# Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Zehntes Capitel. Von dem Gebrauche der gefundenen Faktoren bey der Summirung unendlicher Reihen.

# Zehntes Capitel.

## Von dem Gebrauche der gefundenen Faktoren bey der Summirung unendlicher Reihen.

### §. 165.

Wenn $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ 2c. $= (1 + \alpha z)(1 + \beta z)(1 + \gamma z)(1 + \delta z)$ 2c. ist: so müssen diese Faktoren, ihre Zahl mag endlich oder unendlich seyn, wenn man sie wirklich mit einander multiplicirt, jene Reihe, $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 +$ 2c., hervorbringen. Es muß daher auch unter der angeführten Voraussetzung

$A = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \epsilon +$ 2c. $=$ der Summe aller dieser Größen, einzeln genommen, 2c.

$B = \alpha\beta + \alpha\gamma + \alpha\delta + \beta\gamma + \beta\delta + \gamma\delta +$ 2c. $=$ der Summe aller Produkte aus je zweyen und zweyen dieser Größen,

$C = \alpha\beta\gamma + \alpha\beta\delta + \beta\gamma\delta + \alpha\gamma\delta +$ 2c. $=$ der Summe aller Produkte aus je dreyen und dreyen dieser Größen, ferner

$D =$ der Summe aller Produkte aus je vier und vieren,

$E =$ der Summe aller Produkte aus je fünf und fünfen von diesen Größen, u. s. f. seyn. Dieses ist aus der gemeinen Algebra bekannt.

§. 166.

Da also die Summe der Größen $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ u. s. f. und die Summe aller Produkte aus je zweyen von ihnen bekannt ist: so ist dadurch auch die Summe der Quadrate $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 +$ ꝛc. gegeben; indem dieselbe gleich ist dem Quadrate der Summe der einzelnen Größen weniger den doppelten Produkten aus je zweyen. Auf eine ähnliche Art läßt sich die Summe der Würfel, der Biquadrate und der höhern Potestäten bestimmen. Denn wenn man

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{ꝛc.}$$
$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \text{ꝛc.}$$
$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 + \text{ꝛc.}$$
$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4 + \text{ꝛc.}$$
$$T = \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5 + \text{ꝛc.}$$
$$V = \alpha^6 + \beta^6 + \gamma^6 + \delta^6 + \varepsilon^6 + \text{ꝛc.}$$

setzt: so ergeben sich die Werthe von $P, Q, R, S, T, V$ ꝛc. aus den bekannten Größen $A, B, C, D, E$ ꝛc. auf folgende Art:

$$P = A$$
$$Q = AP - 2B$$
$$R = AQ - BP + 3C$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E$$
$$V = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F.$$

u. s. f.

Von der Richtigkeit dieser Bestimmungen überzeugt man sich bey angestellter Prüfung leicht; indeß wird dieselbe in der Differential-Rechnung mit der größten Schärfe erwiesen. *)

*) Diese Bestimmung des Verhältnisses der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potestäten ihrer Wurzeln findet man schon in Newtons Arithmetica universali, in dem Abschnitte, de transmutationibus aequationum, S. 192.

S. 192. der Gravesandschen Ausgabe, aber eben so wie hier ohne Beweis. Es läßt sich von Eulern erwarten, daß er diesen so wichtigen Satz nicht unbewiesen gelassen haben werde; auch findet man im zweyten Bande seiner Opusculorum varii argumenti, der zu Berlin 1750, so wie der erste 1746, und der dritte 1751 herausgekommen ist, S. 108 bis 120, denselben von ihm theils mit theils ohne Hülfe der Differential-Rechnung außer allen Zweifel gesetzt. Da diese Beweise für den gegenwärtigen Ort zu weitläuftig sind, so verweise ich ihrentwegen auf die Zusätze zum zehnten Capitel im Anhange, wo man auch von dem, was Euler über eben diese Bestimmung in seinen Opusculis analyticis, im ersten Bande, S. 337 bis 340, gesagt hat, und von den Bemühungen anderer Mathematiker über eben diesen Gegenstand Nachricht findet.

## §. 167.

Da also §. 156. bewiesen worden, daß

$$\frac{e^x - e^{-x}}{2} = x\left(1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3\ldots7} + \text{ꝛc.}\right) =$$

$$x\left(1 + \frac{xx}{\varpi\varpi}\right)\left(1 + \frac{xx}{4\varpi\varpi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\varpi\varpi}\right)\left(1 + \frac{xx}{16\varpi\varpi}\right)\left(1 + \frac{xx}{25\varpi\varpi}\right) \text{ꝛc.}$$

ist: so ist

$$1 + \frac{xx}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \frac{x^6}{1.2.3\ldots7} + \text{ꝛc.} = \left(1 + \frac{xx}{\varpi\varpi}\right)$$

$$\left(1 + \frac{xx}{4\varpi\varpi}\right)\left(1 + \frac{xx}{9\varpi\varpi}\right)\left(1 + \frac{xx}{16\varpi\varpi}\right) \text{ꝛc.}$$

und setzt man hierin $xx = \varpi\varpi z$, so wird

$$1 + \frac{\varpi\varpi}{1.2.3} z + \frac{\varpi^4}{1.2.3.4.5} z^2 + \frac{\varpi^6}{1.2.3\ldots\ldots7} z^3 + \text{ꝛc.} =$$

$$(1 + z)\left(1 + \frac{1}{4} z\right)\left(1 + \frac{1}{9} z\right)\left(1 + \frac{1}{16} z\right)\left(1 + \frac{1}{25} z\right).$$

Hierauf nun die obige Regel angewandt, so ist $A = \frac{\varpi\varpi}{6}$;

B =

$B = \frac{\varpi^4}{120}$; $C = \frac{\varpi^6}{5040}$; $D = \frac{\varpi^8}{362880}$; ꝛc. und läßt man daher

$$P = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{ꝛc.}$$

$$Q = 1 + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{16^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{36^2} + \text{ꝛc.}$$

$$R = 1 + \frac{1}{4^3} + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{16^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{36^3} + \text{ꝛc.}$$

$$S = 1 + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{16^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{36^4} + \text{ꝛc.}$$

$$T = 1 + \frac{1}{4^5} + \frac{1}{9^5} + \frac{1}{16^5} + \frac{1}{25^5} + \frac{1}{36^5} + \text{ꝛc.}$$

seyn: so wird, wenn man den Werth dieser Buchstaben aus A, B, C, D u. s. w. bestimmt, $P = \frac{\varpi\varpi}{6}$; $Q = \frac{\varpi^4}{90}$; $R = \frac{\varpi^6}{945}$; $S = \frac{\varpi^8}{9450}$; $T = \frac{\varpi^{10}}{93555}$; ꝛc.

## §. 168.

Es fällt hieraus in die Augen, daß man die Summe aller der unendlichen Reihen, die unter dieser allgemeinen Form $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} +$ ꝛc. begriffen sind, wenn $n$ eine gerade Zahl bedeutet, durch die Pripherie des Kreises $\varpi$ ausdrucken kann, weil die gedachte Summe mit $\varpi^n$ immer in einem rationalen Verhältnisse steht. Um aber den Werth dieser Summen desto deutlicher vor Augen zu stellen, wollen wir einige davon, auf eine bequemere Art ausgedruckt, hersetzen.

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{ꝛc.} = \frac{2^0}{1.2.3} \cdot \frac{1}{1} \varpi^2.$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{ꝛc.} = \frac{2^2}{1.2.3.4.5}\cdot\frac{1}{3}\pi^4$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{ꝛc.} = \frac{2^4}{1.2.3\ldots7}\cdot\frac{1}{3}\pi^6$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{ꝛc.} = \frac{2^6}{1.2.3\ldots9}\cdot\frac{3}{5}\pi^8$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^8}{1.2.3\ldots11}\cdot\frac{5}{3}\pi^{10}$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^{10}}{1.2.3\ldots13}\cdot\frac{691}{105}\pi^{12}$$

$$1 + \frac{1}{2^{14}} + \frac{1}{3^{14}} + \frac{1}{4^{14}} + \frac{1}{5^{14}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^{12}}{1.2.3\ldots15}\cdot\frac{35}{1}\pi^{14}$$

$$1 + \frac{1}{2^{16}} + \frac{1}{3^{16}} + \frac{1}{4^{16}} + \frac{1}{5^{16}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^{14}}{1.2.3\ldots17}\cdot\frac{3617}{15}\pi^{16}$$

$$1 + \frac{1}{2^{18}} + \frac{1}{3^{18}} + \frac{1}{4^{18}} + \frac{1}{5^{18}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^{16}}{1.2.3\ldots19}\cdot\frac{43867}{21}\pi^{18}$$

$$1 + \frac{1}{2^{20}} + \frac{1}{3^{20}} + \frac{1}{4^{20}} + \frac{1}{5^{20}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^{18}}{1.2.3\ldots21}\cdot\frac{1222277}{55}\pi^{20}$$

$$1 + \frac{1}{2^{22}} + \frac{1}{3^{22}} + \frac{1}{4^{22}} + \frac{1}{5^{22}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^{20}}{1.2.3\ldots23}\cdot\frac{854513}{3}\pi^{22}$$

$$1 + \frac{1}{2^{24}} + \frac{1}{3^{24}} + \frac{1}{4^{24}} + \frac{1}{5^{24}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^{22}}{1.2.3\ldots25}\cdot\frac{1181820455}{273}\pi^{24}$$

$$1 + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \frac{1}{4^{26}} + \frac{1}{5^{26}} + \text{ꝛc.} = \frac{2^{24}}{1.2.3\ldots27}\cdot\frac{76977927}{1}\pi^{26}$$

Bis hieher ließen sich die Coefficienten der Potestäten von $\pi$ durch einen anderwärts zu erklärenden Kunstgriff fortsetzen; ich habe indeß denselben hier beygebracht, weil die beym ersten Anblicke sehr unordentliche Reihe von Brüchen, 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{3}$, $\frac{691}{105}$, $\frac{35}{1}$ ꝛc. in sehr vielen Fällen von außerordentlichem Nutzen ist.

§. 169.

## §. 169.

Um die §. 157 gefundene Gleichung

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{xx}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} + \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{ꝛc.}$$

$$= \left(1 + \frac{4xx}{\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{9\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{25\pi\pi}\right)\left(1 + \frac{4xx}{49\pi\pi}\right) \text{ꝛc.}$$

auf eben die Art zu behandeln, so sey $xx = \frac{\pi\pi}{4} z$, wodurch denn

$$1 + \frac{\pi\pi}{1.2.4} z + \frac{\pi^4}{1.2.3.4.4^2} zz + \frac{\pi^6}{1.2\ldots6.4^3} z^3 + \text{ꝛc.}$$

$$= (1 + z)\left(1 + \frac{1}{9} z\right)\left(1 + \frac{1}{25}\right)\left(1 + \frac{1}{49} z\right) \text{ꝛc.}$$

wird. Hier ist nun aus [§. 165] $A = \frac{\pi\pi}{1.2.4}$; $B = \frac{\pi^4}{1.2.3.4.4^2}$; $C = \frac{\pi^6}{1.2.3\ldots6.4^3}$; ꝛc. und setzt man daher

$$P = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{ꝛc.}$$

$$Q = 1 + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{25^2} + \frac{1}{49^2} + \frac{1}{81^2} + \text{ꝛc.}$$

$$R = 1 + \frac{1}{9^3} + \frac{1}{25^3} + \frac{1}{49^3} + \frac{1}{81^3} + \text{ꝛc.}$$

$$S = 1 + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{25^4} + \frac{1}{49^4} + \frac{1}{81^4} + \text{ꝛc.}$$

so findet man für P, Q, R, S u. s. w. diese Werthe:

$$P = \frac{1}{1.} \cdot \frac{\pi^2}{2^3}; \qquad Q = \frac{2}{1.2.3} \cdot \frac{\pi^4}{2^5};$$

$$R = \frac{16}{1.2.3.4.5} \cdot \frac{\pi^6}{2^7}; \qquad S = \frac{272}{1.2.3\ldots7} \cdot \frac{\pi^8}{2^9};$$

$$T = \frac{7936}{1.2.3\ldots9} \cdot \frac{\pi^{10}}{2^{11}}; \qquad V = \frac{353792}{1.2.3\ldots\ldots11} \cdot \frac{\pi^{12}}{2^{13}};$$

$$W = \frac{22368256}{1.2.3\ldots\ldots13} \cdot \frac{\pi^{14}}{2^{15}}.$$

§. 170.

Eben diese Summen der Potestäten der ungeraden Zahlen lassen sich auch aus den vorhergehenden Summen, in welchen alle Zahlen vorkommen, finden. Denn wenn man

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \text{etc.}$$

setzt, so erhält man, wenn man diese Gleichung durch $\frac{1}{2^n}$ multipl.

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \text{etc.}$$

und zieht man nun diese Gleichung, welche bloß die geraden Zahlen enthält, von der vorhergehenden ab, so bekommt man eine, worin bloß die ungeraden Zahlen enthalten sind; oder es ist

$$M - \frac{M}{2^n} = \frac{2^n - 1}{2^n} M = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \text{etc.}$$

Zieht man aber die Reihe $\frac{M}{2^n}$ doppelt genommen von M ab, so erhält man eine Reihe mit abwechselnden Zeichen; oder es ist

$$M - \frac{2M}{2^n} = \frac{2^{n-1} - 1}{2^{n-1}} M = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n}$$

$- \frac{1}{6^n} + \text{etc.}$ Es lassen sich also nach den erklärten Sätzen die Reihen

$$1 \pm \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} \pm \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} \pm \text{etc.}$$

$$1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \text{etc.}$$

summiren, wenn n eine gerade Zahl ist; und die Summe ist $= A\pi^n$, so daß A eine Rational-Zahl ist.

§. 171.

## §. 171.

Außerdem geben auch die im 164sten §. betrachteten Ausdrücke, wenn man sie auf eine ähnliche Art behandelt, sehr merkwürdige Reihen. Denn da

$$\cos. \tfrac{1}{2} v + \tan g. \tfrac{1}{2} g. \sin. \tfrac{1}{2} v = \left(1 + \frac{v}{\pi - g}\right)\left(1 - \frac{v}{\pi + g}\right)$$

$$\left(1 + \frac{v}{3\pi - g}\right) \text{ꝛc.}$$

ist, so wird, wenn man $v = \frac{x}{n}\pi$, und $g = \frac{m}{n}\pi$ setzt,

$$1 + \frac{x}{n-m})\left(1 - \frac{x}{n+m}\right)\left(1 + \frac{x}{3n-m}\right)\left(1 - \frac{x}{3n+m}\right)$$

$$\left(1 + \frac{x}{5n-m}\right)\left(1 - \frac{x}{5n+m}\right) \text{ꝛc.} =$$

$$\cos. \frac{x\pi}{2n} + \tan g. \frac{m\pi}{2n}. \sin. \frac{x\pi}{2n} = 1 + \frac{\pi x}{2n} \tan g. \frac{m\pi}{2n} -$$

$$\frac{\pi\pi xx}{2.4nn} - \frac{\pi^3 x^3}{2.4.6.n^3} \tan g. \frac{m\pi}{2n} + \frac{\pi^4 x^4}{2.4.6.8.n^4} + \text{ꝛc.}$$

Vergleicht man aber diesen ohne Ende fortlaufenden Ausdruck mit §. 165. so erhält man daher

$$A = \frac{\pi}{2n} \tan g. \frac{m\pi}{2n};\ B = \frac{-\pi\pi}{2.4.nn};\ C = \frac{-\pi^3}{2.4.6.n^3}. \tan g. \frac{m\pi}{2n};$$

$$D = \frac{\pi^4}{2.4.6.8n^4};\ E = \frac{\pi^5}{2.4.6.8.10.n^5} \tan g. \frac{m\pi}{2n} \text{ꝛc.}$$

Weiter ist

$$\alpha = \frac{1}{n-m};\ \beta = -\frac{1}{n+m};\ \gamma = \frac{1}{3n-m};\ \delta = -$$

$$\frac{1}{3n+m};\ \epsilon = \frac{1}{5n-m};\ \zeta = -\frac{1}{5n+m} \text{ꝛc.}$$

§. 172.

§. 172.

Hieraus ergeben sich nach §. 166 folgende Reihen:

$$P = \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} + \frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} + \frac{1}{5n-m} - \frac{1}{5n+m} + \text{etc.}$$

$$Q = \frac{1}{(n-m)^2} + \frac{1}{(n+m)^2} + \frac{1}{(3n-m)^2} + \frac{1}{(3n+m)^2} + \frac{1}{(5n-m)^2} + \text{etc.}$$

$$R = \frac{1}{(n-m)^3} - \frac{1}{(n+m)^3} + \frac{1}{(3n-m)^3} - \frac{1}{(3n+m)^3} + \frac{1}{(5n-m)^3} - \text{etc.}$$

$$S = \frac{1}{(n-m)^4} + \frac{1}{(n+m)^4} + \frac{1}{(3n-m)^4} + \frac{1}{(3n+m)^4} + \frac{1}{(5n-m)^4} + \text{etc.}$$

$$T = \frac{1}{(n-m)^5} - \frac{1}{(n+m)^5} + \frac{1}{(3n-m)^5} - \frac{1}{(3n+m)^5} + \frac{1}{(5n-m)^5} + \text{etc.}$$

$$V = \frac{1}{(n-m)^6} + \frac{1}{(n+m)^6} + \frac{1}{(3n-m)^6} + \frac{1}{(3n+m)^6} + \frac{1}{(5n-m)^6} + \text{etc.}$$

Setzt man aber tang. $\frac{m\pi}{2n} = k$; so ist [§. 166.]

$$P = A = \frac{k\pi}{2n} = \frac{k\pi}{2n}$$

$$Q = \frac{(kk+1)\pi\pi}{4nn} = \frac{(2kk+2)\pi^2}{2.4.nn}$$

$$R = \frac{(k^3+k)\pi^3}{8n^3} = \frac{(6k^3+6k)\pi^3}{2.4.6.n^3}$$

$$S = \frac{(3k^4+4kk+1)\pi^4}{48n^4} = \frac{(24k^4+32k^2+8)\pi^4}{2.4.6.8n^4}$$

$$T = \frac{(3k^5+5k^3+2k)\pi^5}{96n^5} = \frac{(120k^5+200k^3+80k)\pi^5}{2.4.6.8.10.n^5}$$

§. 173.

Auf gleiche Art giebt die letzte Gleichung des 164sten §.

$$\text{cos.}\ \tfrac{1}{2}v + \text{cot.}\ \tfrac{1}{2}g.\ \text{sin.}\ \tfrac{1}{2}v = \left(1+\frac{v}{g}\right)\left(1-\frac{v}{2\pi-g}\right.$$

$\left(1 + \frac{v}{2\pi + g}\right)\left(1 - \frac{v}{4\pi - g}\right)\left(1 + \frac{v}{4\pi + g}\right)$ ꝛc., wenn man in diesem Ausdrucke $v = \frac{x}{n}\pi$, $g = \frac{m}{n}\pi$, und tang. $\frac{m\pi}{2n} = k$ setzt, so daß cot. $\frac{1}{2}g = \frac{1}{k}$ ist,

$$\text{cos.}\ \frac{\pi x}{2n} + \frac{1}{k}\,.\ \text{sin.}\ \frac{\varpi x}{2n} = 1 + \frac{\pi x}{2nk} - \frac{\pi\pi xx}{2.4nn} - \frac{\pi^3 x^3}{2.4.6n^3k}$$
$$+ \frac{\pi^4 x^4}{2.4.6.8n^4} + \frac{\pi^5 x^5}{2.4.6.8.10.n^5k} - \text{ꝛc.} =$$
$$\left(1 + \frac{x}{m}\right)\left(1 - \frac{x}{2n-m}\right)\left(1 + \frac{x}{2n+m}\right)\left(1 - \frac{x}{4n-m}\right)\left(1 + \frac{x}{4n+m}\right) \text{ ꝛc.}$$

Durch die Vergleichung mit der allgemeinen Form §. 165. findet man also hier

$A = \frac{\varpi}{2nk}$; $B = \frac{-\varpi\varpi}{2.4.n^2}$; $C = \frac{-\varpi^3}{2.4.6n^3k}$; $D = -\frac{\varpi^4}{2.4.6.8n^4}$;

$E = \frac{\varpi^5}{2.4.6.8.10n^5k}$; und aus den Faktoren erhält man

$\alpha = \frac{1}{m}$; $\beta = \frac{-1}{2n-m}$; $\gamma = \frac{1}{2n+m}$; $\delta = \frac{-1}{4n-m}$; $\varepsilon = \frac{1}{4n+m}$; ꝛc.

## §. 174.

Hieraus lassen sich nach §. 166. folgende Reihen formiren, und ihre Summen angeben.

$$P = \frac{1}{m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{4n-m} + \frac{1}{4n+m} - \text{ꝛc.}$$

$$Q = \frac{1}{m^2} + \frac{1}{(2n-m)^2} + \frac{1}{(2n+m)^2} + \frac{1}{(4n-m)^2} + \frac{1}{(4n+m)^2} + \text{ꝛc.}$$

$$R = \frac{1}{m^3} - \frac{1}{(2n-m)^3} + \frac{1}{(2n+m)^3} - \frac{1}{(4n-m)^3} + \frac{1}{(4n+m)^3} - \text{ꝛc.}$$

$$S = \frac{1}{m^4} + \frac{1}{(2n-m)^4} + \frac{1}{(2n+m)^4} + \frac{1}{(4n-m)^4} + \frac{1}{(4n+m)^4} + \text{ꝛc.}$$

T =

$$T = \frac{1}{m^5} - \frac{1}{(2n-m)^5} + \frac{1}{(2n+m)^5} - \frac{1}{(4n-m)^5} + \frac{1}{(4n+m)^5} - \text{ꝛc.}$$

u. s. f.

Die Summen P, Q, R, S u. s. w. aber sind

$$P = A = \frac{\pi}{2nk} = \frac{1\pi}{2nk},$$

$$Q = \frac{(kk+1)\pi\pi}{4nnkk} = \frac{(2+2kk)\pi^2}{2.4n^2k^2}$$

$$R = \frac{(kk+1)\pi^3}{8n^3k^3} = \frac{(6+6kk)\pi^3}{2.4.6.n^3k^3}$$

$$S = \frac{(k^4+4kk+3)\pi^4}{48n^4k^4} = \frac{(24+32kk+3k^4)\pi^4}{2.4.6.8.n^4k^4}$$

$$T = \frac{(2k^4+5kk+3)\pi^5}{96n^5k^5} = \frac{(120+200kk+80k^4)\pi^5}{2.4.6.8.10n^5k^5}$$

$$V = \frac{(2k^6+17k^4+30k^2+15)\pi^6}{960\,n^6k^{16}} = \frac{(720+1440kk+816k^4+96k^6)\pi^6}{2.4.6.8.10.21.\,n^6k^6}$$

u. s. f.

§. 175.

Diese allgemeine Reihen verdienen, daß wir daraus einige besondere Fälle ableiten; und man findet dergleichen, wenn man das Verhältniß $m:n$ durch Zahlen ausdruckt. Es sey also zuvörderst $m = 1$, und $n = 2$; wo denn $k = \text{tang.}\frac{\pi}{4} = \text{tang.}\,45^\circ = 1$ wird, und beyde Arten von Reihen in eine verwandelt werden. Es ist daher

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi\pi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{\&c.}$$

$$\frac{5\pi^5}{1536} = 1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \text{\&c.}$$

$$\frac{\pi^6}{960} = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{\&c.}$$

u. s. f.

Von diesen Reihen haben wir die erste bereits §. 140. gefunden, und von den übrigen ergaben sich diejenigen, die aus Potestäten mit geraden Exponenten bestehen, §. 169., so daß also nur die, worin die Exponenten ungerade Zahlen sind, hier zum erstenmale vorkommen. Man sieht daher aus dem Gegenwärtigen, daß man auch die Summen aller dieser Reihen

$$1 - \frac{1}{3^{2n+1}} + \frac{1}{5^{2n+1}} - \frac{1}{7^{2n+1}} + \frac{1}{9^{2n+1}} - \text{\&c.}$$

durch den Werth von $\pi$ auszudrucken im Stande ist.

## §. 176.

Ferner sey $m = 1$, $n = 3$; so wird $k = \text{tang.}\ \frac{\pi}{6} = \text{tang.}\ 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$; und die Reihen des 172sten §. geben

$$\frac{\pi}{6\sqrt{3}} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{16} + \text{\&c.}$$

$$\frac{\pi\pi}{27} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{14^2} + \frac{1}{16^2} + \text{\&c.}$$

$$\frac{\pi^3}{162\sqrt{3}} = \frac{1}{2^3} - \frac{1}{4^3} + \frac{1}{8^3} - \frac{1}{10^3} + \frac{1}{14^3} - \frac{1}{16^3} + \text{\&c.}$$

u. s. f. oder

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \text{\&c.}$$

$$\frac{4\pi\pi}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{8^2} + \text{etc.}$$

$$\frac{4\pi^3}{81\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^3} - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{8^3} + \text{etc.}$$

u. s. f.

In diesen Reihen fehlen alle durch 3 theilbare Zahlen; daher kann man auch die von geraden Dimensionen aus den vorher gefundenen auf folgende Art ableiten. Da [§. 167. 168.]

$$\frac{\pi\pi}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc. ist, so ist}$$

$$\frac{\pi\pi}{6.9} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{12^2} + \text{etc.} = \frac{\pi\pi}{54}$$

Zieht man nun diese letzte Reihe, welche alle durch 3 theilbare Zahlen enthält, von der ersten ab, so bleiben alle durch 3 nicht theilbare Zahlen übrig; und es ist daher

$$\frac{8\pi\pi}{54} = \frac{4\pi\pi}{27} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \text{etc.},$$ so wie wir es gefunden haben.

## §. 177.

Eben dieselbe Voraussetzung, daß nemlich $m = 1$, $n = 3$, und $k = \frac{1}{\sqrt{3}}$, auf den 174sten §. angewandt, giebt

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \text{etc.}$$

$$\frac{\pi\pi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \frac{1}{17^2} + \frac{1}{19^2} + \text{etc.}$$

$$\frac{\pi^3}{18\sqrt{3}} = 1 - \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} - \frac{1}{11^3} + \frac{1}{13^3} - \frac{1}{17^3} + \frac{1}{19^3} - \text{etc.}$$

u. s. f.

wo in den Nennern bloß die ungeraden Zahlen, die durch

3 theil-

3 theilbaren ausgenommen, vorkommen. Uebrigens kann man auch die Reihen von geraden Dimensionen auf folgende Art aus den vorher gefundenen herleiten. Da [§. 169.]

$$\frac{\varpi\varpi}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{ꝛc., so ist}$$

$$\frac{\varpi\varpi}{8.9} = \frac{1}{3^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{15^2} + \frac{1}{21^2} + \text{ꝛc.} = \frac{\varpi\varpi}{72}.$$

Zieht man nun diese letzte Reihe, welche alle durch 3 theilbare ungerade Zahlen enthält, von der ersten ab, so bleibt die Reihe der Quadrate der ungeraden nicht durch 3 theilbaren Zahlen übrig; und es ist daher

$$\frac{\varpi\varpi}{9} = 1 + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \frac{1}{13^2} + \text{ꝛc.}$$

## §. 178.

Wenn man die Reihen im 172sten und 174sten §. zu einander addirt, oder von einander subtrahirt, so erhält man ebenfalls andere merkwürdige Reihen. Es ist nemlich aus den beyden angeführten §§.

$$\frac{k\varpi}{2n} + \frac{\varpi}{2nk} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} + \text{ꝛc.}$$

$$= \frac{(kk+1)\varpi}{2nk}. \text{ Da aber}$$

$$k = \text{tang.}\,\frac{m\varpi}{2n}\ [\text{§. 172.}] = \frac{\text{sin.}\,\frac{m\varpi}{2n}}{\text{cos.}\,\frac{m\varpi}{2n}}, \text{ und}$$

$$1 + kk = \frac{1}{(\text{cos.}\,\frac{m\varpi}{2n})^2} \text{ ist, woher}$$

$$\frac{2k}{1+kk} = 2\,\sin.\frac{m\pi}{2n}.\cos.\frac{m\pi}{2n} = \sin.\frac{m\pi}{n},$$

wird, so erhält man durch die Substitution dieses Werthes

$$\frac{\pi}{n.\sin.\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{1}{n-m} - \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} +$$

$$\frac{1}{3n-m} - \frac{1}{3n+m} - \text{etc.}$$

Auf eine ähnliche Art findet man durch die Subtraction

$$\frac{\pi}{2nk} - \frac{k\pi}{2n} = \frac{(1-kk)\pi}{2nk} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} -$$

$$\frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m} - \frac{1}{3n-m} + \frac{1}{3n+m} - \text{etc.}$$

Da aber $\frac{2k}{1-kk} = \text{tang.}\,2\,\frac{m\pi}{2n} = \text{tang.}\,\frac{m\pi}{n} = \frac{\sin.\frac{m\pi}{n}}{\cos.\frac{m\pi}{n}}$ ist:

so folgt daraus

$$\frac{\pi\cos.\frac{m\pi}{n}}{n.\sin.\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} + \frac{1}{2n+m}$$

$$- \frac{1}{3n-m} + \text{etc.}$$

Die sich hieraus ergebenden Reihen der Quadrate und der höhern Potestäten lehrt die Differential-Rechnung auf eine leichtere Art finden.

§. 179.

Da wir bereits die Fälle betrachtet haben, wo $m = 1$, und $n = 2$ oder $= 3$ ist: so wollen wir nunmehr $m = 1$, und $n = 4$ setzen. Alsdann ist $\sin.\frac{m\pi}{n} = \sin.\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$,

und

und cos. $\frac{\varpi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Hierdurch erhält man

$$\frac{\varpi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{ꝛc.},$$

$$\frac{\varpi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{ꝛc.}$$

Ferner sey $m = 1$, und $n = 8$, so wird $\frac{m\varpi}{n} = \frac{\varpi}{8}$,

sin. $\frac{\varpi}{8} = \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}})}$, cos. $\frac{\varpi}{8} = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}})}$ und

$\frac{\text{cos.}\,\frac{\varpi}{8}}{\text{sin.}\,\frac{\varpi}{8}} = 1 + \sqrt{2}$. Hieraus ergiebt sich

$$\frac{\varpi}{4\sqrt{(2-\sqrt{2})}} = 1 + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} + \frac{1}{23} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\varpi}{8(\sqrt{2}-1)} = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{23} + \text{ꝛc.}$$

Endlich sey $m = 3$, und $n = 8$, wo denn $\frac{m\varpi}{n} = \frac{3\varpi}{8}$, und

sin. $\frac{\varpi}{8} = \sqrt{(\frac{1}{2} + \frac{1}{2\sqrt{2}})}$, und cos. $\frac{3\varpi}{8} = \sqrt{(\frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{2}})}$,

folglich $\frac{\text{cos.}\,\frac{3}{8}\varpi}{\text{sin.}\,\frac{3}{8}\varpi} = \frac{1}{\sqrt{2}+1}$ wird. Daraus aber erhält man die Reihen

$$\frac{\varpi}{4\sqrt{(2+\sqrt{2})}} = \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{19} + \frac{1}{21} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\varpi}{8(\sqrt{2}+1)} = \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{19} - \frac{1}{21} + \text{ꝛc.}$$

## §. 180.

Aus diesen Reihen entsteht, wenn man dieselben mit einander combinirt,

$$\frac{\pi\sqrt{(2+\sqrt{2})}}{4} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+ \text{etc.}$$

$$\frac{\pi\sqrt{(2-\sqrt{2})}}{4} = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+ \text{etc.}$$

$$\frac{\pi(\sqrt{(4+2\sqrt{2})}+\sqrt{2}-1)}{8} = 1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+ \text{etc.}$$

$$\frac{\pi(\sqrt{(4+2\sqrt{2})}-\sqrt{2}+1)}{8} = 1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}+ \text{etc.}$$

$$\frac{\pi(\sqrt{2}+1+\sqrt{(4-2\sqrt{2})})}{8} = 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+ \text{etc.}$$

$$\frac{\pi(\sqrt{2}+1-\sqrt{(4-2\sqrt{2})})}{8} = 1-\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}- \text{etc.}$$

Auf eine ähnliche Art kann man, wenn man $n = 16$, und $m$ entweder 1, oder 3, oder 5, oder 7 annimmt, weiter fortgehen, und so die Summen der Reihen $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \frac{1}{7},$

$\frac{1}{9}$, ꝛc. finden, worin die Abwechselungen der Zeichen + und − andern Gesetzen folgen.

§. 181.

Wenn man in den Reihen des 178sten §. je zwey und zwey Glieder in eine Summe vereiniget; so erhält man aus der ersten

$$\frac{\varpi}{n.\,\sin.\frac{m\varpi}{n}} = \frac{1}{m} + \frac{2m}{nn-mm} - \frac{2m}{4nn-mm} + \frac{2m}{9nn-mm} - \frac{2m}{16nn-mm} + \frac{2m}{25nn-mm} - \text{ꝛc. und also}$$

$$\frac{1}{nn-mm} - \frac{1}{4nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} - \frac{1}{16nn-mm} + \text{ꝛc.} = \frac{\varpi}{2mn.\,\sin.\frac{m\varpi}{n}} - \frac{1}{2mm}.$$

Die andere Reihe hingegen giebt

$$\frac{\varpi}{n\,\mathrm{tang}.\frac{m\varpi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{2m}{nn-mm} - \frac{2m}{4nn-mm} - \frac{2m}{9nn-mm} - \text{ꝛc. und also}$$

$$\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{4nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \frac{1}{16nn-mm} + \text{ꝛc.} = \frac{1}{2mm} - \frac{\varpi}{2mn\,\mathrm{tang}.\frac{m\varpi}{n}}$$

Diese beyden Reihen aber zu einander addirt, geben:

$$\frac{1}{nn-mm} + \frac{1}{9nn-mm} + \frac{1}{25nn-mm} + \text{ꝛc.} = \frac{\varpi\,\mathrm{tang}.\frac{m\varpi}{2n}}{4mn}$$

Läßt man nun in dieser Reihe $n = 1$, und $m$ jede gerade Zahl $= 2k$ seyn, so erhält man, da $\tang. k\varpi = 0$ ist, den Fall, da $k = 0$ ausgenommen, allezeit,

$$\frac{1}{1-4kk} + \frac{1}{9-4kk} + \frac{1}{25-4kk} + \frac{1}{49-4kk} + \text{rc.} = 0$$

Wenn aber darin $n = 2$ wird, und $m$ irgend eine ungerade Zahl, $= 2k+1$, ist, so wird, da $\frac{1}{\tang. \frac{m\varpi}{n}} = 0$,

$$\frac{1}{4-(2k+1)^2} + \frac{1}{16-(2k+1)^2} + \frac{1}{36-(2k+1)^2} + \text{rc.}$$
$$= \frac{1}{2(2k+1)^2}.$$

§. 182.

Multiplicirt man die gefundenen Reihen durch $nn$, und setzt man dabey $\frac{m}{n} = p$, so erhält man diese Formen:

$$\frac{1}{1-pp} - \frac{1}{4-pp} + \frac{1}{9-pp} - \frac{1}{16-pp} + \frac{1}{25-pp} - \text{rc.}$$
$$= \frac{\varpi}{2p \sin. p\varpi} - \frac{1}{2pp}.$$

$$\frac{1}{1-pp} + \frac{1}{4-pp} + \frac{1}{9-pp} + \frac{1}{16-pp} + \frac{1}{25-pp} + \text{rc.}$$
$$= \frac{1}{2pp} - \frac{\varpi}{2p \tang. p\varpi}.$$

Setzt man $pp = a$, so entstehen daraus diese Reihen:

$$\frac{1}{1-a} - \frac{1}{4-a} + \frac{1}{9-a} - \frac{1}{16-a} + \text{rc.} = \frac{\varpi\sqrt{a}}{2a \sin. \varpi\sqrt{a}} - \frac{1}{2a}$$

$$\frac{1}{1-a} + \frac{1}{4-a} + \frac{1}{9-a} + \frac{1}{16-a} + \text{rc.} = \frac{1}{2a} - \frac{\varpi\sqrt{a}}{2a \tang. \varpi\sqrt{a}}.$$

Wofern also $a$ nur keine negative und keine ganze Quadratzahl

zahl ist, so kann die Summe dieser Reihen durch den Kreis ausgedruckt werden.

§. 183.

Vermittelst der oben [§ 138.] erklärten Reduktion der imaginären Exponential-Größen auf Sinus und Cosinus kann man aber auch die Summen dieser Reihen angeben, wenn $a$ eine negative Zahl ist. Denn da $e^{x\sqrt{-1}} = \cos. x + \sqrt{-1} \sin. x$, und $e^{-x\sqrt{-1}} = \cos. x - \sqrt{-1}. \sin. x$ ist, so ist auch, wenn man $y\sqrt{-1}$ anstat $x$ setzt,

$$\cos. y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y} + e^{y}}{2}, \text{ und } \sin. y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y} - e^{y}}{2\sqrt{-1}}.$$

Ist daher $a = -b$, und $y = \pi\sqrt{b}$, so ist

$$\cos. \pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}} + e^{\pi\sqrt{b}}}{2}, \text{ und}$$

$$\sin. \pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}} - e^{\pi\sqrt{b}}}{2\sqrt{-1}}; \text{ folglich}$$

$$\text{tang. } \pi\sqrt{-b} = \frac{e^{-\pi\sqrt{b}} - e^{\pi\sqrt{b}}}{(e^{-\pi\sqrt{b}} + e^{\pi\sqrt{b}})\sqrt{-1}}; \text{ und hieraus}$$

$$\frac{\pi\sqrt{-b}}{\sin. \pi\sqrt{-b}} = \frac{-2\pi\sqrt{b}}{e^{-\pi\sqrt{b}} - e^{\pi\sqrt{b}}}; \text{ und}$$

$$\frac{\pi\sqrt{-b}}{\text{tang. } \pi\sqrt{-b}} = \frac{(e^{-\pi\sqrt{b}} + e^{\pi\sqrt{b}})\pi\sqrt{b}}{e^{-\pi\sqrt{b}} - e^{\pi\sqrt{b}}}.$$

Dies vorausgesetzt, so wird

$$\frac{1}{1+b} - \frac{1}{4+b} + \frac{1}{9+b} - \text{ꝛc.} = \frac{1}{2b} - \frac{\pi\sqrt{b}}{(e^{\pi\sqrt{b}} - e^{-\pi\sqrt{b}})b}$$

und

$$\frac{1}{1+b} + \frac{1}{4+b} + \frac{1}{9+b} + \text{ꝛc.} = \frac{(e^{\pi\sqrt{b}} + e^{-\pi\sqrt{b}})\pi\sqrt{b}}{2b(e^{\pi\sqrt{b}} - e^{-\pi\sqrt{b}})} - \frac{1}{2b}.$$

Eben diese Reihen hätten durch die im gegenwärtigen Capitel gebrauchte Methode aus dem 162sten §. hergeleitet werden können. Weil aber die Reduktion der Sinus und Cosinus imaginärer Kreisbogen auf reelle Exponential-Größen durch den betretenen Weg beträchtlich erläutert wird, so schien mir diese Entwickelung der andern vorgezogen werden zu müssen.