Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Achtes Capitel. Von den transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen.

Achtes Capitel.

Von den transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen.

§. 126.

Nach den Logarithmen und den Exponential-Größen müssen die Kreisbogen und ihre Sinus und Cosinus betrachtet werden, nicht nur, weil sie eine andere Art von transcendenten Größen ausmachen, sondern auch weil sie aus den Logarithmen und Exponential-Größen, wenn dieselben imaginäre Größen enthalten, entspringen.

Setzt man nun den Halbmesser eines Kreises oder den Sinus Totus $= 1$, so ist bekannt, daß man die Peripherie dieses Kreises in Zahlen nicht ganz genau ausdrucken kann, daß man aber durch die Näherung für den halben Umkreis die Zahl, 3,14159265358979323846264338327950288419716939937510582097494459230781640628620899862803482534211706798214808651327230664709384 46 + gefunden hat*). Für diese Zahl wollen wir der Kürze wegen π setzen, so daß also π den halben Umkreis eines Zirkels, dessen Halbmesser $= 1$ ist, oder die Länge eines Bogens von 180 Graden bedeutet.

*) In den drey letzten §§ des gegenwärtigen Capitels kommen einige Arten vor, das Verhältniß der halben Peripherie eines Kreises zum Radius, oder der ganzen Peripherie zum Durchmesser desselben zu bestimmen.

§. 127.

Nun bedeute z einen jeden Bogen dieses Kreises, dessen Halbmesser beständig $= 1$ gesetzt werden soll, und sin. A. z oder sin. z den Sinus, so wie cos. A. z, oder cos. z den Cosinus des Bogens z: so ist, da π ein Bogen von 180° ist, sin. $0\pi = 0$; cos. $0\pi = 1$; ferner sin. $\frac{1}{2}\pi = 1$; cos. $\frac{1}{2}\pi = 0$; sin. $\pi = 0$; cos. $\pi = -1$; sin. $\frac{3}{2}\pi = -1$; cos. $\frac{3}{2}\pi = 0$; sin. $2\pi = 0$; cos. $2\pi = 1$. Es fallen also alle Sinus und Cosinus zwischen die Grenzen $+1$ und -1*). Ferner ist cos. z $=$ sin. $(\frac{1}{2}\pi - z)$; sin. z $=$ cos. $(\frac{1}{2}\pi - z)$; und $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$. Außerdem müssen auch noch folgende Bezeichnungen gemerket werden: tang. z, welches die Tangente des Bogens z, cot. z, welches die Cotangente des Bogens z bedeutet. Daß tang. $z = \frac{\sin. z}{\cos. z}$, und cot. $z = \frac{\cos. z}{\sin. z} = \frac{1}{\text{tang.} z}$ ist, ist, so wie auch alles übrige aus der Trigonometrie bekannt.

*) Wenn also k jede ganze Zahl, die Null nicht ausgeschlossen, bedeutet, so ist sowohl Sin. $2k\pi$ als Sin. $(2k + 1)\pi = 0$, hingegen cos. $2k\pi = + 1$, und cos. $(2k + 1)\pi = -1$. Umgekehrt ist also φ oder $n\varphi$, wenn Sin. φ oder Sin. $n\varphi = 0$ ist, entweder $2k\pi$ oder $(2k + 1)\pi$, je nachdem der Cosinus davon entweder $= + 1$ oder $= -1$ ist. In jenem Falle findet die Form $2k\pi$, in diesem aber $(2k + 1)\pi$ statt.

§. 128.

Ferner wird daselbst erwiesen, daß, wenn y und z zwey Bogen bedeuten,

sin. $(y + z) =$ sin. y. cos. z $+$ cos. y. sin. z,

cos. $(y + z) =$ cos. y. cos. z $-$ sin. y sin. z, desgleichen

sin. $(y - z) =$ sin. y. cos. z $-$ cos. y. sin. z, und

cos. $(y - z) =$ cos. y. cos. z $+$ sin. y. sin. z ist. Setzt man

man daher anstatt y die Bogen $\frac{1}{2}\pi$; π; $\frac{3}{2}\pi$; ꝛc. so wird

$\sin.(\frac{1}{2}\pi + z) = + \cos. z$	$\sin.(\frac{1}{2}\pi - z) = + \cos. z$
$\cos.(\frac{1}{2}\pi + z) = - \sin. z$	$\cos.(\frac{1}{2}\pi - z) = + \sin. z$
$\sin.(\pi + z) = - \sin. z$	$\sin.(\pi - z) = + \sin. z$
$\cos.(\pi + z) = - \cos. z$	$\cos.(\pi - z) = - \cos. z$
$\sin.(\frac{3}{2}\pi + z) = - \cos. z$	$\sin.(\frac{3}{2}\pi - z) = - \cos. z$
$\cos.(\frac{3}{2}\pi + z) = + \sin. z$	$\cos.(\frac{3}{2}\pi - z) = - \sin. z$
$\sin.(2\pi + z) = + \sin. z$	$\sin.(2\pi - z) = - \sin. z$
$\cos.(2\pi + z) = + \cos. z$	$\cos.(2\pi - z) = + \cos. z$

Wenn also n irgend eine ganze Zahl bedeutet, so ist

$\sin.(\frac{4n+1}{2}\pi + z) = + \cos. z$	$\sin.(\frac{4n+1}{2}\pi - z) = + \cos. z$
$\cos.(\frac{4n+1}{2}\pi + z) = - \sin. z$	$\cos.(\frac{4n+1}{2}\pi - z) = + \sin. z$
$\sin.(\frac{4n+2}{2}\pi + z) = - \sin. z$	$\sin.(\frac{4n+2}{2}\pi - z) = + \sin. z$
$\cos.(\frac{4n+2}{2}\pi + z) = - \cos. z$	$\cos.(\frac{4n+2}{2}\pi - z) = - \cos. z$
$\sin.(\frac{4n+3}{2}\pi + z) = - \cos. z$	$\sin.(\frac{4n+3}{2}\pi - z) = - \cos. z$
$\cos.(\frac{4n+3}{2}\pi + z) = + \sin. z$	$\cos.(\frac{4n+3}{2}\pi - z) = - \sin. z$
$\sin.(\frac{4n+4}{2}\pi + z) = + \sin. z$	$\sin.(\frac{4n+4}{2}\pi - z) = - \sin. z$
$\cos.(\frac{4n+4}{2}\pi + z) = + \cos. z$	$\cos.(\frac{4n+4}{2}\pi - z) = + \cos. z$

Und diese Formeln sind wahr, n mag eine positive oder negative ganze Zahl bedeuten.

§. 129.

Wenn $\sin. z = p$, und $\cos. z = q$ gesetzt wird, so ist $pp + qq = 1$; und wenn $\sin. y = m$, und $\cos. y = n$ genommen wird, so ist auch $mm + nn = 1$. Die Sinus und Cosinus der aus diesen zusammengesetzten Bogen verhalten sich so, daß

$$\sin. z = p$$
$$\sin. (y + z) = mq + np$$
$$\sin. (2y + z) = 2mnq + (nn - mm)p$$
$$\sin. (3y + z) = (3mn^2 - m^3)q + (n^3 - 3m^2n)p$$

u. s. f.

$$\cos. z = q$$
$$\cos. (y + z) = nq - mp$$
$$\cos. (2y + z) = (nn - mm)q - 2mnp$$
$$\cos. (3y + z) = (n^3 - 3m^2n)q - (3mn^2 - m^3)p$$

u. s. f. ist.

Die Bogen z, $y + z$, $2y + z$, $3y + z$ u. s. w. machen eine arithmetische Progression, ihre Sinus aber und ihre Cosinus eine wiederkehrende Reihe von der Art aus, als aus dem Nenner $1 - 2nx + (mm + nn)xx$ entspringt. Es ist nemlich

$$\sin. (2y + z) = 2n \sin. (y + z) - (mm + nn) \sin. z,$$

oder

$$\sin. (2y + z) = 2 \cos. y . \sin. (y + z) - \sin. z;$$ und eben so
$$\cos. (2y + z) = 2 \cos. y . \cos. (y + z) - \cos. z.$$ Auf eine ähnliche Art findet man

$$\sin. (3y + z) = 2 \cos. y . \sin. (2y + z) - \sin. (y + z)$$ und
$$\cos. (3y + z) = 2 \cos. y . \cos. (2y + z) - \cos. (y + z);$$

desgleichen

$$\sin. (4y + z) = 2 \cos. y . \sin. (3y + z) - \sin. (2y + z)$$ und
$$\cos. (4y + z) = 2 \cos. y . \cos. (3y + z) - \cos. (2y + z)$$ u. s. f.

Nach diesem Gesetze lassen sich die Formeln für die Sinus und Cosinus der Bogen, die in einer arithmetischen Progression fortgehen, so weit als man will, fortsetzen*).

*) Setzt man also $y = z = \varphi$, so erhält man für die Sinus

$$\begin{aligned}
\sin.\ \varphi &= \sin.\ \varphi \\
\sin. 2\varphi &= 2\cos.\ \varphi.\ \sin.\varphi \\
\sin. 3\varphi &= 2\cos.\ \varphi.\ \sin. 2\varphi - \sin.\varphi \\
\sin. 4\varphi &= 2\cos.\ \varphi.\ \sin. 3\varphi - \sin. 2\varphi \\
\sin. 5\varphi &= 2\cos.\ \varphi.\ \sin. 4\varphi - \sin. 3\varphi \\
\sin. 6\varphi &= 2\cos.\ \varphi.\ \sin. 5\varphi - \sin. 4\varphi
\end{aligned}$$

und überhaupt

$$\sin.\ n\varphi = 2\cos.\ \varphi.\ \sin.\ (n-1)\varphi - \sin.\ (n-2)\varphi;$$

für die Cosinus

$$\begin{aligned}
\cos.\ \varphi &= \cos.\varphi \\
\cos. 2\varphi &= 2\cos.\ \varphi.\ \cos.\varphi - 1 \\
\cos. 3\varphi &= 2\cos.\ \varphi.\ \cos.\ 2\varphi - \cos.\varphi \\
\cos. 4\varphi &= 2\cos.\ \varphi.\ \cos.\ 3\varphi - \cos.\ 2\varphi \\
\cos. 5\varphi &= 2\cos.\ \varphi.\ \cos.\ 4\varphi - \cos.\ 3\varphi \\
\cos. 6\varphi &= 2\cos.\ \varphi.\ \cos.\ 5\varphi - \cos.\ 4\varphi
\end{aligned}$$

und überhaupt

$$\cos.\ n\varphi = 2\cos.\ \varphi.\ \cos.\ (n-1)\varphi - \cos.\ (n-2)\varphi.$$

§. 130.

Da $\sin.\ (y + z) = \sin. y. \cos. z + \cos.\ y.\ \sin.\ z$ und

$\sin.\ (y - z) = \sin. y. \cos. z - \cos. y. \sin. z$; so erhält man, wenn man diese Gleichungen theils addirt, theils subtrahirt

$$1.\ \sin. y. \cos. z = \frac{\sin. (y + z) + \sin. (y - z)}{2}$$

$$2.\ \cos. y. \sin. z = \frac{\sin. (y + z) - \sin. (y - z)}{2}$$

Da ferner $\cos. (y + z) = \cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin. z$, und

$\cos. (y - z) = \cos. y. \cos. z + \sin. y. \sin. z$ ist, so erhält man auf eben die Art

$$3.\ \cos y.\cos z = \frac{\cos(y-z)+\cos(y+z)}{2}$$

$$4.\ \sin y.\sin z = \frac{\cos(y-z)-\cos(y+z)}{2}$$

Setzt man nun $y = z = \frac{1}{2}v$, so bekommt man aus diesen letztern Formeln:

$$5.\ (\cos\tfrac{1}{2}v)^2 = \frac{1+\cos v}{2},\ \text{und}\ \cos\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1+\cos v}{2}}$$

$$6.\ (\sin\tfrac{1}{2}v)^2 = \frac{1-\cos v}{2},\ \text{und}\ \sin\tfrac{1}{2}v = \sqrt{\frac{1-\cos v}{2}}$$

wornach man aus dem Cosinus eines jeden Winkels den Sinus und Cosinus seiner Hälfte finden kann *).

*) Setzt man $\frac{1}{2}v = \varphi$, also $v = 2\varphi$, so wird

$2(\sin\varphi)^2 = 1 - \cos 2\varphi$, aus 6, und

$2(\cos\varphi)^2 = 1 + \cos 2\varphi$, aus 5.

Auch lassen sich hier schon die Bestimmungen für die übrigen Potestäten der Sinus und Cosinus finden, welche Euler am Ende des 14ten Capitels im 262 und 263sten §. mitgetheilt, aber bereits vorher öfters gebraucht hat. Denn einmal fließen die vier Gleichungen, die im Anfange des 262sten §. stehen, in der Ordnung, in welcher sie daselbst gefunden werden, sehr leicht aus 4, 2, 1 und 3 des gegenwärtigen §. Ferner sind die Bestimmungen für $2(\sin\varphi)^2$ und $2(\cos\varphi)^2$ so eben angeführt worden. Und was die übrigen Bestimmungen betrifft, so ist

$4(\sin\varphi)^3 = 2\sin\varphi \times 2(\sin\varphi)^2 = 2\sin\varphi(1-\cos 2\varphi)$
$= 2\sin\varphi - 2\cos 2\varphi.\sin\varphi$. Aber aus 2 im §. ist
$-2\cos 2\varphi.\sin\varphi = -\sin 3\varphi + \sin\varphi$; und also ist
$4(\sin\varphi)^3 = 3\sin\varphi - \sin 3\varphi$

Ferner ist

$8(\sin\varphi)^4 = 2\sin\varphi \times 4(\sin\varphi)^3 = 2\sin\varphi(3\sin\varphi - \sin 3\varphi)$
$= 3.2(\sin\varphi)^2 - 2\sin 3\varphi.\sin\varphi$. Es ist aber
$3.2(\sin\varphi)^2 = 3 - 3\cos 2\varphi$, und aus 4 im §. ist
$-2\sin 3\varphi.\sin\varphi = -\cos 2\varphi + \cos 4\varphi$. Folglich
$8(\sin\varphi)^4 = 3 - 4\cos 2\varphi + \cos 4\varphi$

Ferner

Ferner ist

$16(\sin.\varphi)^5 = 2\sin.\varphi \times 8(\sin.\varphi)^4 = 2\sin.\varphi(3-4\cos.2\varphi + \cos.4\varphi)$

$= 6\sin.\varphi - 4 \times 2\cos.2\varphi.\ \sin.\varphi + 2\cos.4\varphi.\ \sin.\varphi$

Es ist aber aus 2 im §. $-4.2\cos.2\varphi.\ \sin.\varphi = -4\sin.3\varphi + 4\sin.\varphi$, und

$2\cos.4\varphi.\ \sin.\varphi = \sin.5\varphi - \sin.3\varphi$. Folglich

$16(\sin.\varphi)^5 = 10\sin.\varphi - 5\sin.3\varphi + \sin.5\varphi.$

Diese Beyspiele zeigen hinlänglich die Art und Weise, wie man aus $2(\sin.\varphi)^2 = 1 - \cos.2\varphi$, und $2(\cos.\varphi)^2 = 1 + \cos.2\varphi$, indem man jene Gleichung mit $2\sin.\varphi$ und diese mit $2\cos.\varphi$ fortgesetzt multiplicirt, und das daher sich Ergebende nach den vier ersten Gleichungen im § und den bereits gefundenen Bestimmungen abändert, die von Eulern am angeführten Orte mitgetheilten Bestimmungen der Potestäten von $\sin.\varphi$ und $\cos.\varphi$ findet; denn bey der Erfindung der Potestäten der Cosinus ist das Verfahren dem bey der Erfindung der Potestäten der Sinus bis auf das Angeführte durchaus ähnlich.

§. 131.

Setzt man ferner $y + z = a$, und $y - z = b$; so wird $y = \frac{a+b}{2}$ und $z = \frac{a-b}{2}$, und bringt man diese Werthe in die vorhergehende Formeln, so bekommt man diese Gleichungen, wovon jede einen Lehrsatz enthält:

1. $\sin.a + \sin.b = 2\sin.\frac{a+b}{2}.\ \cos.\frac{a-b}{2}$
2. $\sin.a - \sin.b = 2\cos.\frac{a+b}{2}.\ \sin.\frac{a-b}{2}$
3. $\cos.a + \cos.b = 2\cos.\frac{a+b}{2}.\ \cos.\frac{a-b}{2}$
4. $\cos.b - \cos.a = 2\sin.\frac{a+b}{2}.\ \sin.\frac{a-b}{2}.$

Hieraus ergiebt sich ferner vermittelst der Division

$$5.\ \frac{\sin. a + \sin. b}{\sin. a - \sin. b} = \text{tang.} \frac{a+b}{2} . \cot. \frac{a-b}{2} = \frac{\text{tang.} \frac{a+b}{2}}{\text{tang.} \frac{a-b}{2}}$$

$$6.\ \frac{\sin. a + \sin. b}{\cos. a + \cos. b} = \text{tang.} \frac{a+b}{2}$$

$$7.\ \frac{\sin. a + \sin. b}{\cos. b - \cos. a} = \cot. \frac{a-b}{2}$$

$$8.\ \frac{\sin. a - \sin. b}{\cos. a + \cos. b} = \text{tang.} \frac{a-b}{2}$$

$$9.\ \frac{\sin. a - \sin. b}{\cos. b - \cos. a} = \cot. \frac{a+b}{2}$$

$$10.\ \frac{\cos. a + \cos. b}{\cos. b - \cos. a} = \cot. \frac{a+b}{2} . \cot. \frac{a-b}{2}$$

Endlich findet man hieraus

$$11.\ \frac{\sin. a + \sin. b}{\cos. a + \cos. b} = \frac{\cos. b - \cos. a}{\sin. a - \sin. b}$$

$$12.\ \frac{\sin. a + \sin. b}{\sin. a - \sin. b} \times \frac{\cos. a + \cos. b}{\cos. b - \cos. a} = \left(\cot. \frac{a-b}{2}\right)^2$$

$$13.\ \frac{\sin. a + \sin. b}{\sin. a - \sin. b} \times \frac{\cos. b - \cos. a}{\cos. a + \cos. b} = \left(\text{tang.} \frac{a+b}{2}\right)^2$$

§. 132.

Da $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$ ist, so ist auch, wenn man die Faktoren nimmt, $(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z) = 1$. Nun sind zwar diese Faktoren imaginär, allein sie gewähren nichts destoweniger bey der Multiplication und Combination der Bogen einen sehr großen Nutzen. Denn sucht man das Produkt dieser Faktoren

$$(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)(\cos. y + \sqrt{-1}. \sin. y);$$

so findet man

$\cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin. z + (\cos. y. \sin. z + \sin. y. \cos. z)\sqrt{-1}.$
Da nun aber

$$\cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin. z = \cos. (y + z), \text{ und}$$
$$\cos. y. \sin. z + \sin. y. \cos. z = \sin. (y + z) \text{ ist, [§. 130.]}$$

so ist das Produkt

$$(\cos. y + \sqrt{-1}. \sin. y)(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z) = \cos. (y + z) + \sqrt{-1}. \sin. (y + z),$$

und auf eine ähnliche Art ergiebt sich

$$(\cos. y - \sqrt{-1}. \sin. y)(\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z) = \cos. (y + z) - \sqrt{-1}. \sin. (y + z).$$

Auch ist nunmehr leicht einzusehen, daß

$$(\cos. x \pm \sqrt{-1}. \sin. x)(\cos. y \pm \sqrt{-1}. \sin. y)(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z) = \cos. (x + y + z) \pm \sqrt{-1}. \sin. (x + y + z); \text{ u. s. f.}$$

seyn wird.

§. 133.

Hieraus ergiebt sich, [wenn man $x = y = z$ setzt,]
$(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^2 = \cos. 2z \pm \sqrt{-1}. \sin. 2z$, desgleichen
$(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^3 = \cos. 3z \pm \sqrt{-1}. \sin. 3z$, u. überhaupt
$(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^n = \cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz$; *) so wie hieraus, wegen der doppelten Zeichen,

$$\cos. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^n + (\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z)^n}{2}, \text{ und}$$

$$\sin. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}. \sin. z)^n - (\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z)^n}{2\sqrt{-1}} \text{ **)}$$

Entwickelt man aber diese Binomien durch Reihen, so wird

$$\cos. nz = (\cos. z)^n - \frac{n(n-1)}{1 . 2} (\cos. z)^{n-2} (\sin. z)^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 . 2 . 3 . 4} (\cos. z)^{n-4} (\sin. z)^4 - \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1 . 2 . 3 . 4 . 5 . 6} (\cos. z)^{n-6} (\sin. z)^6 + \text{ㄈ. u.}$$

$$\sin.nz = \frac{n}{1}(\cos.z)^{n-1}\sin.z - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}(\cos.z)^{n-3}(\sin.z)^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.2.3.4.5}(\cos.z)^{n-5}(\sin.z)^5 - \text{etc.}$$

*) Daß

$$(\cos.z \pm \sqrt{-1}.\sin.z)^n = \cos.nz \pm \sqrt{-1}.\sin.nz$$

ist, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet, ist durch den vorhergehenden und den gegenwärtigen §. außer allen Zweifel gesetzt. Es ist aber dieser Satz von einem weit größern Umfange, denn er gilt, n mag eine positive oder negative, eine ganze oder eine gebrochene, eine rationale oder eine irrationale Zahl bedeuten. Gelegentlich beweiset solches Euler in den bey §. 32. angeführten Recherches sur les racines imaginaires des équations §. 85. allein mit Hülfe der Differential-Rechnung. Wie und wie weit man sich davon ohne den Gebrauch der Differential-Rechnung überzeugen könne? davon sehe man den Zusatz zu diesem §. im Anhange.

**) Es ist nemlich

$(\cos.z + \sqrt{-1}.\sin.z)^n = \cos.nz + \sqrt{-1}.\sin.nz$, und

$(\cos.z - \sqrt{-1}.\sin.z)^n = \cos.nz - \sqrt{-1}.\sin.nz$; und

aus dem Aggregate dieser beyden Gleichungen erhält man die Bestimmung von $\cos.nz$, so wie aus der Differenz derselben die Bestimmung von $\sin.nz$.

§. 134.

Nun sey z ein unendlich kleiner Bogen, folglich $\sin.z = z$, und $\cos.z = 1$. Wenn alsdann n eine unendlich große Zahl bedeutet, so daß nz ein endlicher Bogen ist, den wir $= v$ setzen wollen; so ist, weil dann $\sin.z = z = \frac{v}{n}$ ist,

$$\cos.v = 1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{etc.}, \text{ und}$$

sin.

$$\sin. v = v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{ꝛc.}$$

Wenn also der Bogen v gegeben ist, so kann man vermittelst dieser Reihen seinen Sinus und Cosinus finden. Damit aber der Nutzen dieser Formeln desto deutlicher in die Augen falle, so wollen wir annehmen, daß v einen Bogen bedeute, der sich zum Quadranten oder 90° verhalte, wie m zu n, d. h. es soll $v = \frac{m}{n} \cdot \frac{\pi}{2}$ seyn. Da nun der Werth von π bekannt ist, so erhält man, wenn man denselben allenthalben substituirt,

$$\sin. A = \frac{m}{n} . 90^\circ =$$

$$+ \frac{m}{n} . 1{,}5707963267948966192313216916$$

$$- \frac{m^3}{n^3} . 0{,}6459640975062462536557565636$$

$$+ \frac{m^5}{n^5} . 0{,}0796926262461670451205055488$$

$$- \frac{m^7}{n^7} . 0{,}0046817541353186881006854632$$

$$+ \frac{m^9}{n^9} . 0{,}0001604411847873598218726605$$

$$- \frac{m^{11}}{n^{11}} . 0{,}0000035988432352120853404580$$

$$+ \frac{m^{13}}{n^{13}} . 0{,}0000000569217292196792681171$$

$$- \frac{m^{15}}{n^{15}} . 0{,}0000000006688035109811467224$$

$$+ \frac{m^{17}}{n^{17}} . 0{,}0000000000060669357311061950$$

$$- \frac{m^{19}}{n^{19}} . 0{,}0000000000000437706546731370$$

+

$$+\frac{m^{21}}{n^{21}}.\ 0,0000000000000002571422892856$$

$$-\frac{m^{23}}{n^{23}}.\ 0,0000000000000000012538995403$$

$$+\frac{m^{25}}{n^{25}}.\ 0,0000000000000000000051564550$$

$$-\frac{m^{27}}{n^{27}}.\ 0,0000000000000000000000181239$$

$$+\frac{m^{29}}{n^{29}}.\ 0,0000000000000000000000000549$$

und cos. $A\frac{m}{n}.\ 90^{\circ} =$

$$+\ 1,0000000000000000000000000000$$

$$-\frac{m^{2}}{n^{2}}.\ 0,2337005501361698273543113745$$

$$+\frac{m^{4}}{n^{4}}.\ 0,2536695079010480136365633659$$

$$-\frac{m^{6}}{n^{6}}.\ 0,0208634807633529608730516364$$

$$+\frac{m^{8}}{n^{8}}.\ 0,0009192602748394265802417158$$

$$-\frac{m^{10}}{n^{10}}.\ 0,0000252020423730606054810526$$

$$+\frac{m^{12}}{n^{12}}.\ 0,0000004710874778818171503665$$

$$-\frac{m^{14}}{n^{14}}.\ 0,0000000063866030837918522408$$

$$+\frac{m^{16}}{n^{16}}.\ 0,0000000000656596311497947230$$

$$-\frac{m^{18}}{o^{18}}.\ 0,0000000000005294400200734620$$

$$+\frac{m^{20}}{n^{20}}.\ 0,0000000000000034377391790981$$

—

$$-\frac{m^{22}}{n^{22}}.0,0000000000000000183599165212$$

$$+\frac{m^{24}}{n^{24}}.0,0000000000000000000820675327$$

$$-\frac{m^{26}}{n^{26}}.0,0000000000000000000003115285$$

$$+\frac{m^{28}}{n^{28}}.0,0000000000000000000000010165$$

$$-\frac{m^{30}}{n^{30}}.0,0000000000000000000000000026$$

Da es nun hinlänglich ist, wenn man die Sinus und Cosinus der Winkel bis zu 45° weiß, [weil $\cos. z = \sin. (\frac{1}{2}\pi - z)$ und $\sin. z = \cos. (\frac{1}{2}\pi - z)$ §. 127. und 128.] so ist der Bruch $\frac{m}{n}$ immer kleiner als $\frac{1}{2}$, und die Potestäten des Bruchs $\frac{m}{n}$ nehmen daher sehr stark ab, so daß meistentheils einige wenige Glieder hinreichend sind, zumal, wenn man die Sinus und Cosinus nicht in so vielen Decimal-Theilen verlangt.

§. 135.

Hat man die Sinus und Cosinus gefunden, so kann man daraus allerdings nach den bekannten Analogien [§. 127.] die Tangenten und Cotangenten finden; allein weil die Multiplication und Division mit solchen vieltheiligen Zahlen, als wodurch die Sinus und Cosinus ausgedruckt werden, eine sehr beschwerliche Sache ist, so ist es besser, wenn man auch dafür besondere Formeln sucht. Es ist also

$$\tan g. v = \frac{\sin. v}{\cos. v} = \frac{v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{rc.}}{1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{rc.}}$$

und

und

$$\cot.v = \frac{\cos.v}{\sin.v} = \frac{1 - \frac{v^2}{1.2} + \frac{v^4}{1.2.3.4} - \frac{v^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{rc.}}{v - \frac{v^3}{1.2.3} + \frac{v^5}{1.2.3.4.5} - \frac{v^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{rc.}}$$

Setzt man daher wieder $v = \frac{m}{n}.90^\circ$, so ist

$\text{tang. A.}\frac{m}{n}.90^\circ =$	$\text{cot. A.}\frac{m}{n}.90^\circ =$
$+\frac{2mn}{nn-mm}.0{,}6366197723675$	$+\frac{n}{m}.0{,}6366197723675$
$+\frac{m}{n}.0{,}2975567820597$	$\frac{-4mn}{4nn-mm}.0{,}3183098861837$
$+\frac{m^3}{n^3}.0{,}0186886502773$	$-\frac{m}{n}.0{,}2052888894145$
$+\frac{m^5}{n^5}.0{,}0018424752034$	$-\frac{m^3}{n^3}.0{,}0065510747882$
$+\frac{m^7}{n^7}.0{,}0001975800714$	$-\frac{m^5}{n^5}.0{,}0003450292554$
$+\frac{m^9}{n^9}.0{,}0000216977245$	$-\frac{m^7}{n^7}.0{,}0000202791060$
$+\frac{m^{11}}{n^{11}}.0{,}0000024011370$	$-\frac{m^9}{n^9}.0{,}0000012366527$
$+\frac{m^{13}}{n^{13}}.0{,}0000002664132$	$-\frac{m^{11}}{n^{11}}.0{,}0000000764959$
$+\frac{m^{15}}{n^{15}}.0{,}0000000295864$	$-\frac{m^{13}}{n^{13}}.0{,}0000000047597$
$+\frac{m^{17}}{n^{17}}.0{,}0000000032867$	$-\frac{m^{15}}{n^{15}}.0{,}0000000002969$
$+\frac{m^{19}}{n^{19}}.0{,}0000000003651$	$-\frac{m^{17}}{n^{17}}.0{,}0000000000185$
$+\frac{m^{21}}{n^{21}}.0{,}0000000000405$	$-\frac{m^{19}}{n^{19}}.0{,}0000000000011$

+

$+ \frac{m^{23}}{n^{23}} \cdot 0{,}00000000000045$

$+ \frac{m^{25}}{n^{25}} \cdot 0{,}0000000000005$

Der Grund hiervon wird weiter unten [§. 197. f.] vorkommen.

§. 136.

Es ist vorhin [§. 134.] bemerkt worden, daß man in den Sinus und Cosinus der Winkel bis zu 45° zugleich die Sinus und Cosinus aller übrigen größern Winkel habe; man kann aber auch schon aus den Sinus und Cosinus der Winkel bis zu 30° die Sinus und Cosinus der Winkel, die über 30° sind, durch eine bloße Addition und Subtraction finden. Denn da $\sin. 30° = \frac{1}{2}$ ist, so ist aus §. 130, wenn man $y = 30°$ setzt,

$$\cos. z = \sin. (30° + z) + \sin. (30° - z) \text{ und}$$
$$\sin. z = \cos. (30° - z) - \cos. (30° + z)$$

und man erhält daher aus den Sinus und Cosinus der Winkel z und $30° - z$

$$\sin. (30° + z) = \cos. z - \sin. (30° - z) \text{ und}$$
$$\cos. (30° + z) = \cos. (30° - z) - \sin. z.$$

Hiernach kann man die Sinus und Cosinus der Winkel von 30° bis zu 60°, und aus diesen dann auch alle übrigen finden.

§. 137.

Bey den Tangenten und Cotangenten giebt es ein ähnliches Hülfsmittel. Denn da $\tan g. (a + b) = \frac{\tan g.\, a + \tan g.\, b}{1 - \tan g.\, a . \tan g.\, b}$ ist*), so ist $\tan g.\, 2a = \frac{2 \tan g.\, a}{1 - \tan g.\, a .\, \tan g.\, a}$, und

$\cot. 2a = \frac{\cot. a - \text{tang}. a}{2}$; **) und hiernach lassen sich aus den Tangenten und Cotangenten der Bogen, die kleiner sind als 30°, die Cotangenten der Bogen bis zu 60° finden.

Nun sey $a = 30° - b$, so ist $2a = 60° - 2b$, und $\cot. 2a = \text{tang}. (30° + 2b)$; folglich

$$\text{tang}. (30° + 2b) = \frac{\cot. (30° - b) - \text{tang}. (30° - b)}{2};$$

wornach man auch die Tangenten der Bogen, die größer als 30° sind, findet.

Die Secanten und Cosecanten endlich lassen sich aus den Tangenten durch eine bloße Subtraction erhalten; denn es ist

$\text{cosec}. z = \cot. \frac{1}{2}z - \cot. z$, und daher

$\sec. z = \cot. (45° - \frac{1}{2}z) - \text{tang}. z$. ***) Hieraus erhellet zur Gnüge, wie die trigonometrischen Tafeln verfertiget werden können.

*) Es ist nemlich $\text{tang}. (a + b) = \frac{\sin. (a + b)}{\cos. (a + b)}$ §. 127. $= \frac{\sin. a. \cos. b + \cos. a. \sin. b}{\cos. a. \cos. b - \sin. a. \sin. b}$, §. 128. und dividirt man den Zähler und Nenner dieses letzten Werthes durch $\cos. a. \cos. b$, so bekömmt man den obigen Werth für $\text{tang}. (a + b)$, so wie hieraus, wenn man darin a für b setzt, den sogleich folgenden für $\text{tang}. 2a$.

**) Dies folgt aus $\cot. 2a = \frac{1}{\text{tang}. 2a}$, §. 127, $= \frac{1 - \text{tang}. a. \text{tang}. a}{2 \text{tang}. a}$.

***) Da

***) Da $\text{tang.}\, z = \frac{2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}z}{1 - (\text{tang.}\,\frac{1}{2}z)^2}$, wie so eben gezeigt worden ist, so hat man daher $\text{tang.}\, z - \text{tang.}\, z\,(\text{tang.}\,\frac{1}{2}z)^2 = 2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}z$, oder $\text{tang.}\, z\,(\text{tang.}\,\frac{1}{2}z)^2 + 2\,\text{tang.}\,\frac{1}{2}z = \text{tang.}\, z$. Dividirt man nun hier allenthalben durch tang. z, so kommt $(\text{tang.}\,\frac{1}{2}z)^2 + 2\,\text{cot.}\, z.\ \text{tang.}\,\frac{1}{2}z = 1$, und es ist also $\text{tang.}\,\frac{1}{2}z = -\,\text{cot.}\, z + \sqrt{(1 + (\text{cot.}\, z)^2)}$. Da nun $\sqrt{(1 + \text{cot.}\, z)^2)} = \text{cosec.}\, z$, so wird $\text{cosec.}\, z = \text{tang.}\,\frac{1}{2}z + \text{cot.}\, z$. Es fließt aber aus $(\text{tang.}\,\frac{1}{2}z)^2 + 2\,\text{cot.}\, z.\ \text{tang.}\,\frac{1}{2}z = 1$ auch, $\text{tang.}\,\frac{1}{2}z + 2\,\text{cot.}\, z = \text{cot.}\,\frac{1}{2}z$, oder $\text{tang.}\,\frac{1}{2}z = \text{cot.}\,\frac{1}{2}z - 2\,\text{cot.}\, z$, und diesen Werth in die vorhin für cosec. z gefundene Formel gesetzt, so ist

$$\text{cosec.}\, z = \text{cot.}\,\tfrac{1}{2}z - \text{cot.}\, z$$

Nun setze man $x = 90^\circ - z$, wodurch $\frac{1}{2}x = 45^\circ - \frac{1}{2}z$, $\text{cosec.}\, x = \text{sec.}\, z$, und $\text{cot.}\, x = \text{tang.}\, z$ wird; so wird aus $\text{cosec.}\, x = \text{cot.}\,\frac{1}{2}x - \text{cot.}\, x$

$$\text{sec.}\, z = \text{cot.}\,(45^\circ - \tfrac{1}{2}z) - \text{tang.}\, z.$$

§. 138.

Nun sey abermals, wie §. 134., z ein unendlich kleiner Bogen, und n eine unendlich große Zahl i, so daß iz einen endlichen Werth v erhalte. Alsdann ist $nz = v$, und $z = \frac{v}{i}$, woher denn $\sin.\, z = \frac{v}{i}$, und $\cos.\, z = 1$ wird. Gebraucht man nun diese Werthe, so bekommt man anstatt der Formeln §. 133. diese:

$$\cos.\, v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2} \text{ und}$$

$$\sin.\, v = \frac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}.$$

In dem vorhergehenden Capitel ist aber bewiesen worden, daß $(1 + \frac{z}{i})^i = e^z$ ist, wenn e die Basis der hyperbolischen Logarithmen bedeutet; und setzt man daher für z theils $+ v\sqrt{-1}$, theils $- v\sqrt{-1}$, so wird

$$\cos. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2}, \text{ und}$$

$$\sin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Hieraus erhellet, wie die imaginären Exponential-Größen auf Sinus und Cosinus reeller Bogen zurückgebracht werden können. Es wird nemlich

$$e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1}.\ \sin. v, \text{ und}$$

$$e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1}.\ \sin. v.$$

§. 139.

Ferner sey in eben diesen Formeln §. 133. n eine unendlich kleine Zahl, oder $n = \frac{1}{i}$, indem i eine unendlich große Zahl bedeutet; so wird $\cos. nz = \cos. \frac{z}{i} = 1$, und $\sin. nz = \sin. \frac{z}{i} = \frac{z}{i}$: denn der Sinus eines unendlich kleinen Bogens ist diesem Bogen selbst gleich, der Cosinus aber $= 1$. Gebraucht man nun diese Werthe in den gedachten Formeln, so erhält man

$$1 = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}.\ \sin. z)^{\frac{1}{i}} + (\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z)^{\frac{1}{i}}}{2}, \text{ und}$$

$$\frac{z}{i} = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}.\ \sin. z)^{\frac{1}{i}} - (\cos. z - \sqrt{-1}. \sin. z^{\frac{1}{i}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Nun

Nun ist aber §. 125. gezeigt worden, daß, wenn man die hyperbolischen Logarithmen nimmt, $l(1+x) = i(1+x)^{\frac{1}{i}} - i$, oder $y^{\frac{1}{i}} = 1 + \frac{1}{i}\, l y$ ist, indem man diese letztere Gleichung aus der vorhergehenden erhält, wenn man darin y anstatt $1+x$ setzt. Setzt man daher nunmehr anstatt y theils $\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z$, theils $\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z$, so erhält man

$$1 = \frac{1 + \frac{1}{i}\, l(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z) + 1 + \frac{1}{i}\, l(\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z)}{2} = 1,$$

weil die Logarithmen als unendlich kleine Größen verschwinden, so daß also hieraus nichts folgt. Die andere Gleichung, für den Sinus, hingegen, giebt

$$\frac{z}{i} = \frac{\frac{1}{i}\, l(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z) - \frac{1}{i}\, l(\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z)}{2\sqrt{-1}},$$

woher denn

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z}{\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z}.$$

Hieraus erhellet, wie man die imaginären Logarithmen auf Kreisbogen zurückführen kann.

§. 140.

Da $\frac{\sin. z}{\cos. z} = \text{tang.}\, z$, so wird der Bogen z durch seine Tangente auf diese Art ausgedruckt:

$$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1 + \sqrt{-1}.\,\text{tang.}\, z}{1 - \sqrt{-1}.\,\text{tang.}\, z}.$$

Da nun nach §. 123.

$$l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \text{u.s.w.}$$

ist, so wird, wenn man $x = \sqrt{-1} . \text{tang}. z$ setzt,

$$z = \frac{\text{tang}. z}{1} - \frac{(\text{tang}.z)^3}{3} + \frac{(\text{tang}.z)^5}{5} - \frac{(\text{tang}.z)^7}{7} + \text{ꝛc.}$$

Ist also $\text{tang}. z = t$, folglich z ein Bogen, dessen Tangente t ist, so daß man ihn durch $A. \text{tang}. t.$ bezeichnen, und $z = A. \text{tang}. t$ setzen kann: so ist, wenn t bekannt ist, der zu dieser Tangente gehörige Bogen

$$z = \frac{t}{1} - \frac{t^3}{3} + \frac{t^5}{5} - \frac{r^7}{7} + \frac{t^9}{9} - \text{ꝛc.}$$

Da nun, wenn die Tangente t dem Radius 1 gleich wird, der zu ihr gehörende Bogen z = einem Bogen von 45°, oder $= \frac{\pi}{4}$ ist, so hat man

$$z = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ꝛc.}$$

welches die Reihe ist, die Leibnitz für den Werth der Peripherie des Zirkels erfunden hat **).

*) In der Abhandlung: De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus, welche man in den Actis eruditorum vom Jahr 1682. S. 41 f. und im dritten Theile der Genfer Ausgabe der Leibnitzischen Werke S. 140 f. findet.

§. 141.

Es fällt indeß in die Augen, daß man, um aus dieser Reihe die Größe eines Kreisbogens mit weniger Mühe zu bestimmen, für die Tangente t einen hinlänglich kleinen Bruch nehmen muß. So findet man z. B. daraus sehr leicht die Größe des Bogens z, dessen Tagente t gleich $\frac{1}{10}$ ist; denn da ist dieser Bogen $z = \frac{1}{10} - \frac{1}{3000} + \frac{1}{500000}$ ꝛc. und der Werth dieser Reihe läßt sich mit geringer Mühe in Decimal-Brüchen ausdrucken. Allein, wenn man auch die Länge dieses Bogens kennt, so ist man doch nicht im Stande, daraus die Größe der ganzen Peripherie zu bestimmen, weil man das Verhältniß eines Bogens, dessen Tangente $= \frac{1}{10}$ ist, zur ganzen Peripherie nicht angeben kann. Man muß daher, um die Länge der Peripherie zu finden, einen Bogen suchen, der ein aliquoter Theil der Peripherie ist, und dessen Tangente durch einen kleinen Bruch bequem ausgedruckt werden kann. Weil nun die Tangenten der Bogen, die kleiner als 30° und dabey aliquote Theile der Peripherie sind, zu verwickelte irrationale Größen werden, so pflegt man zu dieser Absicht den Bogen von 30°, dessen Tangente $= \frac{1}{\sqrt{3}}$ ist, zu nehmen. Da also der Bogen von $30° = \frac{\pi}{6}$ ist, so ist $\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3 \cdot 3\sqrt{3}} + \frac{1}{5 \cdot 3^2 \sqrt{3}} -$ u. s. w. und

$$\pi = \frac{2\sqrt{3}}{1} - \frac{2\sqrt{3}}{3 \cdot 3} + \frac{2\sqrt{3}}{5 \cdot 3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3^3} + \frac{2\sqrt{3}}{9 \cdot 3^4} - \text{ꝛc.}$$

und vermittelst dieser Reihe hat man den oben [§. 126.] angeführten Werth von π mit unglaublicher Mühe gefunden.

§. 142.

Diese Arbeit ist deswegen so groß, einmal weil alle einzelne Glieder dieser Reihe Irrational-Zahlen sind, und zweytens weil jedes folgende ohngefehr nur dreymal kleiner als das vorhergehende ist. Dieser Unbequemlichkeit kann indeß auf folgende Art abgeholfen werden. Man nehme den Bogen von 45° oder $\frac{\pi}{4}$, und behalte dafür die Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} +$ u. s. f. ohnerachtet dieselbe nur in einem äußerst geringen Grade convergirt, bey, zerfälle aber den Bogen $\frac{\pi}{4}$ in die beyden a und b, so daß $a + b = \frac{\pi}{4} = 45°$ sey. Da nun $\text{tang.}\,(a+b) = 1 = \dfrac{\text{tang. } a + \text{tang. } b}{1 - \text{tang. } a . \text{tang. } b}$ ist, so ist auch $1 - \text{tang. } a . \text{ tang. } b. = \text{tang. } a + \text{tang. } b.$ und $\text{tang. } b = \dfrac{1 - \text{tang. } a}{1 + \text{tang. } a}$. Setzt man nun $\text{tang. } a = \frac{1}{2}$, so wird $\text{tang. } b = \frac{1}{3}$, und vermittelst dieser Werthe kann man sowohl den Bogen a als den Bogen b durch eine rationale und weit mehr als die vorhergehende convergirende Reihe ausdrucken. Da ferner die Summe dieser beyden Bogen $= \dfrac{\pi}{4}$ ist, so hat man daher

$$\pi = 4 \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{1}{1.2} - \dfrac{1}{3.2^3} + \dfrac{1}{5.2^5} - \dfrac{1}{7.2^7} + \dfrac{1}{9.2^9} - \text{ꝛc.} \\ \dfrac{1}{1.3} - \dfrac{1}{3.3^3} + \dfrac{1}{5.3^5} - \dfrac{1}{7.3^7} + \dfrac{1}{9.3^9} - \text{ꝛc.} \end{array} \right\}$$

Auf diese Art hätte man die Länge des halben Umkreises π weit leichter finden können, als es durch die vorhin [§. 141] gefundene Reihe geschehen ist.