Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Neuntes Capitel. Von der Erforschung der trinomischen Faktoren.

Neuntes Capitel.

Von der Erforschung der trinomischen Faktoren.

§. 143.

Wie man die einfachen Faktoren einer jeden ganzen Funktion finde? ist oben [im 2ten Cap. §. 29. f.] gelehret, und daselbst gezeigt worden, daß man dazu durch die Auflösung der Gleichungen gelange. Ist nemlich irgend eine ganze Funktion $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 +$ ꝛc. gegeben, deren einfache Faktoren von der Form $p - qz$ gesucht werden sollen: so ist offenbar, daß diese Funktion $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 +$ ꝛc. wenn $p - qz$ ein Faktor derselben ist, für $z = \frac{p}{q}$, wobey $p - qz = 0$ wird, auch selbst $= 0$ werden muß. Ist also $p - qz$ ein Faktor oder Divisor der Funktion $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 +$ ꝛc. so ist $\alpha + \frac{\beta p}{q} + \frac{\gamma p^2}{q^2} + \frac{\delta p^3}{q^3} + \frac{\varepsilon p^4}{q^4} +$ ꝛc. $= 0$. Umgekehrt erhält man daher, wenn man alle Wurzeln $\frac{p}{q}$ dieser Gleichung sucht, durch dieselben eben soviel einfache Faktoren der gegebenen ganzen Funktion $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 +$ ꝛc. und zwar von der Form $p - qz$. Es erhellet aber hieraus zugleich, daß sich die Anzahl dieser einfachen Faktoren nach der höchsten Potestät von z richtet.

§. 144.

Auf diesem Wege lassen sich aber die imaginären Faktoren gewöhnlicher Weise sehr schwer finden, und es soll daher in dem gegenwärtigen Capitel ein besonderer Weg hiezu gezeigt werden. Da aber die einfachen imaginären Faktoren von der Art sind, daß die Produkte aus je zweyen reell werden, [§. 32]; so findet man die einfachen imaginären Faktoren, wenn man die doppelten Faktoren, oder die Faktoren von der Form $p - qz + rzz$ aufsucht, die zwar selbst reell sind, aber dabey aus einfachen imaginären Faktoren bestehen. Denn sind von der Funktion $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 +$ 2c. alle reelle doppelte Faktoren von dieser trinomischen Form $p - qz + rzz$ bekannt, so kann man daraus ferner alle imaginären einfachen Faktoren finden.

§. 145.

Es hat aber die Trinomie $p - qz + rzz$ einfache imaginäre Faktoren, wenn $4pr$ größer als qq, oder $\frac{q}{2\sqrt{pr}}$ kleiner als 1 ist. Da nun die Sinus und Cosinus der Winkel kleiner als 1 sind, so hat daher der Ausdruck $p - qz + rzz$ einfache imaginäre Faktoren, wenn $\frac{q}{2\sqrt{pr}}$ = dem Sinus oder Cosinus irgend eines Winkels ist. Setzt man daher $\frac{q}{2\sqrt{pr}} = \cos.\ \varphi$, oder $q = 2\sqrt{pr}.\ \cos.\ \varphi$, so hat die Trinomie $p - qz + rzz$ einfache imaginäre Faktoren. Damit aber die Irrationalität keine Schwierigkeit verursache, so wollen wir die Formel $pp - 2pqz.\ \cos.\ \varphi + qqzz$ gebrauchen, deren einfache imaginäre Faktoren diese sind:

$qz - p(\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$ und
$qz - p(\cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$.

Hier fällt in die Augen, daß für $\cos.\varphi = \pm 1$, weil alsdann $\sin.\varphi = 0$ ist, beyde Faktoren einander gleich und reell werden.

§. 146.

Ist also eine ganze Funktion $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 +$ rc. gegeben, so findet man ihre einfachen imaginären Faktoren, wenn man daraus die Buchstaben p und q und den Winkel φ bestimmt, daß diese Trinomie $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ ein Faktor der Funktion wird; denn alsdenn hat sie auch die einfachen imaginären Faktoren $qz - p(\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$ und $qz - p(\cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi.)$ Es wird daher die gegebene Funktion $= 0$, sowohl, wenn man $z = \frac{p}{q} \times (\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$ als auch, wenn man $z = \frac{p}{q} \times (\cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi)$. Thut man also solches wirklich, so erhält man eine doppelte Gleichung, woraus man sowohl den Bruch $\frac{p}{q}$ als den Bogen φ bestimmen kann.

§. 147.

So beschwerlich die gedachten Substitutionen für z beym ersten Anblick scheinen, so werden sie gleichwohl durch das, was im vorhergehenden Capitel gelehret worden ist, ohne große Mühe gemacht. Denn da daselbst [§. 133] gezeigt worden ist, daß $(\cos.\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin.\varphi)^n = \cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin.\varphi$; so entstehen daher für die Potestäten von z folgende Substitutionen:

für

für den ersten Faktor:	für den zweyten Faktor:
$z = \frac{p}{q}(\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi.)$	$z = \frac{p}{q}(\cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi.)$
$z^2 = \frac{p^2}{q^2}(\cos.2\varphi + \sqrt{-1}.\sin.2\varphi.)$	$z^2 = \frac{p^2}{q^2}(\cos.2\varphi - \sqrt{-1}.\sin.2\varphi.)$
$z^3 = \frac{p^3}{q^3}(\cos.3\varphi + \sqrt{-1}.\sin.3\varphi)$	$z^3 = \frac{p^3}{q^3}(\cos.3\varphi - \sqrt{-1}.\sin.3\varphi.)$
$z^4 = \frac{p^4}{q^4}(\cos.4\varphi + \sqrt{-1}.\sin.4\varphi.)$	$z^4 = \frac{p^4}{q^4}(\cos.4\varphi - \sqrt{-1}.\sin.4\varphi.)$
u. s. f.	u. s. f.

Setzt man nun der Kürze wegen $\frac{p}{q} = r$, und substituirt man wirklich, so erhält man folgende zwey Gleichungen:

$$0 = \begin{cases} \alpha + \beta r.\cos.\varphi + \gamma r^2.\cos.2\varphi + \delta r^3.\cos.3\varphi + \text{etc.} \\ + \beta r\sqrt{-1}.\sin.\varphi + \gamma r^2\sqrt{-1}.\sin.2\varphi + \delta r^3\sqrt{-1}.\sin.3\varphi + \text{etc.} \end{cases}$$

$$0 = \begin{cases} \alpha + \beta r.\cos.\varphi + \gamma r^2.\cos.2\varphi + \delta r^3.\cos.3\varphi + \text{etc.} \\ - \beta r\sqrt{-1}.\sin.\varphi - \gamma r^2\sqrt{-1}.\sin.2\varphi - \delta r^3\sqrt{-1}.\sin.3\varphi - \text{etc.} \end{cases}$$

§. 148.

Addirt und subtrahirt man diese beyden Gleichungen zu und von einander, und dividirt man im letztern Falle noch überdies durch $2\sqrt{-1}$; so erhält man daraus diese beyden reellen Gleichungen:

$$0 = \alpha + \beta r.\cos.\varphi + \gamma r^2.\cos.2\varphi + \delta r^3.\cos.3\varphi + \text{etc.}$$
$$0 = \quad + \beta r.\sin.\varphi + \gamma r^2.\sin.2\varphi + \delta r^3.\sin.3\varphi + \text{etc.}$$

welche auch sogleich aus der gegebenen Funktion

$$\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \text{etc.}$$

gefunden werden können, wenn man darin allenthalben einmal $z^n = r^n.\cos.n\varphi$, und dann $z^n = r^n.\sin.n\varphi$ setzt. Auf diese Art wird nemlich, da $\sin.0\varphi = 0$, und $\cos.0\varphi = 1$ ist, für z^0 oder 1 in dem beständigen Gliede im ersten Falle 1 im letzten aber 0 gesetzt. Wenn man daher aus diesen beyden Gleichungen die unbekannten Größen r und φ bestimmt,

so

so erhält man dadurch, da $r = \frac{p}{q}$ ist, einen Faktor der trinomischen Funktion $pp - 2pqz.\ \cos.\ \varphi + qqzz$, welche zwey einfache imaginäre Faktoren in sich schließt.

§. 149.

Multiplicirt man die erste Gleichung durch $\sin.\ m\varphi$, und die andere durch $\cos.\ m\varphi$, und addirt und subtrahirt man darauf die erhaltenen Produkte zu und von einander, so bekommt man folgende zwey Gleichungen:

$$0 = \alpha.\ \sin.\ m\,\varphi + \beta r.\ \sin.\ (m+1)\,\varphi + \gamma r^2.\ \sin.\ (m+2)\,\varphi$$
$$+ \delta r^3.\ \sin.\ (m+3)\,\varphi + \text{etc.}$$
$$0 = \alpha.\ \sin.\ m\varphi + \beta r.\ \sin.\ (m-1)\,\varphi + \gamma r^2.\ \sin.\ (m-2)\,\varphi$$
$$+ \delta r^3.\ \sin.\ (m-3)\,\varphi + \text{etc.}$$

Multiplicirt man hingegen die erste Gleichung durch $\cos.\ m\,\varphi$, und die zweyte durch $\sin.\ m\,\varphi$, so entstehen hieraus durch die Addition und Subtraction diese Gleichungen:

$$0 = \alpha.\ \cos.\ m\,\varphi + \beta r.\ \cos.\ (m-1)\,\varphi + \gamma r^2.\ \cos.\ (m-2)\,\varphi$$
$$+ \delta r^3.\ \cos.\ (m-3)\,\varphi + \text{etc.}$$
$$0 = \alpha.\ \cos.\ m\,\varphi + \beta r.\ \cos.\ (m+1)\,\varphi + \gamma r^2.\ \cos.\ (m+2)\,\varphi$$
$$+ \delta r^3.\ \cos.\ (m+3)\,\varphi + \text{etc.}$$

Aus jedem Paare dieser Gleichungen ist man nun im Stande, die unbekannten Größen r und φ bestimmen; und da dasselbe meistens auf mehr denn eine Art geschehen kann, so erhält man auch zugleich mehrere trinomische Faktoren, ja man findet dadurch alle in der gegebenen Funktion enthaltenen*).

*) Dieses wird durch das Folgende klar.

§. 150.

Damit der Gebrauch dieser Regeln mit vollkommner Deutlichkeit gefaßt werden möge, so wollen wir die trinomischen

mischen Faktoren einiger öfters vorkommenden Funktionen aufsuchen, um dieselben bey vorkommender Gelegenheit von hier entlehnen zu können. Angenommen also, daß die trinomischen Faktoren von der Form $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ aus der Funktion $a^n + z^n$ gefunden werden sollen: so hat man, wenn man $r = \frac{p}{q}$ setzt, diese beyden Gleichungen.

$$0 = a^n + r^n.\cos.n\varphi,\ \text{und}\ 0 = r^n.\sin.n\varphi.$$

Hiervon giebt die letzte $\sin.n\varphi = 0$, und es ist daher $n\varphi$ ein Bogen, der entweder unter den Ausdruck $(2k+1)\pi$ oder unter diesen $2k\pi$ gehört, [S. die Anmerk. zum 127. §.] wo k eine ganze Zahl bedeutet. Diese beyden Fälle müssen deswegen von einander unterschieden werden, weil darin die Cosinus verschieden sind, und im ersten $\cos.(2k+1)\pi = -1$, im letzten aber $\cos.2k\pi = +1$ ist. Hier fällt indeß in die Augen, daß die erste Form, oder $n\varphi = (2k+1)\pi$ genommen werden muß, weil dabey $\cos.n\varphi = -1$, und folglich $0 = a^n - r^n$ ist, woraus sich denn $r = a = \frac{p}{q}$ ergiebt. Es ist also $p = a$, $q = 1$, und $\varphi = \frac{(2k+1)\pi}{n}$, und folglich $aa - 2az.\cos.\frac{(2k+1)\pi}{n} + zz$ ein Faktor der Funktion $a^n + z^n$. Da man nun für k jede ganze Zahl setzen kann, so entstehen dadurch mehrere Faktoren, deren Anzahl aber deswegen nicht unendlich ist, weil, wie jedes Beyspiel zeigen kann, die ersten Faktoren wiederkommen, wenn $2k+1$ über n vermehrt wird, indem $\cos.(2\pi \pm \varphi) = \cos.\varphi$ ist, [§. 128]. Ist ferner n eine ungerade Zahl, so erhält man, wenn man $2k+1 = n$ nimmt, den quadratischen Faktor $aa + 2az + zz$; doch folgt daraus nicht, daß das Quadrat $(a+z)^2$ ein Faktor

der

der Funktion $a^n + z^n$ ist, weil man daraus nach [§. 148.] eine einzige Gleichung erhält, woraus man deutlich abnehmen kann, daß bloß $a + z$ ein Faktor der Formel $a^n + z^n$ ist. Diese Regel muß man immer vor Augen behalten, so oft $\cos.\ \varphi$ entweder $+ 1$ oder $- 1$ ist.

Exempel.

Jetzt wollen wir einige Fälle, um jene Faktoren desto deutlicher vor Augen zu stellen, betrachten, und diese Fälle in zwey Classen theilen, je nachdem n eine gerade oder ungerade Zahl ist.

Wenn $n = 1$, so hat die Formel $a + z$ den Faktor $a + z$	Wenn $n = 2$, so hat die Formel $a^2 + z^2$ den Faktor $a^2 + z^2$
Wenn $n = 3$, so hat die Formel $a^3 + z^3$ die Faktoren $aa - 2az.\ \cos.\ \frac{1}{3}\pi + zz$ $a + z$	Wenn $n = 4$, so hat die Formel $a^4 + z^4$ die Faktoren $aa - 2az.\ \cos.\ \frac{1}{4}\pi + zz$ $aa - 2az.\ \cos.\ \frac{3}{4}\pi + zz$
Weun $n = 5$, so hat die Formel $a^5 + z^5$ die Faktoren $aa - 2az.\ \cos.\ \frac{1}{5}\pi + zz$ $aa - 2az\ \cos.\ \frac{3}{5}\pi + zz$ $a + z$	Wenn $n = 6$, so hat die Formel $a^6 + z^6$ die Faktoren $aa - 2az.\ \cos.\ \frac{1}{6}\pi + zz$ $aa - 2az.\ \cos.\ \frac{3}{6}\pi + zz$ $aa - 2az.\ \cos.\ \frac{5}{6}\pi + zz$

Aus diesen Beyspielen erhellet, daß man alle Faktoren findet, wenn man anstatt $2k + 1$ alle ungeraden Zahlen, die

nicht

nicht größer als der Exponent n sind, setzet, daß man aber alsdann, wenn sich ein quadratischer Faktor ergiebt, bloß seine Wurzel zu den Faktoren zählen muß.

§. 151.

Nun sey die Funktion $a^n - z^n$ gegeben, welche den trinomischen Faktor $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ haben wird, wenn man für $r = \frac{p}{q}$ die Gleichungen $0 = a^n - r^n.\cos.n\varphi$, und $0 = r^n.\sin.n\varphi$ erhält. Es ist daher auch hier $\sin.n\varphi = 0$, und folglich $n\varphi = (2k+1)\pi$ oder $n\varphi = 2k\pi$. Da nun der letztere Werth genommen werden muß, und dabey $\cos.n\varphi = 1$, und folglich $0 = a^n - r^n$, und $r = \frac{p}{q} = a$ wird: so ist hier $p = a$, $q = 1$, und $\varphi = \frac{2k\pi}{n}$; folglich der trinomische Faktor der gegebenen Funktion $= aa - 2az.\cos.\frac{2k}{n}\pi + zz$. Setzt man in dieser Formel anstatt $2k$ alle gerade Zahlen, die nicht größer als n sind, so erhält man dadurch alle Faktoren; man muß aber dabey, wenn man auf quadratische Faktoren kommt, die vorhin gegebene Regel vor Augen behalten. Nimmt man also zuvörderst $k = 0$, so entsteht der Faktor $aa - 2az + zz$, an dessen Stelle aber die Wurzel $a - z$ genommen werden muß. Eben so erhält man, wenn man $2k = n$ setzt, den Faktor $aa + 2az + zz$, woraus erhellet, daß $a + z$ ein Divisor der Funktion $a^n - z^n$ ist.

Exempel.

Auch hier entstehen, wie vorhin, zweyerley Fälle, je nachdem der Exponent n eine ungerade oder eine gerade Zahl ist.

Wenn

Wenn $n = 1$, so ist die Formel $a - z$ selbst der Faktor $a - z$	Wenn $n = 2$, so hat die Formel $a^2 - z^2$ die Faktoren $a - z$ und $a + z$
Wenn $n = 3$, so hat die Formel $a^3 - z^3$ die Faktoren $a - z$ $aa - 2az. \cos. \frac{2}{3}\pi + zz$	Wenn $n = 4$, so hat die Formel $a^4 - z^4$ die Faktoren $a - z$. $aa - 2az. \cos. \frac{2}{4}\pi + zz$ $a + z$
Wenn $n = 5$, so hat die Formel $a^5 - z^5$ die Faktoren $a - z$ $aa - 2az. \cos. \frac{2}{5}\pi + zz$ $aa - 2az. \cos. \frac{4}{5}\pi + zz$	Wenn $n = 6$, so hat die Formel $a^6 - z^6$ die Faktoren $a - z$. $aa - 2az. \cos. \frac{2}{6}\pi + zz$ $aa - 2az. \cos. \frac{4}{6}\pi + zz$ $a + z$

§. 152.

Hierdurch wird die oben [§. 32.] vorläufig beygebrachte Behauptung bestätiget, nemlich, daß jede ganze Funktion, wo nicht in einfache, doch in doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden könne: denn wir haben gesehen, daß die in Ansehung ihrer Dimensionen ganz unbestimmte Funktion $a^n \pm z^n$ jederzeit, außer ihren einfachen reellen Faktoren, in doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden kann. Wir wollen also nunmehr zu zusammengesetztern Funktionen fortgehen, dergleichen $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n}$ ist. Hat diese Funktion zwey Faktoren von der Form $\eta + \vartheta z^n$, so setzt das Vorhergehende zu ihrer Auflösung hinlänglich in den Stand; und es braucht daher hier nur gezeigt zu werden, wie man die Funktion $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n}$, wenn sie nicht zwey Faktoren von der Form $\eta + \vartheta z^n$ hat, in reelle, einfache entweder oder doppelte, Faktoren, auflösen kann.

§. 153.

Man betrachte also diese Funktion: $a^{2n} - 2a^n z^n . \cos. g + z^{2n}$, welche nicht in zwey reelle Faktoren von der Form $\eta + \vartheta z^n$ aufgelöset werden kann. Nimmt man an, daß $pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz$ ein doppelter reeller Faktor dieser Funktion sey, wenn $r = \frac{p}{q}$ gesetzt wird: so bekommt man folgende zwey Gleichungen aufzulösen:

$0 = a^{2n} - 2a^n r^n . \cos. g. \cos. n\varphi + r^{2n} . \cos. 2n\varphi$, und

$0 = - 2a^n r^n . \cos. g. \sin. n\varphi + r^{2n} . \sin. 2n\varphi$.

Man kann aber auch anstatt der ersten Gleichung aus §. 149., (wenn man $m = 2n$ setzt) diese nehmen:

$0 = a^{2n} . \sin. 2n\varphi - 2a^n r^n . \cos. g. \sin. n\varphi$;

und die Vergleichung derselben mit der vorhergehenden zweyten Gleichung giebt $r = a$, wodurch denn ferner $\sin. 2n\varphi = 2\cos. g. \sin. n\varphi$ wird. Nun ist aber $\sin. 2n\varphi = 2\sin. n\varphi . \cos. n\varphi$, und folglich $\cos. n\varphi = \cos. g$; und da allezeit $\cos. (2k\pi \pm g) = \cos. g$ ist, so erhält man $n\varphi = 2k\pi \pm g$, und $\varphi = \frac{2k\pi \pm g}{n}$. Es ist also der allgemeine doppelte Faktor der gegebenen Funktion $= aa - 2az. \cos. \frac{2k\pi \pm g}{n} + zz$; und man bekommt daher alle Faktoren, wenn man für $2k$ nach und nach alle gerade Zahlen setzt, die nicht größer als n sind, wie solches durch die Anwen-

dung

dung des Gefundenen auf einen wirklichen Fall erhellen wird.

Exempel.

Wir wollen, um diese Faktoren genauer kennen zu lernen, für n nach und nach 1, 2, 3, 4 u. s. f. setzen. Es hat also

die Formel

$a^2 - 2az.\ \cos.\ g + zz$

den einzigen Faktor

$a^2 - 2az.\ \cos.\ g + zz$

---

die Formel

$a^4 - 2a^2z^2.\ \cos.\ g + z^4$

zwey Faktoren

$a^2 - 2az.\ \cos.\ \frac{g}{2} + z^2$

$a^2 - 2az.\ \cos.\ (\frac{2\pi \pm g}{2}) + z^2$ oder $a^2 + 2az.\ \cos.\ \frac{g}{2} + zz$

---

die Formel

$a^6 - 2a^3z^3.\ \cos.\ g + z^6$

drey Faktoren

$a^2 - 2az.\ \cos.\ \frac{g}{3} + z^2$

$a^2 - 2az.\ \cos.\ (\frac{2\pi - g}{3}) + z^2$

$a^2 - 2az.\ \cos.(\frac{2\pi + g}{3}) + z^2$

---

die Formel

$a^8 - 2a^4z^4.\ \cos.\ g + z^8$

vier Faktoren

$$a^2 - 2az.\cos.\frac{g}{4} + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{2\pi - g}{4}\right) + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{2\pi + g}{4}\right) + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{4\pi \pm g}{4}\right) + z^2 \text{ oder } a^2 + 2az.\cos.\frac{g}{4} + z^2$$

---

die Formel

$$a^{10} - 2a^5z^5.\cos.g + z^{10}$$

fünf Faktoren

$$a^2 - 2az.\cos.\frac{g}{5} + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{2\pi - g}{5}\right) + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{2\pi + g}{5}\right) + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{4\pi - g}{5}\right) + z^2$$

$$a^2 - 2az.\cos.\left(\frac{4\pi + g}{5}\right) + z^2$$

Durch diese Beyspiele erhält der Satz, daß man eine jede ganze Funktion in reelle, einfache oder doppelte Faktoren auflösen könne, eine neue Bestätigung. *)

*) Eine sehr schöne Anwendung des Bisherigen findet man auch in der Abhandlung über die Art, die Sinus und Cosinus der Vielfachen der Winkel durch Produkte auszudrucken, welche im ersten Bande der Eulerschen Opusc. analytic. Petersburg 1783. S. 353. f. steht. Man lese hierbey dasjenige, was im Anhange unter dem Titel: Zusätze zum neunten Capitel, befindlich ist.

§. 154.

§. 154.

Nun können wir zu der Funktion $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n}$ fortgehen, von der ausgemacht ist, daß sie einen reellen Faktor von der Form $\eta + \vartheta z^n$ hat, und dessen reelle, einfache entweder oder doppelte Faktoren lassen sich finden. Was aber den andern Multiplicator, dessen Form diese ist, $\iota + \varkappa z^n + \lambda z^{2n}$, betrifft: so kann man ihn, er mag beschaffen seyn, wie er will, nach dem vorhergehenden §. auflösen. Ferner kann auch diese Funktion $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n}$, da sie stets zwey reelle Faktoren von der Form $\eta + \vartheta z^n + \iota z^{2n}$ hat, in reelle einfache oder doppelte Faktoren aufgelöset werden. Ja auch diese Funktion $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n} + \varepsilon z^{4n} + \zeta z^{5n}$ ist nun in reelle, einfache oder doppelte Faktoren auflösbar, da sie ausgemachter Weise einen Faktor von der Form $\eta + \vartheta z^n$ hat, und der andere unter die vorhergehende Form gehört. Wenn es daher auch bis jetzt noch zweifelhaft gewesen wäre, ob jede ganze Funktion auf diese Art aufgelöset werden könne: so so ist doch durch das Bisherige aller Zweifel darüber gänzlich gehoben werden.

§. 155.

Man kann aber diese Auflösung in Faktoren auch auf die unendlichen Reihen anwenden. Denn da wir gesehen haben, [§. 125.] daß $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} +$ ꝛc. $= e^x$, und $e^x = (1 + \frac{x}{i})^i$ ist, wenn i eine unendlich große Zahl bedeutet: so ist offenbar, daß die Reihe $1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} +$ ꝛc. unendlich viel einander gleiche Faktoren, nemlich $1 + \frac{x}{i}$ habe. Zieht man aber von dieser Reihe das erste Glied 1 ab, so wird $\frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} +$ ꝛc. $= e^x - 1 = (1 + \frac{x}{i})^i - 1$: und vergleicht man diese Form mit der im 151sten §. wodurch man $a = 1 + \frac{x}{i}$; $n = i$, und $z = 1$ erhält, so bekommt man zum allgemeinen Faktor $(1 + \frac{x}{i})^2 - 2(1 + \frac{x}{i}) \cos. \frac{2k}{i} \pi + 1$; woraus sich denn, wenn man für 2 k nach und nach alle gerade Zahlen setzt, alle Faktoren ergeben. Setzt man $2k = 0$, so bekommt man den quadratischen Faktor $\frac{xx}{ii}$, für welchen man aber, wegen der [§. 150.] angeführten Gründe, die Wurzel $\frac{x}{i}$ nehmen muß, und es ist daher x ein Faktor des Ausdrucks $e^x - 1$ wie solches auch schon von selbst in die Augen fällt. Um die übrigen Faktoren zu finden, muß bemerkt werden, daß $\cos. \frac{2k}{i} \pi$, weil $\frac{2k}{i} \pi$ ein unendlich kleiner Bogen ist, $= 1 - \frac{2kk}{ii} \pi\pi$ genommen werden kann, indem die übrigen Glieder, wenn man denselben nach §. 134. sucht, wegen der unendlichen Größe von i verschwinden. Man bekommt folglich den allgemeinen Faktor $\frac{xx}{ii} + \frac{4kk}{ii} \pi\pi + \frac{4kk\pi\pi}{i^3} x$, und es ist also der Ausdruck $e^x - 1$ durch $1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{4kk\pi\pi}$ theilbar *). Aus allen diesen Sätzen

folgt,

folgt, daß der Ausdruck $e^x - 1 = x\left(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \text{rc.}\right)$ außer dem Faktor x folgende ohne Ende fortgehende Faktoren $\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{4\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{16\pi\pi}\right)$ $\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{36\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{64\pi\pi}\right)$ rc. habe.

*) Da $e^x - 1 = \left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 1 = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{rc.} = x\left(1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \text{rc.}\right)$, und davon der Faktor x bereits gefunden worden ist: so muß der noch übrige allgemeine Faktor von $e^x - 1$ die Form $1 + \alpha x + \beta xx$ haben, daß man bey einer wirklichen Multiplication der aus ihm entstehenden besondern Faktoren die Reihe $1 + \frac{x}{1.2} + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^3}{1.2.3.4} + \text{rc.}$ erhalten kann. Man findet aber diese Form aus $\frac{xx}{ii} + \frac{4kk}{ii}\pi\pi + \frac{4kk\pi\pi}{i^3}x$, wenn man diesen Ausdruck durch $\frac{4kk\pi\pi}{ii}$ dividirt. Der Quotient ist nemlich $1 + \frac{x}{i} + \frac{xx}{4kk\pi\pi}$.

§. 156.

Da aber diese Faktoren einen unendlich kleinen Theil $\frac{x}{i}$ enthalten, und derselbe nicht weggelassen werden kann, weil er in jedem Faktor vorkommt, und, da die Anzahl derselben $= \frac{1}{2}i$ ist, durch die Multiplication aller das Glied $\frac{x}{2}$ giebt: so wollen wir, um diese Unbequemlichkeit zu vermeiden, den Ausdruck $e^x - e^{-x}$ betrachten. Da also $e^x - e^{-x} = (1 + \frac{x}{i})^i - (1 - \frac{x}{i})^i = 2(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{1.2.3} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5} + \text{ꝛc.})$ ist, indem $e^{-x} = 1 - \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^3}{1.2.3} + \text{ꝛc.}$ ist: so erhält man, durch die Vergleichung mit §. 151, $n = i$, $a = 1 + \frac{x}{i}$, und $z = 1 - \frac{x}{i}$; und diese Werthe geben den Faktor des angeführten Ausdrucks $= aa - 2az \cos \frac{2k}{n}\pi + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2(1 - \frac{xx}{ii}) \cos \frac{2k}{i}\pi = \frac{4xx}{ii} + \frac{4kk}{ii}\pi\pi - \frac{4kk\pi\pi xx}{i^4}$, indem $\cos \frac{2k}{i}\pi = 1 - \frac{2kk\pi\pi}{ii}$ ist.

Es ist daher die Funktion $e^x - e^{-x}$ durch $1 + \frac{xx}{kk\pi\pi} - \frac{xx}{ii}$ theilbar,*) und man kann $\frac{xx}{ii}$ sicher aus diesem Faktor weglassen, weil es, auch mit i multiplicirt, doch noch eine unendlich kleine Größe bleibt. Setzt man nun überdies, wie vorhin, $k = 0$, so wird der erste Faktor $= x$; und bringt man nunmehr jene Faktoren in Ordnung, so findet man

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x(1 + \frac{xx}{\pi\pi})(1 + \frac{xx}{4\pi\pi})(1 + \frac{xx}{9\pi\pi})(1 + \frac{xx}{16\pi\pi})$$
$$(1 + \frac{xx}{25\pi\pi}) \text{ ꝛc.}$$
$$= x(1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.\ldots.7} + \text{ꝛc.})$$

Es ist hier nemlich einem jeden Faktor eine solche Form gegeben worden, daß bey einer wirklichen Multiplication das erste Glied x herausgebracht werden kann.

*) Man erhält nemlich diese Form, wenn man $\frac{4xx}{ii} +$

4kk

$\frac{4kk}{ii}\pi\pi - \frac{4kk\pi\pi xx}{i^4}$ durch $\frac{4kk\pi\pi}{ii}$ dividirt, und sie ist nothwendig, damit das erste Glied des Produkts der aus ihr abgeleiteten Faktoren $= 1$ werde.

§. 157.

Da ferner $\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} +$ ꝛc. $= \frac{(1 + \frac{x}{i})^i + (1 - \frac{x}{i})^i}{2}$ ist, so findet man durch die Vergleichung dieser Formel mit der obigen $a^n + z^n$, [§. 150.] $a = 1 + \frac{x}{i}$; $z = 1 - \frac{x}{i}$; und $n = i$; woher denn der allgemeine Faktor $= aa - 2az.\cos.\frac{2k+1}{n}\pi + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2(1 - \frac{xx}{ii})\cos.\frac{2k+1}{i}\pi$ wird. Da nun $\cos.\frac{2k+1}{i}\pi = 1 - \frac{(2k+1)^2\pi\pi}{2ii}$, so erhält dadurch der gedachte Faktor die Form $\frac{4xx}{ii} + \frac{(2k+1)^2\pi\pi}{ii}$, indem das Glied, dessen Nenner i^4 ist, verschwindet. Weil aber jeder Faktor des Ausdrucks $1 + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} +$ ꝛc. die Form $1 + \alpha xx$ haben muß, so muß man den gefundenen Faktor durch $\frac{(2k+1)^2\pi\pi}{ii}$ dividiren, wodurch derselbe auf die verlangte Form gebracht, und $= 1 + \frac{4xx}{(2k+1)^2\pi\pi}$ wird. Hieraus findet man alle, der Anzahl nach unendliche, Faktoren, wenn man für $2k + 1$ nach und nach alle ungeraden Zahlen setzt, und es ist daher

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{rc.} =$$

$$\left(1 + \frac{4xx}{\varpi\varpi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{9\varpi\varpi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{25\varpi\varpi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{49\varpi\varpi}\right) \text{rc.}$$

§. 158.

Wenn x eine imaginäre Größe wird, so verwandeln sich diese Exponential-Formeln in den Sinus und Cosinus irgend eines reellen Bogens. Denn setzt man $x = z\sqrt{-1}$, so ist [§. 138.]

$$\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} = \text{sin.}\, z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3\ldots7} + \text{rc.} \text{ [§. 134.]}$$

und dieser Ausdruck hat daher folgende, der Zahl nach unendliche, Faktoren:

$$z\left(1 - \frac{zz}{\varpi\varpi}\right)\left(1 - \frac{zz}{4\varpi\varpi}\right)\left(1 - \frac{zz}{9\varpi\varpi}\right)\left(1 - \frac{zz}{16\varpi\varpi}\right)$$

$$\left(1 - \frac{zz}{25\varpi\varpi}\right) \text{rc. oder es ist}$$

$$\text{sin.}\, z = z\left(1 - \frac{z}{\varpi}\right)\left(1 + \frac{z}{\varpi}\right)\left(1 - \frac{z}{2\varpi}\right)\left(1 + \frac{z}{2\varpi}\right)$$

$\left(1 - \frac{z}{3\varpi}\right)\left(1 + \frac{z}{3\varpi}\right)$ rc. So oft also der Bogen z so beschaffen ist, daß irgend einer von diesen Faktoren verschwindet, welches geschieht, wenn $z = 0$; $z = \pm\varpi$; $z = \pm 2\varpi$; und überhaupt, wenn $z = \pm k\varpi$ ist, so daß k jede ganze Zahl bedeutet: so muß auch der Sinus dieses Bogens $= 0$ seyn; ein Umstand, der so bekannt ist, daß man daraus auch rückwärts jene Faktoren finden kann.

Eben

Eben so ist, da $\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2} = \cos. z$ ist, [§. 138]

$$\cos. z = \left(1 - \frac{4zz}{\varpi\varpi}\right)\left(1 - \frac{4zz}{9\varpi\varpi}\right)\left(1 - \frac{4zz}{25\varpi\varpi}\right)\left(1 - \frac{4zz}{49\varpi\varpi}\right) \text{ꝛc. [§. 157.]}$$

oder, wenn man jeden dieser Faktoren in zwey auflöset,

$$\cos. z = \left(1 - \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{3\pi}\right)\left(1 - \frac{2z}{5\pi}\right)\left(1 + \frac{2z}{5\pi}\right) \text{ꝛc.}$$

und auch hieraus erhellet auf gleiche Art, daß $\cos. z = 0$ ist, wenn $z = \pm \frac{(2k+1)}{2}\pi$; eine Eigenschaft, die auch aus der Natur des Kreises bekannt ist.

§. 159.

Aus § 153. ist man ferner im Stande die Faktoren dieses Ausdrucks

$$e^x - 2\cos. g + e^{-x} = 2\left(1 - \cos. g + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \text{ꝛc.}\right)$$

[§. 157.] zu finden. Man kann nemlich diesen Ausdruck in folgenden verwandeln, $\left(1 + \frac{x}{i}\right)^i - 2\cos. g + \left(1 - \frac{x}{i}\right)^i$ [§. 156 125.] aus welchem man durch die Vergleichung mit der Formel §. 153. $2n = i$; $a = 1 + \frac{x}{i}$; und $z = 1 - \frac{x}{i}$ erhält. Daher ist der allgemeine Faktor der obigen Formel $= aa - 2az. \cos. \frac{2k\pi \pm g}{n} + zz = 2 + \frac{2xx}{ii} - 2\left(1 - \frac{xx}{ii}\right) \cos. \frac{2(2k\pi \pm g)}{i}$; und da $\cos. \frac{2(2k\pi \pm g)}{i} = 1 - \frac{2(2k\pi \pm g)^2}{ii}$ [§. 134.] ist, so erhält man dafür $\frac{4xx}{ii} + \frac{4(2k\pi \pm g)^2}{ii}$, oder diese Form $1 + \frac{xx}{(2k\pi \pm g)^2}$. Divi-

dir

dirt man also die gegebene Formel durch $2(1-\cos. g)$, damit die unendliche Reihe ein beständiges Glied, $=1$, erhalte: so bekommt man, wenn man die Faktoren nimmt,

$$\frac{e^x - 2\cos. g + e^{-x}}{2.(1-\cos. g)} = \left(1+\frac{xx}{gg}\right)\left(1+\frac{xx}{(2\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{xx}{(2\pi+g)^2}\right)$$

$$\left(1+\frac{xx}{(4\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{xx}{(4\pi+g)^2}\right)\left(1+\frac{xx}{(6\pi-g)^2}\right)\left(1+\frac{xx}{(6\pi+g)^2}\right) \text{ꝛc.}$$

und wenn man $z\sqrt{-1}$ anstatt x setzt, so wird

$$\frac{\cos. z - \cos. g}{1-\cos. g} = \left(1-\frac{z}{g}\right)\left(1+\frac{z}{g}\right)\left(1-\frac{z}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi-g}\right)$$

$$\left(1-\frac{z}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{z}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{z}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{z}{4\pi-g}\right)\text{ꝛc.} = 1 -$$

$$\frac{zz}{1.2.(1-\cos. g)} + \frac{z^4}{1.2.3.4(1-\cos. g)} - \frac{z^6}{1.2.\ldots.6(1-\cos. g)} + \text{ꝛc.}$$

Von dieser Reihe sind alle Faktoren, so weit man sie auch fortsetzen mag, bekannt.

§. 160.

Auch von dieser Funktion

$$e^{b+x} \pm e^{c-x}$$

lassen sich die Faktoren insgesammt bequem finden und darstellen. Denn da man dafür $\left(1+\frac{b+x}{i}\right)^i \pm \left(1+\frac{c-x}{i}\right)^i$ setzen kann, so erhält man durch die Vergleichung dieser Form mit der $a^i \pm z^i$, den Faktor $aa - 2az.\cos.\frac{m\pi}{i} + zz$, so daß m für das obere Zeichen eine ungerade Zahl, und für das untere eine gerade Zahl bedeutet. Da aber i eine unendlich große Zahl ist, so ist $\cos.\frac{m\pi}{i} = 1 - \frac{mm\pi\pi}{2ii}$, [§. 155. 134.] und hierdurch verwandelt sich jener allgemeine Faktor in $(a - z)^2 + \frac{mm\pi\pi}{ii} az$. Nun ist aber in dem gegenwärtigen Falle $a = 1 + \frac{b+x}{i}$, und $z = 1 + \frac{c-x}{i}$, folglich $(a - z)^2 = \frac{(b-c+2x)^2}{ii}$, und $az = 1 + \frac{b+c}{i} + \frac{bc + (c-b)x - xx}{ii}$. Hieraus ergiebt sich, wenn man mit ii multiplicirt, und die Glieder, welche durch i oder ii dividirt werden, weil dieselben gegen die übrigen Glieder verschwinden, wegläßt, der Faktor $(b-c)^2 + 4(b-c)x + 4xx + mm\pi\pi$; und wenn man das beständige Glied desselben durch die Division auf 1 reducirt, $1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{mm\pi\pi + (b-c)^2}$.

§. 161.

Da nun in allen Faktoren ein beständiges Glied, $= 1$, ist, so muß auch die Funktion $e^{b+x} \pm e^{c-x}$ durch eine solche beständige Größe dividirt werden, daß ihr beständiges Glied, oder ihr Werth, wenn man $x = 0$ setzt, $= 1$ wird. Weil nun $e^b \pm e^c$ ein solcher Divisor ist, so kann man, wenn man dadurch dividirt, den Ausdruck $\frac{e^{b+x} \pm e^{c-x}}{e^b \pm e^c}$ in Faktoren, die ohne Ende fortlaufen, auflösen. Gebraucht man daher das obere Zeichen, und läßt man dabey m eine ungerade Zahl bedeuten: so wird

$$\frac{e^{b+x} + e^{c-x}}{e^b + e^c} = \left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{\pi\pi + (b-c)^2}\right)\left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{9\pi\pi + (b-c)^2}\right)$$
$$\left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{25\pi\pi + (b-c)^2}\right) \text{ꝛc.};$$

wenn aber das untere Zeichen gilt, und daher m eine gerade Zahl bedeutet: so wird,

vor=

vorausgesetzt, daß bey $m = 0$ die Wurzel des quadratischen Faktors genommen werde,

$$\frac{e^{b+x} - e^{c-x}}{e^b - e^c} = \left(1 + \frac{2x}{b-c}\right)\left(1 + \frac{4(b-)cx + 4xx}{4\pi\pi + (b-c)^2}\right)\left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{16\pi\pi + (b-c)^2}\right)$$

$$\left(1 + \frac{4(b-c)x + 4xx}{36\pi\pi + (b-c)^2}\right) \text{ꝛc.}$$

§. 162.

Setzt man $b = 0$, welches ohne Nachtheil der Allgemeinheit geschehen kann: so wird

$$\frac{e^x + e^c . e^{-x}}{1 + e^c} = \left(1 - \frac{4cx + 4xx}{\pi\pi + cc}\right)\left(1 - \frac{4cx + 4xx}{9\varpi\varpi + cc}\right)$$

$$\left(1 - \frac{4cx + 4xx}{25\varpi\varpi + cc}\right) \text{ꝛc.}$$

$$\frac{e^x - e^c . e^{-x}}{1 - e^c} = \left(1 - \frac{2x}{c}\right)\left(1 - \frac{4cx + 4xx}{4\pi\pi + cc}\right)\left(1 - \frac{4cx + 4xx}{16\varpi\varpi + cc}\right)$$

$$\left(1 - \frac{4cx + 4xx}{36\varpi\varpi + cc}\right) \text{ꝛc.}$$

Setzt man c negativ, so erhält man folgende zwey Gleichungen:

$$\frac{e^x + e^{-c} . e^{-x}}{1 + e^{-c}} = \left(1 + \frac{4cx + 4xx}{\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 + \frac{4cx + 4xx}{9\varpi\varpi + cc}\right)$$

$$\left(1 + \frac{4cx + 4xx}{25\varpi\varpi + cc}\right) \text{ꝛc.}$$

$$\frac{e^x - e^{-c} . e^{-x}}{1 - e^{-c}} = \left(1 + \frac{2x}{c}\right)\left(1 + \frac{4cx + 4xx}{4\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 + \frac{4cx + 4xx}{16\varpi\varpi + cc}\right)$$

$$\left(1 + \frac{4c + 4xx}{36\varpi\varpi + cc}\right) \text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man nun die erste Form durch die dritte, so erhält man $\frac{e^{2x} + e^{-2x} + e^c + e^{-c}}{2 + e^c + e^{-c}}$; und setzt man y anstatt $2x$, so wird

e^y

$$\frac{e^y + e^{-y} + e^c + e^{-c}}{2 + e^c + e^{-c}} = \left(1 - \frac{2cy + yy}{\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy + yy}{9\varpi\varpi + cc}\right)$$

$$\left(1 + \frac{2cy + yy}{9\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy + yy}{25\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{25\varpi\varpi + cc}\right) \text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man aber die erste Form durch die vierte, so ist das Produkt $= \frac{e^{2x} - e^{-2x} + e^c - e^{-c}}{e^c - e^{-c}}$; und setzt man abermals y anstatt $2x$, so wird

$$\frac{e^y - e^{-y} + e^c - e^{-c}}{e^c - e^{-c}} = \left(1 + \frac{y}{c}\right)\left(1 - \frac{2cy + yy}{\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{4\varpi\varpi + cc}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2cy + yy}{9\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{16\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy + yy}{25\varpi\varpi + cc}\right) \text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man die zweyte Form mit der dritten, so kommt eben diese Gleichung, außer daß man c negativ nehmen muß. Es ist nemlich

$$\frac{e^c - e^{-c} - e^y + e^{-y}}{e^c - e^{-c}} = \left(1 - \frac{y}{c}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy + yy}{4\varpi\varpi + cc}\right)$$

$$\left(1 + \frac{2cy + yy}{9\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy + yy}{16\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{25\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy + yy}{36\varpi\varpi + cc}\right) \text{ꝛc.}$$

Multiplicirt man endlich die zweyte Form mit der vierten, so wird

$$\frac{e^y + e^{-y} - e^c - e^{-c}}{2 - e^c - e^{-c}} = \left(1 - \frac{yy}{cc}\right)\left(1 - \frac{2cy + yy}{4\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{4\varpi\varpi + cc}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2cy + yy}{16\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 + \frac{2cy + yy}{16\varpi\varpi + cc}\right)\left(1 - \frac{2cy + yy}{36\varpi\varpi + cc}\right)$$

$$\left(1 + \frac{2cy + yy}{36\varpi\varpi + cc}\right) \text{ꝛc.}$$

§. 163.

Diese vier Combinationen lassen sich nunmehr sehr bequem auf den Kreis anwenden, wenn man $c = g\sqrt{-1}$,

und

und $y = v\sqrt{-1}$ setzt: denn es wird alsdann

$$e^{v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}} = 2\cos. v;$$

$$e^{v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}.\ \sin. v;$$

$$e^{g\sqrt{-1}} + e^{-g\sqrt{-1}} = 2\cos. g; \text{ und}$$

$$e^{g\sqrt{-1}} - e^{-g\sqrt{-1}} = 2\sqrt{-1}.\ \sin. g. \ [\S.138.]$$

Hiernach giebt die erste Combination

$$\frac{\cos. v + \cos. g}{1 + \cos. g} = 1 - \frac{v^2}{1.2.(1+\cos. g)} + \frac{v^4}{1.2.3.4.(1+\cos. g)}$$

$$- \frac{v^6}{1.2\ldots6\,(1+\cos. g)} + \text{ꝛc.}$$

$$= \left(1 + \frac{2gv - vv}{\pi\pi - gg}\right)\left(1 - \frac{2gv - vv}{\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{2gv - vv}{9\pi\pi - gg}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2gv - vv}{9\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{2gv - vv}{25\pi\pi - gg}\right)\left(1 - \frac{2gv - vv}{25\pi\pi - gg}\right) \text{ꝛc.}$$

$$= \left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{\pi - g}\right)\left(1 + \frac{v}{\pi + g}\right)$$

$$\left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi - g}\right)\left(1 + \frac{v}{3\pi + g}\right) \text{ꝛc.}$$

$$= \left(1 - \frac{vv}{(\varpi - g)^2}\right)\left(1 - \frac{vv}{(\varpi + g)^2}\right)\left(1 - \frac{vv}{(3\pi - g)^2}\right)$$

$$\left(1 - \frac{vv}{(3\pi + g)^2}\right)\left(- \frac{vv}{(5\pi - g)^2}\right) \text{ꝛc.}$$

Hingegen giebt die vierte Combination

$$\frac{\cos. v - \cos. g}{1 - \cos. g} = 1 - \frac{v^2}{1.2\,(1 - \cos. g)} + \frac{v^4}{1.2.3.4\,(1 - \cos. g)}$$

$$- \frac{v^6}{1.2\ldots.6\,(1 - \cos. g)} + \text{ꝛc.}$$

$$= \left(1 - \frac{vv}{gg}\right)\left(1 + \frac{2gv - vv}{4\varpi\varpi - gg}\right)\left(1 - \frac{2gv - vv}{4\varpi\varpi - gg}\right)\left(1 + \frac{2gv - vv}{16\varpi\varpi - gg}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2gv - vv}{16\varpi\varpi - gg}\right) \text{ꝛc.}$$

=

$$= \left(1 - \frac{v}{g}\right)\left(1 + \frac{v}{g}\right)\left(1 + \frac{v}{2\varpi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{2\varpi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{2\varpi - g}\right)$$

$$\left(1 + \frac{v}{2\varpi + g}\right)\left(1 + \frac{v}{4\varpi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{4\pi + g}\right) \text{ ꝛc.}$$

$$= \left(1 - \frac{vv}{gg}\right)\left(1 - \frac{vv}{(2\pi - g)^2}\right)\left(1 - \frac{vv}{(2\pi + g)^2}\right)\left(1 - \frac{vv}{(4\varpi - g)^2}\right)$$

$$\left(1 - \frac{vv}{(4\pi + g)^2}\right) \text{ ꝛc.}$$

Ferner giebt die zweyte Combination:

$$\frac{\sin. g + \sin. v.}{\sin. g} = 1 + \frac{v}{\sin. g} - \frac{v^3}{1.2.3 \sin. g} + \frac{v^5}{1.2...5. \sin. g} - \text{ꝛc.}$$

$$= \left(1 + \frac{v}{g}\right)\left(1 + \frac{2gv - vv}{\pi\varpi - gg}\right)\left(1 - \frac{2gv - vv}{4\varpi\varpi - gg}\right)\left(1 + \frac{2gv - vv}{9\varpi\varpi - gg}\right)$$

$$\left(1 - \frac{2gv - vv}{16\varpi\varpi - gg}\right) \text{ ꝛc.}$$

$$= \left(1 + \frac{v}{g}\right)\left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{2\pi - g}\right)\left(1 + \frac{v}{2\pi + g}\right)$$

$$\left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\varpi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{5\varpi - g}\right) \text{ ꝛc.}$$

Nimmt man endlich v negativ, so erhält man die dritte Combination.

§. 164.

Es können aber auch die Ausdrücke des 162sten §. selbst auf folgende Art auf Kreisbogen gebracht werden. Da

$$\frac{e^x + e^c . e^{-x}}{1 + e^c} = \frac{(1 + e^{-c})(e^x + e^c . e^{-x})}{2 + e^c + e^{-c}} = \frac{e^x + e^{-x} + e^{c-x} + e^{-c+x}}{2 + e^c + e^{-c}}$$

ist, und diese Formel, wenn man darin $c = g\sqrt{-1}$ und $x = z\sqrt{-1}$ setzt, in folgende, $\frac{\cos. z + \cos. (g - z)}{1 + \cos. g} = \cos. z + \frac{\sin. g. \sin. z}{1 + \cos. g}$, verwandelt wird: so ist, da $\frac{\sin. g}{1 + \cos. g} = \text{tang.} \tfrac{1}{2} g$ ist

$$\cos. z + \text{tang.} \tfrac{1}{2} g . \sin. z = 1 + \frac{z}{1} \text{tang.} \tfrac{1}{2} g - \frac{zz}{1.2} - \frac{z^3}{1.2.3} \times$$

$$\text{tang.} \tfrac{1}{2} g + \frac{z^4}{1.2.3.4} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} \text{tang.} \tfrac{1}{2} g - \text{ꝛc.}$$

$$= \left(1 + \frac{4gz - 4zz}{\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4zz}{9\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4zz}{25\pi\pi - gg}\right) \text{ꝛc.}$$

$$= \left(1 + \frac{2z}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{\pi + g}\right)\left(1 + \frac{2z}{3\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{3\pi + g}\right)$$

$$\left(1 + \frac{2z}{5\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{5\pi + g}\right) \text{ꝛc.}$$

Auf eine ähnliche Art verwandelt sich der andere Ausdruck, wenn man Zähler und Nenner durch $1 - e^{-c}$ multiplicirt, in diesen, $\frac{e^x + e^{-x} - e^{c-x} - e^{-c+x}}{2 - e^c - e^{-c}}$; und setzt man auch darin $c = g\sqrt{-1}$, und $x = z\sqrt{-1}$, so bekommt man

$$\frac{\cos. z - \cos.(g-z)}{1 - \cos. g} = \cos. z - \frac{\sin. g . \sin. z}{1 - \cos. g} = \cos. z - \frac{\sin. z}{\text{tang.} \tfrac{1}{2} g}.$$

Es ist demnach

$$\cos. z - \cot. \tfrac{1}{2} g . \sin. z = 1 - \frac{z}{1} \cot. \tfrac{1}{2} g - \frac{zz}{1.2} + \frac{z^3}{1.2.3} \times$$

$$\cot. \tfrac{1}{2} g + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^5}{1.2\ldots5} \cot. \tfrac{1}{2} g + \text{ꝛc.}$$

$$= \left(1 - \frac{2z}{g}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4zz}{4\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4zz}{16\pi\pi - gg}\right)\left(1 + \frac{4gz - 4zz}{36\pi\pi - gg}\right) \text{ꝛc.}$$

$$= \left(1 - \frac{2z}{g}\right)\left(1 + \frac{2z}{2\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{2\pi + g}\right)\left(1 + \frac{2z}{4\pi - g}\right)\left(1 - \frac{2z}{4\pi + g}\right) \text{ꝛc.}$$

Setzt man also $v = 2z$, oder $z = \tfrac{1}{2} v$, so hat man

$$\frac{\cos. \tfrac{1}{2}(g - v)}{\cos. \tfrac{1}{2} g} = \cos. \tfrac{1}{2} v + \text{tang.} \tfrac{1}{2} g . \sin. \tfrac{1}{2} v = \left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right)$$

$$\left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right)\left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{3\pi + g}\right) \text{ꝛc. desgleichen}$$

cos.

$$\frac{\cos.\tfrac{1}{2}\,g+v)}{\cos.\tfrac{1}{2}g} = \cos.\tfrac{1}{2}v - \mathrm{tang}.\tfrac{1}{2}g.\ \sin.\tfrac{1}{2}v = \left(1-\frac{v}{\pi-g}\right)$$

$$\left(1+\frac{v}{\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{3\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{3\pi+g}\right) \text{ꝛc.}$$ Ferner

$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(g-v)}{\sin.\tfrac{1}{2}g} = \cos.\tfrac{1}{2}v - \cot.\tfrac{1}{2}g.\ \sin.\tfrac{1}{2}v = \left(1-\frac{v}{g}\right)$$

$$\left(1+\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi+g}\right) \text{ꝛc.}$$

Endlich

$$\frac{\sin.\tfrac{1}{2}(g+v)}{\sin.\tfrac{1}{2}g} = \cos.\tfrac{1}{2}v + \cot.\tfrac{1}{2}g.\ \sin.\tfrac{1}{2}v = \left(1+\frac{v}{g}\right)$$

$$\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{2\pi+g}\right)\left(1-\frac{v}{4\pi-g}\right)\left(1+\frac{v}{4\pi+g}\right) \text{ꝛc.}$$

Das Gesetz, nach welchem diese Faktoren fortschreiten, ist hinlänglich einfach und einförmig, und durch die Multiplication erhält man aus diesen Ausdrücken diejenigen, welche wir in dem vorhergehenden §. gefunden haben.