Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Siebentes Capitel. Von der Entwickelung der Exponential-Größen und der Logarithmen durch Reihen.

Siebentes Capitel.

Von der Entwickelung der Exponential-Größen und der Logarithmen durch Reihen.

§. 114.

Da $a^0 = 1$ ist, und der Werth von a, wenn a größer als 1 ist, mit dem Exponenten zugleich wächst: so folgt, daß die Potestät von a, wenn ihr Exponent die 0 nur um einen unendlich kleinen Theil übertrifft, ebenfalls nur um einen unendlich kleinen Theil größer seyn werde, als die Einheit. Es sey ω eine unendlich kleine Zahl, oder ein so geringer Bruch, daß sein Werth nur nicht $= 0$ sey; so wird $a^\omega = 1 + \psi$, so daß ψ ebenfalls eine unendlich kleine Zahl ist: denn aus dem vorhergehenden Capitel erhellet, daß nur dann ω eine unendlich kleine Zahl seyn kann, wenn ψ eine unendlich kleine Zahl ist. Es wird daher entweder $\psi = \omega$, oder ψ größer als ω, oder ψ kleiner als ω seyn, und dies Verhältniß wird von dem Werthe von a abhängen. Da nun a noch eine unbekannte Größe ist, so wollen wir $\psi = k\omega$ setzen, so daß $a^\omega = 1 + k\omega$, und wenn man a zur Logarithmischen Basis macht, $\omega = l(1 + k\omega)$ sey.

Exempel.

Damit man desto deutlicher einsehe, wie die Zahl k von der Basis a abhange, so wollen wir $a = 10$ annehmen, und aus den gemeinen Logarithmischen Tafeln den Logarithmen einer Zahl suchen, die sich von der Einheit nur um einen sehr kleinen Theil unterscheidet. Es sey diese Zahl $1 + \frac{1}{1000000}$, und also $k\omega = \frac{1}{1000000}$; so ist $l\left(1 + \frac{1}{1000000}\right) = l\frac{1000001}{1000000} = 0{,}00000043429 = \omega$. Hieraus ergiebt sich, da $k\omega = 0{,}00000100000$ ist, $\frac{1}{k} = \frac{43429}{100000}$, und $k = \frac{100000}{43429} = 2{,}30258$; woraus erhellet, daß k eine endliche Zahl ist, die von dem Werthe der Basis a abhängt. Denn wenn man eine andere Zahl für die Basis a annähme, so würde der Logarithme von $1 + k\omega$ zu dem gefundenen ein bestimmtes Verhältniß haben, und deswegen auch k einen andern Werth erhalten.

§. 115.

Da $a^\omega = 1 + k\omega$, so ist $a^{i\omega} = (1 + k\omega)^i$, man mag für i eine Zahl setzen, was für eine man will, und es ist daher $a^{i\omega} = 1 + \frac{i}{1}k\omega + \frac{i(i-1)}{1 \cdot 2}k^2\omega^2 + \frac{i(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}k^3\omega^3 +$ u. s. f. Setzt man also $i = \frac{z}{\omega}$, so daß z irgend eine endliche Zahl bedeutet: so wird, weil ω eine unendlich kleine Zahl ist, i eine unendlich große Zahl, und folglich $\omega = \frac{z}{i}$, oder gleich einem Bruche mit einem unendlichen Nenner, d. h. einer unendlich kleinen Zahl, so wie wir es angenommen haben. Setzt man nun $\frac{z}{i}$ anstatt ω, so wird $a^z = \left(1 + \frac{kz}{i}\right)^i = 1 + \frac{1}{1}kz + \frac{1(i-1)}{1 \cdot 2i}k^2z^2 + \frac{1(i-1)(i-2)}{1 \cdot 2i \cdot 3i}k^3z^3 + \frac{1(i-1)(i-2)(i-3)}{1 \cdot 2i \cdot 3i \cdot 4i}k^4z^4 +$ u. s. f. eine Gleichung, die

voll=

vollkommen wahr ist, wenn man i unendlich groß annimmt. k ist darin eine endliche Zahl, deren Werth von a abhängt, wie bereits gezeigt worden ist.

§. 116.

Da aber i eine unendlich große Zahl ist, so ist $\frac{i-1}{i} = 1$; denn es ist offenbar, daß der Bruch $\frac{i-1}{i}$ sich desto mehr der Einheit nähert, je größer i angenommen wird, und daß er also der Einheit gleich werden muß, wenn i größer wird, als jede endliche Zahl, die sich angeben läßt. Aus eben dem Grunde wird $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i} = 1$; u. s. f. und daher ist $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{i-2}{3i} = \frac{1}{3}$; $\frac{i-3}{4i} = \frac{1}{4}$; u. s. w. Gebraucht man nun diese Werthe, so erhält man $a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \frac{k^4z^4}{1.2.3.4}$ + u. s. f. ohne Ende. Es erhellt aber aus dieser Gleichung auch das Verhältniß zwischen a und k; denn setzt man $z = 1$, so wird $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4}$ + u. s. f. und wenn $a = 10$ seyn soll, so muß k ohngefähr $= 2{,}30258$ seyn, so wie wir es vorhin gefunden haben.

§. 117.

Setzt man $b = a^n$, so wird, wenn man a zur Logarithmischen Basis annimmt, $lb = n$; und da nun $b^z = a^{nz}$ ist, so entsteht daher die unendliche Reihe $b^z = 1 + \frac{knz}{1}$

+

$+ \frac{k^2n^2z^2}{1.2} + \frac{k^3n^3z^3}{1.2.3} + \frac{k^4n^4z^4}{1.2.3.4} +$ u. s. f; oder, wenn lb anstatt n setzt: $b^z = 1 + \frac{kz}{1} lb + \frac{k^2z^2}{1.2}(lb)^2 + \frac{k^3z^3}{1.2.3}(lb)^3 + \frac{k^4z^4}{1.2.3.4}(lb)^4 +$ u. s. f. Da nun der Werth von k aus dem gegebenen Werthe der Basis a gefunden werden kann, so läßt sich eine jede Exponential-Größe b^z durch eine unendliche Reihe ausdrucken, deren Glieder nach den Potestäten von z fortschreiten. Nachdem wir dieses gezeigt haben, so wollen wir nun auch untersuchen, wie man die Logarithmen durch unendliche Reihen ausdrucken kann.

§. 118.

Da $a^\omega = 1 + k\omega$, wenn ω ein unendlich kleinen Bruch bedeutet, und das Verhältniß zwischen a und k durch die Gleichung bestimmt wird, $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} +$ 2c. so ist, wenn man a als die Logarithmische Basis betrachtet, $\omega = l(1 + k\omega)$, und $i\omega = l(1 + k\omega)^i$. Hierbey ist klar, daß die Potestät $(1 + k\omega)^i$ die Einheit um so mehr übersteigen werde, je größer i angenommen wird, und daß sie, wenn man i ohne alle Grenze wachsen läßt, jede Zahl, die größer als die Einheit ist, erreichen kann. Setzt man daher $(1 + k\omega)^i = 1 + x$, so wird $l(1 + x) = i\omega$; und da $i\omega$ eine endliche Zahl, nemlich der Logarithme von $1 + x$, ist, so erhellet hieraus, daß i eine unendlich große Zahl seyn muß, weil sonst $i\omega$ keinen endlichen Werth haben könnte.

§. 119.

Da wir $(1 + k\omega)^i = 1 + x$ gesetzt haben, so ist $1 + k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}}$, und $k\omega = (1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1$, folglich $i\omega = \frac{i}{k}$

$\frac{i}{k}((1+x)^{\frac{1}{i}}-1)$. Da aber $i\omega = l(1+x)$ ist, [§. 118,] so ist $l(1+x) = \frac{i}{k}(1+x)^{\frac{1}{i}} - \frac{i}{k}$, wenn i eine unendlich große Zahl ist. Nun ist $(1+x)^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}x - \frac{1(i-1)}{i.2i}x^2$ $+ \frac{1(i-1)(2i-1)}{i.2i.3i}x^3 - \frac{1(i-1)(2i-1)(3i-1)}{i.2i.3i.4i}x^4 +$ rc. und, weil i unendlich groß ist, so ist $\frac{i-1}{2i} = \frac{1}{2}$; $\frac{2i-1}{3i} = \frac{2}{3}$; $\frac{3i-1}{4i} = \frac{3}{4}$; rc. Folglich ist $i(1+x)^{\frac{1}{i}} = i + \frac{x}{1} - \frac{xx}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ rc. und $l(1+x) = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ rc.) wenn die Logarithmische Basis $= a$ ist, und k eine Zahl bedeutet, die zu dieser Basis gehört, so daß $a = 1 + \frac{k}{1} + \frac{k^2}{1.2} + \frac{k^3}{1.2.3} + \frac{k^4}{1.2.3.4} +$ rc. ist.

§. 120.

Da wir nunmehr eine Reihe haben, welche dem Logarithmen von $1+x$ gleich ist, so können wir vermittelst derselben, wenn die Basis a gegeben ist, den Werth der Zahl k bestimmen. Denn setzt man $1+x = a$, so ist, weil $la = 1$ ist, $1 = \frac{1}{k}(\frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} +$ rc.); folglich $k = \frac{a-1}{1} - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \frac{(a-1)^4}{4} +$ rc. und der Werth dieser Reihe muß, wenn man $a = 10$ setzt, ohngefehr $= 2,30258$ seyn;

seyn; ob gleich schwer einzusehen ist, wie $2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} +$ rc. seyn könne, da die folgenden Glieder dieser Reihe immer größer werden, und man die Summe derselben nicht auf die Art näherungsweise zu finden im Stande ist, daß man einige Glieder davon zusammen vereiniget. Es wird sich indeß bald ein Mittel, dieser Unbequemlichkeit abzuhelfen, darbieten.

§. 121.

Da $l(1+x) = \frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \text{rc}\right)$ ist, so ist, wenn man x negativ nimmt, $l(1-x) = -\frac{1}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \text{rc.}\right)$ [Besonders bewiesen findet man diesen Satz im Anhange S. 487. Absatz 9. 10.] Subtrahirt man diese Reihe von der vorhergehenden, so erhält man $l(1+x) - (1-x) = l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{k}\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \text{rc.}\right)$ Setzt man nun $\frac{1+x}{1-x} = a$, so daß $x = \frac{a-1}{a+1}$ wird, so ist, da $la = 1$, nunmehr $k = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \text{rc.}\right)$ und aus dieser Gleichung läßt sich der Werth von k aus der Basis a finden. Setzt man daher $a = 10$, so ist $k = 2\left(\frac{9}{11} + \frac{9^3}{3 \cdot 11^3} + \frac{9^5}{5 \cdot 11^5} + \frac{9^7}{7 \cdot 11^7} + \text{rc.}\right)$ und da die Glieder dieser Reihe sehr merklich abnehmen, so geben sie auch den Werth von k sehr bald mit einer hinlänglichen Genauigkeit.

§. 122.

Da man bey der Verfertigung eines Logarithmischen Systems a nach Gefallen annehmen kann, so kann es auch so gewählt werden, daß $k = 1$ ist. Es sey also $k = 1$, so ist aus der oben §. 116 gefundenen Reihe $a = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ u. s. f. Verwandelt man diese Brüche in Decimal-Brüche, und addirt man sie wirklich, so erhält man $a = 2,7182818284590452353 6028$, wo auch noch die letzte Zifer genau ist. Nimmt man nun diese Zahl zur Basis an, so heißen die zu ihr gehörigen Logarithmen natürliche oder hyperbolische Logarithmen, weil die Quadratur der Hyperbel durch diese Logarithmen ausgedruckt werden kann. Der Kürze wegen wollen wir diese Zahl 2,718281828459 u. s. w. immer durch e bezeichnen, so daß also e die Basis der natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen bedeutet, wofür $k = 1$ ist; oder es soll e die Summe dieser Reihe $1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} +$ u. s. w. ohne Ende, ausdrucken.

§. 123.

Die hyperbolischen Logarithmen haben also die Eigenschaft, daß die Zahl $1 + \omega$ den Logarithmen ω hat, wenn ω eine unendlich kleine Größe bedeutet; und da hieraus der Werth von $k = 1$ bekannt ist, so lassen sich die hyperbolischen Logarithmen aller Zahlen finden. Wenn daher e die vorhin, [§. 122] gefundene Zahl bedeutet, so ist allezeit $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{1.2.3.4} +$ u. s. f.; die hyperbolischen Logarithmen selbst aber ergeben sich aus diesen Reihen.

$l(1+x)$

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \text{rc.}$$

$$l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{rc.}$$

die in einem hohen Grade convergiren, wenn man für x einen kleinen Bruch annimmt, so daß man aus dieser letzten Reihe die Logarithmen der Zahlen, die nicht viel grösser als die Einheit sind, sehr leicht findet. Setzt man nemlich $x = \frac{1}{5}$, so ist $l\frac{6}{4} = l\frac{3}{2} = \frac{2}{1 \cdot 5} + \frac{2}{3 \cdot 5^3} + \frac{2}{5 \cdot 5^5} + \frac{2}{7 \cdot 5^7} + \text{rc.}$; setzt man $x = \frac{1}{7}$, so wird $l\frac{4}{3} = \frac{2}{1 \cdot 7} + \frac{2}{3 \cdot 7^3} + \frac{2}{5 \cdot 7^5} + \frac{2}{7 \cdot 7^7} + \text{rc.}$; und setzt man $x = \frac{1}{9}$, so wird $l\frac{5}{4} = \frac{2}{1 \cdot 9} + \frac{2}{3 \cdot 9^3} + \frac{2}{5 \cdot 9^5} + \frac{2}{7 \cdot 9^7} + \text{rc.}$ Aus den Logarithmen dieser Brüche aber findet man ferner die Logarithmen der ganzen Zahlen, indem wegen der Natur der Logarithmen $l\frac{3}{2} + l\frac{4}{3} = l2$; ferner nun $l\frac{3}{2} + l2 = l3$; und $2l2 = l4$; desgleichen nunmehr $l\frac{5}{4} + l4 = l5$; $l2 + l3 = l6$; $3l2 = l8$; $2l3 = l9$; und $l2 + l5 = l10$ ist.

Exempel.

Es sind daher die hyperbolischen Logarithmen der Zahlen von 1 bis zu 10 folgende:

$l1 = 0,00000\ 00000\ 00000\ 00000\ 00000$
$l2 = 0,69314\ 71805\ 59945\ 30941\ 72321$
$l3 = 1,09861\ 22886\ 68109\ 69139\ 52452$
$l4 = 1,38629\ 43611\ 19890\ 61883\ 44642$

$l5 = 1,60943\ 79124\ 34100\ 37460\ 07593$
$l6 = 1,79175\ 94692\ 28055\ 00081\ 24773$
$l7 = 1,94591\ 01490\ 55313\ 30510\ 54639$
$l8 = 2,07944\ 15416\ 79835\ 92825\ 16964$
$l9 = 2,19722\ 45773\ 36219\ 38279\ 04905$
$l10 = 2,30258\ 50929\ 94045\ 68401\ 79914$

Es sind nemlich alle diese Logarithmen durch obige drey Reihen gefunden worden, bis auf den Logarithmen von 7, wobey folgende Verkürzung gebraucht worden ist. Dadurch daß in der letzten Reihe $x = \frac{1}{99}$ gesetzt wurde, ergab sich daraus $l\frac{100}{98} = l\frac{50}{49} = 0,0202027073175194484078230$, welcher, von $l50 = 2l5 + l2 = 3,91202300542\ 81460586187508$ abgezogen, den Logarithmen von 49 giebt, dessen Hälfte $= l7$ ist.

§. 124.

Setzt man den hyperbolischen Logarithmen von $1 + x$, oder $l(1 + x) = y$; so ist $y = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} +$ ꝛc. Nimmt man aber a zur Basis, und setzt den Logarithmen eben derselben Zahl $1 + x$ gleich v; so ist, wie wir [§. 119.] gesehen haben, $v = \frac{1}{k}(\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} -$ ꝛc.$) = \frac{y}{k}$, und folglich $k = \frac{y}{v}$. Hieraus läßt sich der für die Basis a zu k gehörige Werth sehr bequem auf die Art bestimmen, daß man sagt, es sey k gleich dem Quotienten, welchen man durch die Division des hyperbolischen Logarithmen einer jeden Zahl durch den zur Basis a gehörigen Logarithmen eben derselben Zahl erhält. Setzt man daher diese Zahl $= a$, so wird $v = 1$, und also k gleich dem hyperbolischen Logarithmen der Basis a. In dem gemeinen Logarithmischen Systeme, wo $a = 10$ ist, wird daher $k =$ dem hyperbolischen Logarithmen von 10, oder $k = 2,3025850929940456840179914$, [§. 123.] Wenn man also die hyperbolischen Logarithmen durch diese Zahl k dividirt, oder welches einerley ist, durch $0,4342944819032518276511289$ multiplicirt: so erhält man die gemeinen Logarithmen, deren Basis $a = 10$ ist.

§. 125.

Da $e^z = 1 + \frac{z}{1} + \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} +$ rc. ist, [§. 123;] so wird, wenn man $a^y = e^z$ setzt, und die hyperbolischen Logarithmen nimmt, $y\,la = z$, weil $le = 1$ ist. Setzt man nun diesen Werth für z, so wird $a^y = 1 + \frac{y\,la}{1} + \frac{y^2\,(la)^2}{1\,.\,2} + \frac{y^3(la)^3}{1\,.\,2\,.\,3} +$ rc. [§. 117.] und es kann daher auch jede Exponential-Größe vermittelst der hyperbolischen Logarithmen durch eine unendliche Reihe dargestellt werden. Bedeutet ferner i eine unendlich große Zahl, so kann man sowohl die Exponential-Größen als die Logarithmen durch Potestäten ausdrucken. Es ist nemlich alsdann $e^z = (1 + \frac{z}{i})^i$, und folglich $a^y = (1 + \frac{y\,la}{i})^i$, so wie ferner für die hyperbolischen Logarithmen $l(1 + x) = i\,((1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1)$ ([§. 119], wenn man daselbst $k = 1$ setzt.) Was den weitern Gebrauch der hyperbolischen Logarithmen betrifft, so wird derselbe in der Integral-Rechnung ausführlich beschrieben werden.

Achtes