden die Werthe von a^z kleiner als die Einheit, bis, für $z = -\infty$, $a^z = 0$ wird. Das Gegentheil findet statt, wenn a kleiner als 1, aber doch eine positive Größe ist: denn alsdann nimmt a^z ab, wenn z über 0 hinauf wächst, und wächst, wenn man für z negative Zahlen setzt. Wenn nemlich a kleiner als 1 ist, so ist $\frac{1}{a}$ größer als 1; setzt man also $\frac{1}{a} = b$, so wird $a^z = b^{-z}$, wonach man den zweyten Fall aus dem ersten beurtheilen kann.

§. 99.

Ist $a = 0$, so findet sich zwischen den Werthen von a^z ein sehr großer Sprung. Denn so lange z eine positive Zahl, oder größer als nichts ist, so ist stets $a^z = 0$; ist $z = 0$, so wird $a^0 = 1$; ist aber z eine negative Zahl, so erhält a^z einen unendlich großen Werth. So ist, wenn $z = -3$ gesetzt wird, $a^z = 0^{-3} = \frac{1}{0^3} = \frac{1}{0}$, und also unendlich. Noch viel größere Sprünge kommen vor, wenn die beständige

dige Größe a einen negativen Werth, z. B. -2 bekommt. Denn setzt man alsdann anstatt z die ganzen Zahlen, so werden die Werthe von z wechselsweise positiv und negativ, wie aus dieser Reihe erhellet:

a^{-4}; a^{-3}; a^{-2}; a^{-1}; a^{0}; a^{1}; a^{2}; a^{3}; a^{4}; 2c.
$+\frac{1}{16}$; $-\frac{1}{8}$; $+\frac{1}{4}$; $-\frac{1}{2}$; 1; -2; $+4$; -8; $+16$; 2c.

Setzt man ferner Brüche für z, so bekommt $a^z = (-2)^z$ bald reelle bald imaginaire Werthe; indem z. B. $a^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-2}$ imaginär, $a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{-2} = -\sqrt[3]{2}$ hingegen reell ist. Ob aber, wenn z irrational genommen wird, a^z reelle oder imaginäre Werthe gebe, läßt sich nicht einmal bestimmen.

§. 100.

Wegen dieser Unbequemlichkeiten bey den negativen Werthen von a wollen wir a positiv und größer als die Einheit annehmen, weil man die Fälle, wo a eine positive und kleinere Zahl als die Einheit ist, leicht hierauf zurückführen kann. Nimmt man also $a^z = y$, so erhält y, wenn man für z alle reelle positive Zahlen, die zwischen $+\infty$ und $-\infty$ fallen, setzt, alle reelle positive Werthe, die zwischen $+\infty$ und 0 liegen. Denn ist $z = \infty$, so wird $y = \infty$; ist $z = 0$, so wird $y = 1$; und wird $z = -\infty$, so wird $y = 0$. Umgekehrt wird daher auch jeder positive Werth, den man für y annimmt, einen reellen Werth für z geben, so daß $a^z = y$ ist; wenn aber y ein negativer Werth beygelegt wird, so kann z keinen reellen Werth haben.

§. 101.

Wenn also $y = a^z$ ist, so ist y eine Funktion von z; und wie y von z abhange, das läßt sich aus der Natur der Potestäten erkennen, denn dadurch wird, wenn man z einen gewissen Werth beylegt, der Werth von y bestimmt.

Es ist aber $yy = a^{2z}$; $y^3 = a^{3z}$; und überhaupt $y^n = a^{nz}$; woraus folgt, daß $\sqrt{y} = a^{\frac{1}{2}z}$; $\sqrt[3]{y} = a^{\frac{1}{3}z}$; $\frac{1}{y} = a^{-z}$; $\frac{1}{yy} = a^{-2z}$; $\frac{1}{\sqrt{y}} = a^{-\frac{1}{2}z}$; u. s. f. seyn werde. Ferner ist, wenn $v = a^x$ gesetzt wird, $vy = a^{x+z}$; und $\frac{v}{y} = a^{x-z}$. Vermittelst dieser Formeln kann man den Werth von y aus dem gegebenen Werthe von z leicht finden.

Exempel.

Wenn $a = 10$ ist, so lassen sich die Werthe von y wenn man für z ganze Zahlen setzt, ohne alle Rechnung finden. Es ist nemlich $10^1 = 10$; $10^2 = 100$; $10^3 = 1000$; $10^4 = 10000$; und $10^0 = 1$; ferner $10^{-1} = \frac{1}{10} = 0,1$; $10^{-2} = \frac{1}{100} = 0,01$; $10^{-3} = \frac{1}{1000} = 0,001$. Wenn aber für z Brüche gesetzt werden, so kann man die Werthe von y vermittelst der Extraction der Wurzeln erhalten. So ist $10^{\frac{1}{2}} = \sqrt{10} = 3,162277$, u. s. f.

§. 102.

So wie man aber, wenn die Zahl a gegeben ist, aus jedem Werthe von z den Werth von y finden kann: so läßt sich auch umgekehrt aus jedem positiven Werthe von y der dazu gehörige Werth von z bestimmen, so daß $a^z = y$ wird; und dieser Werth von z pflegt, in so fern er als eine Funktion von y betrachtet wird, der Logarithme von y genennt zu werden. Es macht daher die Lehre von den Logarithmen die Annahme einer gewissen beständigen Zahl für a nothwendig; und man nennt deswegen auch diese Zahl die Basis der Logarithmen. So bald sie festgesetzt ist, so ist

 der

der Logarithme einer jeden Zahl y der Exponent der Potestät a^z, wobey denn die Potestät a^z selbst der Zahl y gleich ist; den Logarithmen der Zahl y aber anzuzeigen, bedient man sich dieser Bezeichnung, ly. Ist also $a^z = y$ so ist $z = ly$; woraus erhellet, daß die Basis der Logarithmen, wenn sie gleich übrigens willkührlich angenommen werden kann, dennoch größer als die Einheit seyn muß, und daß also bloß die positiven Zahlen reelle Logarithmen haben.

§. 103.

Was man nun aber auch für eine Zahl für die Basis der Logarithmen a annehmen mag, so ist doch allezeit $l1 = 0$; denn wenn man in der Gleichung $a^z = y$, welche mit dieser $z = ly$ übereinstimmt, $y = 1$ setzt, so wird $z = 0$. Ferner sind die Logarithmen der Zahlen, die größer als die Einheit sind, positiv, und richten sich nach dem Werthe der Basis a. So ist $la = 1$; $laa = 2$; $la^3 = 3$; $la^4 = 4$; u. s. f. daher man auch rückwärts aus den Logarithmen die Basis erkennen kann, indem dieselbe allezeit die Zahl ist, deren Logarithme $= 1$ ist. Die Logarithmen der Zahlen hingegen, die kleiner als die Einheit aber doch positiv sind, sind negativ, nemlich $l\frac{1}{a} = -1$; $l\frac{1}{aa} = -2$; $l\frac{1}{a^3} = -3$ u. s. f. Die Logarithmen der negativen Zahlen endlich sind keine reelle, sondern imaginäre Zahlen, wie bereits angemerkt worden ist.

§. 104.

Auf eine ähnliche Art ist, wenn $ly = z$ gesetzt wird, $lyy = 2z$; $ly^3 = 3z$; und überhaupt $ly^n = nz$, oder $ly^n = nly$, weil $z = ly$ ist. Man findet also den Logarithmen einer jeden Potestät von y, wenn man den Logarithmen von y mit dem Exponenten dieser Potestät multiplicirt. So ist

$l\sqrt{y}$

$l\sqrt{y} = \frac{1}{2}z, = \frac{1}{2}ly$; $l\frac{1}{\sqrt{y}} = ly^{-\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}ly$; u. s. f.

so daß man also aus dem Logarithmen einer jeden Zahl die Logarithmen aller ihrer Potestäten zu finden im Stande ist. Hat man aber bereits zwey Logarithmen, z. B. $ly = z$, und $lv = x$ gefunden, so ist, wegen $y = a^z$, und $v = a^x$, $lvy = x + z = lv + ly$; und man erhält also den Logarithmen eines Produkts in der Summe der Logarithmen seiner Faktoren. Auf eine ähnliche Art ist $l\frac{v}{y} = z - x = lv - ly$; und der Logarithme eines Bruchs wird daher gefunden, wenn man den Logarithmen des Nenners von dem Logarithmen des Zählers abzieht. Diese Regeln dienen dazu, um aus einigen bekannten Logarithmen die Logarithmen vieler andern Zahlen zu finden.

§. 105.

Es erhellet aber auch hieraus, daß es weiter keine rationale Logarithmen als von den Potestäten der Basis a giebt. Denn wofern eine andere Zahl b keine Potestät von der Basis a ist, so kann auch ihr Logarithme durch keine rationale Zahl ausgedruckt werden. Ferner ist auch der Logarithme von b keine Irrationalzahl: denn wäre $lv = \sqrt{n}$, so wäre $a^{\sqrt{n}} = b$, und dies kann nicht statt finden, wenn a und b Rationalzahlen sind. Man pflegt aber nur die Logarithmen der rationalen und der ganzen Zahlen zu suchen, weil man daraus die Logarithmen der Brüche und der Irrationalzahlen finden kann. Da also die Logarithmen der Zahlen, die keine Potestäten von der Basis a sind, weder rational noch irrational dargestellt werden können, so werden sie mit Recht zu den transcendenten Größen gerechnet,

und

und dies ist der Grund, warum man die Logarithmen zu den transcendenten Größen zählt.

§. 106.

Aus diesem Grunde können die Logarithmen der Zahlen bloß näherungsweise durch die Decimal-Brüche ausgedruckt werden, die der Wahrheit desto näher kommen, auf je mehrere Zehntheiler-Stellen sie gefunden worden sind. Man kann aber auf diese Art den Logarithmen jeder Zahl bloß durch die Extraction der Quadratwurzel finden. Denn da, wenn man $ly = z$, $lv = x$ setzt, $l\sqrt{vy} = \frac{x+z}{2}$ ist, so suche man, wenn die gegebene Zahl b zwischen a^2 und a^3 fällt, wovon die Logarithmen 2 und 3 sind, den Werth von $a^{2\frac{1}{2}}$ oder $a^2\sqrt{a}$, wo denn b entweder zwischen a^2 und $a^{2\frac{1}{2}}$, oder zwischen $a^{2\frac{1}{2}}$ und a^3 fallen wird. Es sey das eine oder das andere, so erhält man, wenn man von neuem die mittlere Proportional-Zahl sucht, andere nähere Grenzen; und fährt man auf diesem Wege fort, so muß man endlich zu Grenzen gelangen, die von einander um weniger als eine gegebene Größe entfernt sind, und welche man daher ohne Irrthum anstatt der Größe b nehmen kann. Da aber die Logarithmen aller gefundenen Grenzen gegeben werden, so wird auf diese Art endlich der Logarithme von b gefunden.

Exempel.

Man setze die Logarithmische Basis $a = 10$, so wie solches in den gewöhnlichen Logarithmischen Tafeln zu geschehen pflegt, und suche den Logarithmen der Zahl 5 näherungsweise. Da diese Zahl zwischen 1 und 10 liegt, wovon die Logarithmen 0 und 1 sind: so ziehe man nach der folgenden

Tabelle

Tabelle die Quadratwurzeln aus, und fahre damit so lange fort, bis die gefundenen Grenzen sich nicht weiter von der gegebenen Zahl 5 unterscheiden.

$A = 1,000000$;	$lA = 0,0000000$;	Es sey
$B = 10,000000$;	$lB = 1,0000000$;	$C = \sqrt{AB}$
$C = 3,162277$;	$lC = 0,5000000$;	$D = \sqrt{BC}$
$D = 5,623413$;	$lD = 0,7500000$;	$E = \sqrt{CD}$
$E = 4,216964$;	$lE = 0,6250000$;	$F = \sqrt{DE}$
$F = 4,869674$;	$lF = 0,6875000$;	$G = \sqrt{DF}$
$G = 5,232991$;	$lG = 0,7187500$;	$H = \sqrt{FG}$
$H = 5,048065$;	$lH = 0,7031250$;	$I = \sqrt{FH}$
$I = 4,958069$;	$lI = 0,6953125$;	$K = \sqrt{HI}$
$K = 5,002865$;	$lK = 0,6992187$;	$L = \sqrt{IK}$
$L = 4,980416$;	$lL = 0,6972656$;	$M = \sqrt{KL}$
$M = 4,991627$;	$lM = 0,6982421$;	$N = \sqrt{KM}$
$N = 4,997242$;	$lN = 0,6987304$;	$O = \sqrt{KN}$
$O = 5,000052$;	$lO = 0,6989745$;	$P = \sqrt{NO}$
$P = 4,998647$;	$lP = 0,6988525$;	$Q = \sqrt{OP}$
$Q = 4,999350$;	$lQ = 0,6989135$;	$R = \sqrt{OQ}$
$R = 4,999701$;	$lR = 0,6989440$;	$S = \sqrt{OR}$
$S = 4,999876$;	$lS = 0,6989592$;	$T = \sqrt{OS}$
$T = 4,999963$;	$lT = 0,6989668$;	$V = \sqrt{OT}$
$V = 5,000008$;	$lV = 0,6989707$;	$W = \sqrt{TV}$
$W = 4,999984$;	$lW = 0,6989687$;	$X = \sqrt{WV}$
$X = 4,999997$;	$lX = 0,6989697$;	$Y = \sqrt{VX}$
$Y = 5,000003$;	$lY = 0,6989702$;	$Z = \sqrt{XY}$
$Z = 5,000000$;	$lZ = 0,6989700$;	

Auf diese Art erhält man, indem man immer die mittlere Proportional-Zahl sucht, endlich $Z = 5,000000$, und es ist daher der gesuchte Logarithme von 5, wenn man die Logarithmische Basis $= 10$ setzt, $= 0,6989700$; folglich bey-

nahe

nahe $10^{\frac{69897}{100000}} = 5$. Auf diese Art ist das gemeine Logarithmische System von Brigge und Vlacq berechnet worden, ob man gleich nachmals weit kürzere Wege entdeckt hat, auf welchen man die Logarithmen viel leichter und schneller findet.

§. 107.

Es lassen sich also so viel Logarithmische Systeme gedenken, als man verschiedene Zahlen für die Basis a setzen kann, und ihre Anzahl ist daher unendlich groß. Es haben aber die Logarithmen zweyer verschiedener Systeme, die zu einer und derselben Zahl gehören, immer ein und dasselbe Verhältniß zu einander. Denn es sey die Basis des einen Systems $= a$, und die Basis eines andern $= b$; ferner der Logarithme der Zahl n aus dem ersten System $= p$, und aus dem andern $= q$. Alsdann ist $a^p = n$, und $b^q = n$; folglich $a^p = b^q$, und $a = b^{\frac{q}{p}}$; und es muß daher der Bruch $\frac{q}{p}$ einen beständigen Werth bekommen, man mag für n eine Zahl, was für eine man will, setzen. Hat man daher die Logarithmen irgend eines Systems berechnet, so lassen sich daraus die Logarithmen eines jeden andern Systems sehr leicht vermittelst der Regel de Tri finden. So kann man, wenn die Logarithmen für die Basis 10 bekannt sind, die Logarithmen für jede andere Basis z. B. 2 finden. Denn man suche den Logarithmen der Zahl n für die Basis 2, welchen wir $= q$ setzen wollen, so wie der Logarithme eben dieser Zahl n, für die Basis 10, p heissen mag. Da nun für die Basis 10, $l2 = 0,3010300$, und für die Basis 2, $l2 = 1$ ist, so ist $0,3010300 : 1 = p : q$,

und

und folglich $q = \frac{p}{0,3010300} = 3,3219277 \cdot p$. Wenn man daher alle gemeine Logarithmen mit 3,3219277 multiplicirt, so erhält man Logarithmische Tafeln für die Basis 2.

§. 108.

Hieraus folgt, daß die Logarithmen zweyer Zahlen in jedem System einerley Verhältniß zu einander haben. Denn sind die Logarithmen der Zahlen M und N für die Basis a, m und n, so ist $M = a^m$ und $N = a^n$, und folglich $a^{mn} = M^n = N^m$; also $M = N^{\frac{m}{n}}$: und da in dieser Gleichung a nicht weiter enthalten ist, so ist daraus klar, daß der Werth des Bruchs $\frac{m}{n}$ nicht von a abhängt. Denn man nenne die Logarithmen eben dieser Zahlen für eine andere Basis b, μ und ν, so ist nach eben den Schlüssen, wie vorhin $M = N^{\frac{\mu}{\nu}}$; folglich $N^{\frac{m}{n}} = N^{\frac{\mu}{\nu}}$, und daraus $\frac{m}{n} = \frac{\mu}{\nu}$, oder $m : n = \mu : \nu$. So haben wir bereits gesehen, daß in jedem Logarithmischen Systeme die Logarithmen zweyer verschiedenen Potestäten von einer und derselben Zahl z. B. y^m und y^n in dem Verhältnisse der Exponenten dieser Potestäten m : n stehen [§. 103. 104.]

§. 109.

Um also ein Logarithmisches System für irgend eine Basis a zu verfertigen ist es genug, wenn man nur die Logarithmen der Prim-Zahlen auf dem beschriebenen oder einem andern bequemern Wege sucht. Denn da die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen den Summen der Logarith-

men

men ihrer Faktoren gleich sind, so lassen sich die Logarithmen der zusammengesetzten Zahlen aus den Logarithmen der Prim-Zahlen durch eine bloße Addition finden. So ist, wenn die Logarithmen der Zahlen 3 und 5 bekannt sind, $l15 = l3 + l5$; $l45 = 2l3 + l5$: und da vorhin [§. 106.] für die Basis $a = 10$, $l5 = 0{,}6989700$ gefunden worden ist, und überdies $l10 = 1$ ist; so ist $l\frac{10}{5} = l2 = l10 - l5$, und folglich $l2 = 1 - 0{,}6989700 = 0{,}3010300$. Aus diesen Logarithmen von 2 und 5 aber findet man die Logarithmen aller Zahlen, die aus 2 und 5 zusammengesetzt sind; z. B. 4, 8, 16, 32, 64, u. s. f. 20, 40, 80, 25, 50, u. s. f.

§. 110.

Der Nutzen, den die Logarithmischen Tafeln zur Verkürzung der Rechnung mit den bestimmten Zahlzeichen leisten, ist außerordentlich groß, weil man aus dergleichen Tafeln nicht bloß den Logarithmen einer jeden gegebenen Zahl, sondern auch, wenn ein Logarithme gegeben ist, die dazu gehörige Zahl finden kann. Bedeuten z. B. c, d, e, f, g, h Zahlen, es sey nun von was für einer Art es wolle, so kann man den Werth dieses Ausdrucks $\frac{ccd\sqrt{e}}{f\sqrt[3]{gh}}$ ohne alle Multiplication finden. Es ist nemlich der Logarithme dieses Ausdrucks $= 2lc + ld + \frac{1}{2}le - lf - \frac{1}{3}lg - \frac{1}{3}lh$; und sucht man nun die zu diesem Logarithmen gehörige Zahl, so hat man den Werth von $\frac{ccd\sqrt{e}}{f\sqrt[3]{gh}}$ gefunden. Vorzüglich wichtig aber ist der Gebrauch der Logarithmischen Tafeln bey sehr verwickelter Erhebungen zu Dignitäten und Wurzel-Extractionen, weil man dadurch diese Operationen in eine bloße Multiplication und Division verwandelt.

Erstes Exempel.

Man soll den Werth der Potestät $2^{\frac{7}{12}}$ finden. Da $l\,2^{\frac{7}{12}}$
$= \frac{7}{12}\,l\,2$ ist, so multiplicire man den Logarithmen von 2,
den man in den Tafeln $= 0{,}3010300$ findet, durch $\frac{7}{12}$, d. h.
mit $\frac{1}{2} + \frac{1}{12}$. Hierdurch findet man $l\,2^{\frac{7}{12}} = 0{,}1756008$; und
da die zu diesem Logarithmen gehörige Zahl $= 1{,}498307$ ist,
so ist beynahe $2^{\frac{7}{12}} = 1{,}498307$.

Zweytes Exempel.

Wenn sich die Volksmenge eines Landes jährlich um $\frac{1}{30}$
vermehrt, und darin anfänglich 100000 Menschen gewe-
sen sind, so findet man die Volksmenge dieses Landes nach
100 Jahren auf folgende Art. Man setze der Kürze wegen
die anfängliche Volksmenge $100000 = n$. Alsdann ist die
Volksmenge nach dem ersten Jahre $= (1 + \frac{1}{30})n = \frac{31}{30}n$,
nach dem zweyten Jahre $= (\frac{31}{30})^2 n$, nach dem dritten Jahre
$= (\frac{31}{30})^3 n$, und also nach 100 Jahren $= (\frac{31}{30})^{100} n$, und
der Logarithme von dieser Zahl ist $= 100\,l\,\frac{31}{30} + l\,100000$.
Es ist aber $l\,\frac{31}{30} = l\,31 - l\,30 = 0{,}014240439$, also
$100\,l\,\frac{31}{30} = 1{,}4240439$, und addirt man dazu $l\,100000 = 5$,
so erhält man den Logarithmen der gesuchten Volksmenge
$= 6{,}4240439 = l.\ 2654874$. Nach 100 Jahren ist also
die Volksmenge um mehr als $26\frac{1}{2}$ mal so groß geworden.

Drittes Exempel.

Nach der Sündfluth wurde das menschliche Geschlecht
von 6 Menschen fortgepflanzet. Angenommen nun, daß
die Anzahl der Menschen nach 200 Jahren auf 1000000
gewachsen sey, so frägt sich, um den wievielsten Theil sich
die Menschen jährlich vermehrt haben? Man setze diesen
wievielsten Theil $= \frac{1}{x}$, so sind nach 200 Jahren $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \times 6$
Men-

Menschen da gewesen. Da nun $\left(\frac{1+x}{x}\right)^{200} \times 6 = 1000000$ ist, so wird $\frac{1+x}{x} = \left(\frac{1000000}{6}\right)^{\frac{1}{200}}$, folglich $l\frac{1+x}{x} = \frac{1}{200}\, l\, \frac{1000000}{6} = \frac{1}{200} \times 5,2218487 = 0,0261092$; also $\frac{1+x}{x} = \frac{1061963}{1000000}$, und $1000000 = 61963x$, oder $x = 16$ ohngefehr. Es würde also die Zahl der Menschen in 200 Jahren zu der angeführten großen Menge angewachsen seyn, wenn sie sich jährlich um den sechszehnten Theil vermehrt hätten; und dies ist für das Alter, welches man ihnen beylegt, nicht viel. Hätten sie sich aber in einem fort in diesem Verhältnisse 400 Jahr hindurch vermehrt, so wäre ihre Anzahl bis auf $1000000 . \frac{1000000}{6} = 166666666666$ angewachsen, eine Menge, zu deren Unterhaltung der Erdboden zu klein gewesen seyn würde.

Viertes Exempel.

Die jährliche Vermehrung der Menschen zu finden, wenn sich ihre Anzahl alle 100 Jahr verdoppelt. Wenn man die jährliche Vermehrung der Menschen $= \frac{1}{x}$, und ihre anfängliche Zahl $= n$ setzt, so ist die Menge derselben nach 100 Jahren $= \left(\frac{1+x}{x}\right)^{100} n$. Da nun diese Menge das Doppelte der anfänglichen Menge, und also $= 2n$ seyn soll: so ist $\frac{1+x}{x} = 2^{\frac{1}{100}}$, und $l\frac{1+x}{x} = \frac{1}{100}\, l\, 2 = 0,0030103$; und hieraus ergiebt sich $\frac{1+x}{x} = \frac{10069555}{10000000}$

und also $x = \frac{10000000}{69555} = 144$ ohngefehr. Es ist folglich zur Verdoppelung der Menschen in jedem Jahrhunderte genug, wenn sich dieselben jährlich nur um den 144sten Theil vermehren, und es ist daher lächerlich, wenn einige leugnen, daß die ganze Erde von einem Menschenpaare in so kurzer Zeit habe bevölkert werden können.

§. 111.

Der größte Nutzen, welchen die Logarithmen gewähren, zeigt sich bey der Auflösung solcher Gleichungen, wo die unbekannte Größe ein Exponent ist. Hat man z. B. die Gleichung $a^x = b$, und soll man daraus x entwickeln, so kann solches nicht anders als vermittelst der Logarithmen geschehen. Da nemlich $a^x = b$ ist, so ist $\mathrm{l}a^x = x\,\mathrm{l}a = \mathrm{l}b$, und also $x = \frac{\mathrm{l}b}{\mathrm{l}a}$. Dabey ist es übrigens gleich, was man sich für eines Logarithmischen Systems bedienen will, weil die Logarithmen der Zahlen a und b in allen Systemen einerley Verhältniß haben. [§. 108.]

Erstes Exempel.

Es wird gefragt, in wie viel Jahren das menschliche Geschlecht auf das Zehnfache anwachse, wenn die jährliche Vermehrung $\frac{1}{100}$ ist? Es geschehe solches nach x Jahren, und die anfängliche Menge der Menschen sey $= n$, so wird ihre Menge nach x Jahren $= \left(\frac{101}{100}\right)^x n$ seyn. Da dieselbe nun auch das Zehnfache von der anfänglichen Menge seyn soll, so ist $\left(\frac{101}{100}\right)^x n = 10n$, oder $\left(\frac{101}{100}\right)^x = 10$; folg-

lich

lich $x\,l\,\frac{101}{100} = l\,110$, und $x = \frac{l\,110}{l\,101 - l\,100} = \frac{10000000}{43214}$ $= 231$. Nach 231 Jahren wird also die Anzahl der Menschen, wenn sie sich jährlich um den 100sten Theil vermehren, zehnmal so groß; und folglich nach 462 Jahren hundert, und nach 693 Jahren tausendmal so groß.

Zweytes Exempel.

Es hat jemand 400000 Fl. zu 5 pro C. aufgenommen, trägt aber jährlich 25000 Fl. ab, und es wird gefragt: In wie viel Jahren er die ganze Schuld bezahlt haben werde? Setzt man die schuldige Summe der 400000 Fl. $= a$, und den jährlichen Abtrag der 25000 Fl. $= b$; so ist er schuldig

nach dem ersten Jahre $\frac{105}{100}\,a - b$

nach dem zweyten Jahre $\left(\frac{105}{100}\right)^2 a - \frac{105}{100}\,b - b$

nach dem dritten Jahre $\left(\frac{105}{100}\right)^3 a - \left(\frac{105}{100}\right)^2 b - \frac{105}{100}\,b - b$,

und nach x Jahren, wenn man der Kürze wegen $\frac{105}{100} = n$ setzt,
$n^x a - n^{x-1} b - n^{x-2} b - n^{x-3} b - \ldots\ldots - b =$ $n^x a - b(1 + n + n^2 + \ldots\ldots + n^{x-1})$. Da nun wegen der Natur der geometrischen Progressionen $1 + n + n^2 + n^3$ $+ \ldots\ldots + n^{x-1} = \frac{n^x - 1}{n - 1}$ ist: so ist die nach x Jahren noch übrige Schuld, die nach der Aufgabe Null seyn soll, $n^x a - \frac{n^x b + b}{n - 1} = 0$, und folglich $n^x a = \frac{n^x b - b}{n - 1}$, oder $(n - 1)\,n^x a = n^x b - b$. Hieraus ergiebt sich $(b - na + a)\,n^x = b$, und $n^x = \frac{b}{b - (n - 1)a}$, woher

 denn

denn $x = \frac{lb - l(b - (n - 1)a)}{ln}$ wird. Da nun $a = 400000$, $b = 25000$, $n = \frac{105}{100}$ ist; so ist $(n-1)a = 20000$, und $b - (n - 1)a = 5000$, und die Zahl der Jahre, nach welchen die ganze Schuld bezahlt ist, $x = \frac{l25000 - l5000}{l\frac{105}{100}}$ $= \frac{l5}{l\frac{21}{20}} = \frac{6989700}{211893}$, oder etwas kleiner als 33. Nach 33 Jahren nemlich wird nicht nur die ganze Schuld abgetragen seyn, sondern es muß alsdann der Creditor dem Debitor noch wieder herausgeben $\frac{(n^{33} - 1)b}{n - 1} - n^{33}a =$ $\frac{(\frac{21}{20})^{33} \times 5000 - 25000}{\frac{1}{20}} = 100000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} - 500000$ Fl.

Da also $l\frac{21}{20} = 0{,}0211892991$ ist, so ist $l\left(\frac{21}{20}\right)^{33} =$ $0{,}69924687$, und $l100000\left(\frac{21}{20}\right)^{33} = 5{,}6992469 =$ $l500318{,}8$. Es muß folglich der Creditor dem Debitor nach 33 Jahren noch $318\frac{4}{5}$ Fl. wieder herausgeben.

§. 112.

Es haben aber die gemeinen Logarithmen, deren Basis 10 ist, außer diesem Gebrauche, den sie mit allen andern Logarithmen gemein haben, in der Decadik noch einen besondern Vorzug, und gewähren daher auch vor andern Systemen einen besondern Vortheil. Denn da die Logarithmen aller Zahlen, die Potestäten von 10 ausgenommen, in Decimal-Brüchen ausgedruckt werden; so fallen die Logarithmen der Zahlen, die zwischen 1 und 10 enthalten sind, zwischen 0 und 1, die Logarithmen der Zahlen hingegen, die zwischen 10 und 100 liegen, zwischen 1 und 2 u. s. f.

u. s. f. Es besteht daher jeder Logarithme aus einer ganzen Zahl und einem Decimal-Bruche; und die ganze Zahl wird die Charakteristik, der Decimal-Bruch aber die Mantisse genannt. Die Charakteristik enthält daher immer eine Einheit weniger, als die Zahl, welche die ganzen Theile der zu dem Logarithmen gehörigen Zahl ausdruckt, Theile enthält; und es ist z. B. die Charakteristik des Logarithmen der Zahl 78509, = 4, weil diese Zahl eine fünftheilige ganze Zahl ist. Man kann demnach aus dem Logarithmen einer jeden Zahl sogleich erkennen, aus wie viel Theilen oder Zifern die Zahl bestehe; so ist z. B. die Zahl, welche zu dem Logarithmen 7,5804631 gehört, ihrem ganzen Theile nach eine achttheilige Zahl.

§. 113.

Wenn also die Mantissen zweyer Logarithmen einander gleich sind, und bloß die Charakteristik verschieden ist, so stehen die Zahlen, welche zu diesen Logarithmen gehören, in dem Verhältnisse einer Potestät der 10 zu der Einheit, und stimmen also in ihren Zifern mit einander überein. So sind z. B. die Zahlen, welche zu den Logarithmen 4, 9130187 und 6, 9130187 gehören, 81850 und 8185000; zu dem Logarithmen 3, 9130187 aber gehört die Zahl 8185, und zu dem Logarithmen 0,9130187 endlich 8, 185. Die Mantisse allein zeigt also die Zifern der Zahl an, welche zu einem Logarithmen gehört, und aus der Charakteristik erhellet, wie viel man davon zur Linken für die ganze Zahl abschneiden muß, wo denn die übrigen zur Linken einen Decimal-Bruch ausmachen. Ist z. B. der Logarithme 2, 7603429 gefunden worden, so findet man nach der Mantisse die Zifern 5758945; die Charakteristik 2 aber bestimmt diese Zahl für den angeführten Lagarithmen so: 575, 8945. Wäre die Charakteristik = 0, so wäre die zugehörige Zahl

= 5,758945; und verminderte man sie noch um 1, so daß sie = −1 würde, so wäre die zugehörige Zahl = 0,5758945, so wie die Charakteristik −2 auf die Zahl 0,05758945 führt. Man setzt indeß anstatt dieser negativen Charakteristiken häufig die Zahlen 9, 8, 7 u. s. f. und setzt dabey voraus daß diese Logarithmen um 10 zu groß angenommen worden sind. Doch dies pflegt in den Einleitungen zu den Logarithmischen Tafeln hinlänglich aus einander gesetzt zu werden.

Exempel.

Es wird die Progression 2, 4, 16, 256 u. s. f. gegeben, in welcher jedes folgende Glied das Quadrat des vorhergehenden ist; man soll das fünf und zwanzigste Glied derselben finden. Man kann die Glieder dieser Progression auch auf folgende Art ausdrucken: 2^1, 2^2, 2^4, 2^8 u. s. f. wo denn in die Augen fällt, daß der Exponent des fünf und zwanzigsten Gliedes 2^{24} = 16777216, und also das gesuchte Glied selbst $2^{16777216}$ seyn wird, und davon ist der Logarithme 16777216. l 2. Da nun der Logarithme von 2 = 0 30102999566398l195 ist, so ist der Logarithme der gesuchten Zahl 5050445,25973367, aus dessen Charakteristik erhellet, daß die gesuchte Zahl, auf die gewöhnliche Art ausgedruckt, aus 5050446 Zifern besteht. Sucht man aber die Mantisse 259733675932 in den Tafeln auf, so findet man die ersten Zifern dieser Zahl 181858. Ob man also gleich diese Zahl nicht ganz finden kann, so weiß man doch mit Gewißheit, daß sie aus 5050446 Zifern besteht, und daß die ersten davon 181858 sind, worauf noch 5050440 andere folgen. Einige davon können noch aus größern Logarithmischen Tafeln gefunden werden, wie denn die ersten eilf Zifern dieser Zahl diese 18185852986 sind.
