# Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

**Euler, Leonhard**

**Berlin, 1788**

Eilftes Capitel. Von andern unendlichen Ausdrücken für die Bogen und die Sinus.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53541

## Eilftes Capitel.

### Von andern unendlichen Ausdrücken für die Bogen und die Sinus.

§. 184.

Da wir §. 158. gesehen haben, daß, wenn $z$ irgend einen Kreisbogen bedeutet,

$$\sin. z = z\left(1-\frac{zz}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{zz}{4\pi\pi}\right)\left(1-\frac{zz}{9\pi\pi}\right)\left(1-\frac{zz}{16\pi\pi}\right) \text{ ꝛc. und}$$

$$\cos. z = \left(1-\frac{4zz}{\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4zz}{9\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4zz}{25\pi\pi}\right)\left(1-\frac{4zz}{49\pi\pi}\right) \text{ ꝛc. ist:}$$

so ist auch, wenn man den Bogen $z = \frac{m\pi}{n}$ setzt,

$$\sin. \frac{m\pi}{n} = \frac{m\pi}{n}\left(1-\frac{mm}{nn}\right)\left(1-\frac{mm}{4nn}\right)\left(1-\frac{mm}{9nn}\right)\left(1-\frac{mm}{16nn}\right) \text{ ꝛc.}$$

und

$$\cos. \frac{m\pi}{n} = \left(1-\frac{4mm}{nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{9nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{25nn}\right)\left(1-\frac{4mm}{49nn}\right) \text{ ꝛc.}$$

oder wenn man $2n$ anstatt $n$ nimmt,

$$\sin. \frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{4nn-mm}{4nn}\right)\left(\frac{16nn-mm}{16nn}\right)\left(\frac{36nn-mm}{36nn}\right) \text{ ꝛc. und}$$

$$\cos. \frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{nn-mm}{nn}\right)\left(\frac{9nn-mm}{9nn}\right)\left(\frac{25nn-mm}{25nn}\right)\left(\frac{49nn-mm}{49nn}\right) \text{ ꝛc.}$$

Löset man nun diese Reihen in einfache Faktoren auf, so wird

$$\sin.\frac{m\pi}{2n} = \frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\left(\frac{6n-m}{6n}\right) \text{ꝛc.}$$

und

$$\cos.\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\left(\frac{5n-m}{5n}\right)\left(\frac{5n+m}{5n}\right) \text{ꝛc.}$$

Setzt man endlich $n-m$ anstatt $m$, so erhält man, weil

$\sin.\frac{(n-m)\pi}{2n} = \cos.\frac{m\pi}{2n}$, und $\cos.\frac{(n-m)\pi}{2n} = \sin.\frac{m\pi}{2n}$ ist,

$$\cos.\frac{m\pi}{2n} = \left(\frac{(n-m)\pi}{2n}\right)\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)\left(\frac{5n-m}{4n}\right)\left(\frac{5n+m}{6}\right) \text{ꝛc.}$$

$$\sin.\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n}\left(\frac{2n-m}{n}\right)\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\left(\frac{4n+m}{5n}\right)\left(\frac{6n-m}{5n}\right) \text{ꝛc.}$$

## §. 185.

Da man auf diese Art sowohl für den Sinus als für den Cosinus des Winkels $\frac{m\pi}{2n}$ zwey Reihen hat, so erhält man, wenn man die eine davon durch die andere dividirt,

$$1 = \frac{\pi}{2}.\frac{1}{2}.\frac{3}{2}.\frac{3}{4}.\frac{5}{4}.\frac{5}{6}.\frac{7}{6}.\frac{7}{8}.\frac{9}{8}. \text{ ꝛc. und also}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12.}{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.13.} \text{ ꝛc. oder}$$

den Ausdruck für die Peripherie des Kreises, welchen Wallis in seiner Arithmetica infinitorum erfunden hat. Vermittelst des ersten Ausdrucks für den Sinus kann man aber unzählige andere diesem ähnliche Ausdrücke erhalten. Denn man findet daraus die Formel:

$$\frac{\pi}{2} = \frac{n}{m}.\ \sin.\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n}{2n-m}\right)\left(\frac{2n}{2n+m}\right)\left(\frac{4n}{4n-m}\right)\left(\frac{4n}{4n+m}\right)\left(\frac{6n}{6n-m}\right) \text{ ꝛc.}$$

welche,

welche, wenn man darin $\frac{m}{n} = 1$ setzt, die angeführte Wallisische Bestimmung giebt. Läßt man aber $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$ seyn, so ist, weil sin. $\frac{1}{4}\pi = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ist,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{\sqrt{2}}{1} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{8}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{16}{15} \cdot \frac{16}{17} \text{ ꝛc.}$$

und setzt man $\frac{m}{n} = \frac{1}{3}$, so wird, weil sin. $\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$ ist,

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{12}{13} \cdot \frac{18}{17} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{24}{23} \text{ ꝛc.}$$

Dividirt man den Wallisischen Ausdruck durch den, wo $\frac{m}{n} = \frac{1}{2}$, so erhält man

$$\sqrt{2} = \frac{2.2.6.6.10.10.14.14.18.18}{1.3.5.7.9.11.13.15.17.19} \text{ ꝛc.}$$

## §. 186.

Da die Tangente eines jeden Winkels dem Sinus desselben, durch seinen Cosinus dividirt, gleich ist: so kann man auch die Tangente durch dergleichen unendliche Faktoren ausdrucken. Dividirt man daher den ersten Ausdruck für den Sinus durch den zweyten für den Cosinus, so ist

$$\text{tang.}\frac{m\pi}{2n} = \frac{m}{n-m}\left(\frac{2n-m}{n+m}\right)\left(\frac{2n+m}{3n-m}\right)\left(\frac{4n-m}{3n+m}\right)\left(\frac{4n+m}{5n-m}\right) \text{ ꝛc.}$$

$$\text{cot.}\ \frac{m\pi}{2n} = \frac{n-m}{m}\left(\frac{n+m}{2n-m}\right)\left(\frac{3n-m}{2n+m}\right)\left(\frac{3n+m}{4n-m}\right)\left(\frac{5n-m}{4n+m}\right) \text{ ꝛc.}$$

Auf eine ähnliche Art findet man für die Secanten und Cosecanten

[weil sec. $x = \frac{1}{\text{cos.}\ x}$, und cosec. $x = \frac{1}{\text{sin.}\ x}$ ist]

sec.

$$\sec.\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{n}{n-m}\right)\left(\frac{n}{n+m}\right)\left(\frac{3n}{3n-m}\right)\left(\frac{3n}{3n+m}\right)$$
$$\left(\frac{5n}{5n-m}\right)\left(\frac{5n}{5n+m}\right)\text{ ic.}$$

$$\operatorname{cosec}.\frac{m\pi}{2n}=\frac{n}{m}\left(\frac{n}{2n-m}\right)\left(\frac{3n}{2n+m}\right)\left(\frac{3n}{4n-m}\right)$$
$$\left(\frac{5n}{4n+m}\right)\left(\frac{5n}{6n-m}\right)\text{ ic.}$$

Wenn man aber die beyden andern Formeln für den Sinus und Cosinus nimmt, so wird

$$\text{tang}.\frac{m\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{m}{n-m}\cdot\frac{1(2n-m)}{2(n+m)}\cdot\frac{3(2n+m)}{2(3n-m)}\cdot\frac{3(4n-m)}{4(3n+m)}\text{ ic.}$$

$$\cot.\frac{m\pi}{2n}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{n-m}{m}\cdot\frac{1(n+m)}{2(2n-m)}\cdot\frac{3(3n-m)}{2(2n+m)}\cdot\frac{3(3n+m)}{4(4n-m)}\text{ ic.}$$

$$\sec.\frac{m\pi}{2n}=\frac{2}{\pi}\frac{n}{n-m}\cdot\frac{2n}{n+m}\cdot\frac{2n}{3n-m}\cdot\frac{4n}{3n+m}\cdot\frac{4n}{5n-m}\text{ ic.}$$

$$\operatorname{cosec}.\frac{m\pi}{2n}=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{n}{m}\cdot\frac{2n}{2n-m}\cdot\frac{2n}{2n+m}\cdot\frac{4n}{4n-m}\cdot\frac{4n}{4n+m}\text{ ic.}$$

## §. 187.

Wenn man k anstatt m setzt, so kann man auf eine ähnliche Art den Sinus und Cosinus des Winkels $\frac{k\pi}{2n}$ finden; und wenn man die auf diese Art erhaltenen Ausdrücke durch die vorhergehenden dividirt, so bekommt man:

$$\frac{\sin.\frac{m\pi}{2n}}{\sin.\frac{k\pi}{2n}}=\frac{m}{k}\cdot\frac{2n-m}{2n-k}\cdot\frac{2n+m}{2n+k}\cdot\frac{4n-m}{4n-k}\cdot\frac{4n+m}{4n+k}\text{ ic.}$$

$$\frac{\sin.\frac{m\pi}{2n}}{\cos.\frac{k\pi}{2n}}=\frac{m}{n-k}\cdot\frac{2n-m}{n+k}\cdot\frac{2n+m}{3n-k}\cdot\frac{4n-m}{3n+k}\cdot\frac{4n+m}{5n-k}\text{ ic.}$$

cos.

$$\frac{\operatorname{cos}\frac{m\pi}{2n}}{\operatorname{cos}\frac{k\pi}{2n}} = \frac{n-m}{n-k}\cdot\frac{n+m}{n+k}\cdot\frac{3n-m}{3n-k}\cdot\frac{3n+m}{3n+k}\cdot\frac{5n-m}{5n-k}\text{ꝛc.}$$

$$\frac{\operatorname{cos}\frac{m\pi}{2n}}{\operatorname{sin}\frac{k\pi}{2n}} = \frac{n-m}{k}\cdot\frac{n+m}{2n-k}\cdot\frac{3n-m}{2n+k}\cdot\frac{3n+m}{4n-k}\cdot\frac{5n-m}{4n+k}\text{ꝛc.}$$

Nimmt man also für den Winkel $\frac{k\pi}{2n}$ einen Winkel an, dessen Sinus und Cosinus bekannt sind, so kann man daraus den Sinus und Cosinus eines jeden andern Winkels $\frac{m\pi}{2n}$ finden.

## §. 188.

Umgekehrt kann man nun auch die wahren Werthe von dergleichen ohne Ende fortlaufenden Ausdrücken entweder durch den Umfang des Kreises, oder durch bekannte Sinus und Cosinus erhalten: und dies ist allerdings von beträchtlicher Wichtigkeit, da man bis jetzt noch keine andere Methoden kennt, um den Werth solcher unendlichen Produkte wirklich darzustellen. Zur Bestimmung von $\pi$ aber, oder zur Berechnung der Sinus und Cosinus des Winkels $\frac{m\pi}{2n}$, auf dem Wege der Näherung, sind dergleichen Ausdrücke unbequem. Denn ob man gleich die Multiplication der Faktoren von $\frac{\pi}{2} = 2(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{25})(1-\frac{1}{49})$ u. s. f. in Decimal-Brüchen leicht verrichten kann, so muß man doch, selbst wenn man den Werth von $\pi$ nur auf zehn Stellen genau finden will, eine so große Menge derselben nehmen, daß dadurch dieser Weg höchst beschwerlich wird.

§. 189.

§. 189.

Der größte Nutzen, den diese Ausdrücke, ihrer unendlichen Form ungeachtet, gewähren, zeigt sich bey der Erfindung der Logarithmen, welche ohne dieselbe mit den äussersten Schwierigkeiten verknüpft seyn würde. Zuvörderst nemlich hat man, da $\pi = 4(1-\frac{1}{9})(1-\frac{1}{25})(1-\frac{1}{49})$ ꝛc. ist, wenn man die Logarithmen nimmt, $l\pi = l4 + l(1-\frac{1}{9}) + l(1-\frac{1}{25}) + l(1-\frac{1}{49}) +$ ꝛc. oder $l\pi = l2 - l(1-\frac{1}{4}) - l(1-\frac{1}{16}) - l(1-\frac{1}{36}) -$ ꝛc. man mag die gemeinen oder hyperbolischen Logarithmen nehmen. Da man indeß die gemeinen Logarithmen aus den hyperbolischen leicht finden kann, so kann man auch diese zuerst suchen, und dann kann man sich die Erfindung des hyperbolischen Logarithmen von $\pi$ ungemein erleichtern.

§. 190.

Da nemlich, wenn man die hyperbolischen Logarithmen nimmt, $l(1-x) = -x - \frac{xx}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} -$ ꝛc. [§. 122. 121.] ist, so erhält man, wenn man die einzelnen Glieder entwickelt,

$$l\pi = l4 \begin{cases} -\frac{1}{9} - \frac{1}{2.9^2} - \frac{1}{3.9^3} - \frac{1}{4.9^4} - \text{ꝛc.} \\ -\frac{1}{25} - \frac{1}{2.25^2} - \frac{1}{3.25^3} - \frac{1}{4.25^4} - \text{ꝛc.} \\ -\frac{1}{49} - \frac{1}{2.49^2} - \frac{1}{3.49^3} - \frac{1}{4.49^4} - \text{ꝛc.} \end{cases}$$

u. s. f.

Wenn

Wenn man in diesen aus unendlich vielen Gliedern bestehenden Reihen vertical herunter geht, so erhält man solche Reihen als diejenigen sind, wovon oben [§. 169. 170.] die Summen gefunden wurden. Setzt man daher der Kürze wegen

$$A = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \text{ꝛc.}$$

$$B = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \text{ꝛc.}$$

$$C = 1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \text{ꝛc.}$$

$$D = 1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \text{ꝛc.}$$

u. s. w.

so ist $l\pi = l4 - (A-1) - \frac{1}{2}(B-1) - \frac{1}{3}(C-1) - \frac{1}{4}(D-1) - \text{ꝛc.}$ Wenn man aber die oben gefundenen Summen näherungsweise sucht, so wird

$A = 1,2337005501361698273543$ 1

$B = 1,0146780316041920545462$ 5

$C = 1,0014470766409421219064$ 7

$D = 1,0001551790252961193029$ 8

$E = 1,0000170413630448255081$ 6

$F = 1,0000018858485831195759$ 0

$G = 1,0000002092405192115001$ 0

$H = 1,0000000232371573791567$ 0

$I = 1,0000000025814375566597$ 7

$K = 1,0000000002868076974555$ 8

$L = 1,0000000000318667751404$ 4

$M = 1,0000000000035407229439$ 2

$N = 1,0000000000003934124669$ 1

$O = 1,0000000000000437124485$ 9

P =

$$P = 1,000000000000000485693682$$
$$Q = 1,000000000000000053965957$$
$$R = 1,000000000000000005996217$$
$$S = 1,000000000000000000666246$$
$$T = 1,000000000000000000074027$$
$$V = 1,000000000000000000008225$$
$$W = 1,000000000000000000000913$$
$$X = 1,000000000000000000000101$$

Hieraus findet man ohne verdrießliche Weitläuftigkeit den hyperbolischen Logarithmen von $\pi = 1,14472988584940017414342$, und multiplicirt man denselben durch $0,43429$ ꝛc., so findet man den gemeinen Logarithmen von $\pi = 0,49714987269413385435126$.

§. 191.

Da wir ferner auch für den Sinus und Cosinus des Winkels $\frac{m\pi}{2n}$ einen aus unendlich vielen Faktoren bestehenden Ausdruck gefunden haben, so können wir auch die Logarithmen dieses Sinus und Cosinus dadurch auf eine bequeme Art ausdrucken. Es ist nemlich [aus §. 184.]

$$l\sin.\frac{m\pi}{2n} = l\pi + l\frac{m}{2n} + l(1 - \frac{mm}{4nn}) + l(1 - \frac{mm}{16nn}) + l(1 - \frac{mm}{36nn}) \text{ ꝛc.}$$

$$l\cos.\frac{m\pi}{2n} = l(1 - \frac{mm}{nn}) + l(1 - \frac{mm}{9nn}) + l(1 - \frac{mm}{25nn}) + l(1 - \frac{mm}{49nn}) \text{ ꝛc.}$$

Hiernach lassen sich zuvörderst die hyperbolischen Logarithmen eben so wie vorhin auf eine leichte Art durch sehr convergirende Reihen ausdrucken. Damit wir aber die

die unendlichen Reihen nicht ohne Noth vervielfältigen, so wollen wir die Logarithmen von den ersten Gliedern nicht in dergleichen Reihen entwickeln, und dann ist

$$l\sin.\frac{m\varpi}{2n} = l\varpi + lm + l(2n-m) + l(2n+m) - l8 - 3ln$$

$$- \frac{mm}{16nn} - \frac{m^4}{2.16^2n^4} - \frac{m^6}{3.16^3n^6} - \frac{m^8}{4.16^4n^8} - \text{ꝛc.}$$

$$- \frac{mm}{36nn} - \frac{m^4}{2.36^2n^4} - \frac{m^6}{3.36^3n^6} - \frac{m^8}{4.36^4n^8} - \text{ꝛc.}$$

$$- \frac{mm}{64nn} - \frac{m^4}{2.64^2n^4} - \frac{m^6}{3.64^3n^6} - \frac{m^8}{4.64^4n^8} - \text{ꝛc.}$$

u. s. w.

$$l\cos.\frac{m\varpi}{2n} = l(n-m) + l(n+m) - 2ln$$

$$- \frac{mm}{9nn} - \frac{m^4}{2.9^2n^4} - \frac{m^6}{3.9^3n^6} - \frac{m^8}{4.9^4n^8} - \text{ꝛc.}$$

$$- \frac{mm}{25nn} - \frac{m^4}{2.25^2n^4} - \frac{m^6}{3.25^3n^6} - \frac{m^8}{4.25^4n^8} - \text{ꝛc.}$$

$$- \frac{mm}{49nn} - \frac{m^4}{2.49^2n^4} - \frac{m^6}{3.49^3n^6} - \frac{m^8}{4.49^4n^8} - \text{ꝛc.}$$

u. s. w.

## §. 192.

Es sind also die geraden Potestäten von $\frac{m}{n}$ in diesen Reihen durch solche Reihen multiplicirt, als wir oben bereits summiren gelernt haben. Es ist nemlich

$$l\sin.\frac{m\varpi}{2n} = lm + l(2n-m) + l(2n+m) - 3ln + l\varpi - l8$$

$$- \frac{mm}{nn}\left(\frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{8^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{12^2} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\frac{1}{10^4}+\frac{1}{12^4}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\frac{1}{10^6}+\frac{1}{12^6}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{4^8}+\frac{1}{6^8}+\frac{1}{8^8}+\frac{1}{10^8}+\frac{1}{12^8}+\text{ꝛc.}\right)$$

u. s. w.

$$l\cos.\frac{m\pi}{2n}=l(n-m)+l(n+m)-2ln$$

$$-\frac{mm}{nn}\left(\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\frac{1}{9^2}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{m^4}{2n^4}\left(\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\frac{1}{7^4}+\frac{1}{9^4}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{m^6}{3n^6}\left(\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+\frac{1}{7^6}+\frac{1}{9^6}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{m^8}{4n^8}\left(\frac{1}{3^8}+\frac{1}{5^8}+\frac{1}{7^8}+\frac{1}{9^8}+\text{ꝛc.}\right)$$

u. s. w.

Die Summen dieser letzten Reihen findet man §. 190. Was die vorhergehenden Reihen betrifft, so könnten ihre Summen allerdings aus diesen hergeleitet werden; damit aber ihr Gebrauch erleichtert werde, so mögen sie gleichfalls hier stehen.

## §. 193.

Setzt man der Kürze wegen

$$\alpha=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{8^2}+\text{ꝛc.}$$

$$\beta=\frac{1}{2^4}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{6^4}+\frac{1}{8^4}+\text{ꝛc.}$$

$$\gamma=\frac{1}{2^6}+\frac{1}{4^6}+\frac{1}{6^6}+\frac{1}{8^6}+\text{ꝛc.}$$

δ

$$\delta = \frac{1}{2^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{6^8} + \frac{1}{8^8} + \text{ꝛc.}$$

u. s. w.

so sind diese Summen näherungsweise ausgedruckt,

$\alpha = 0{,}41123351671205660911810$
$\beta = 0{,}06764520210694613696975$
$\gamma = 0{,}01589598534350701780804$
$\delta = 0{,}00392217717264822007570$
$\varepsilon = 0{,}00097753376477325984898$
$\zeta = 0{,}00024420070472492872274$
$\eta = 0{,}00006103889453949332915$
$\vartheta = 0{,}00001525902225127269977$
$\iota = 0{,}00000381471182744318008$
$\varkappa = 0{,}00000095367522617534053$
$\lambda = 0{,}00000023841863595259154$
$\mu = 0{,}00000005960464832831555$
$\nu = 0{,}00000001490116141589813$
$\xi = 0{,}00000000372529031233986$
$o = 0{,}00000000093132257548284$
$\varpi = 0{,}00000000023283064370807$
$\rho = 0{,}00000000005820766091685$
$\sigma = 0{,}00000000001455191522858$
$\tau = 0{,}00000000000363797880710$
$\upsilon = 0{,}00000000000090949470177$
$\varphi = 0{,}00000000000022737367544$
$\chi = 0{,}00000000000005684341886$
$\psi = 0{,}00000000000001421085471$
$\omega = 0{,}00000000000000355271367$

Die übrigen Summen erhält man, wenn man jede vorhergehende durch 4 dividirt.

## §. 194.

Nimmt man nun dieses zu Hülfe, so ist

$$l\sin.\frac{m\pi}{2n} = lm + l(2n-m) + l(2n+m) - 3ln + l\pi - l8$$

$$-\frac{mm}{nn}\left(\alpha - \frac{1}{2^2}\right) - \frac{m^4}{2n^4}\left(\beta - \frac{1}{2^4}\right) - \frac{m^6}{3n^6}\left(\gamma - \frac{1}{2^6}\right) - \text{ꝛc.}$$

$$l\cos.\frac{m\pi}{2n} = l(n-m) + l(n+m) - 2ln$$

$$-\frac{mm}{nn}(A-1) - \frac{m^4}{2n^4}(B-1) - \frac{m^6}{3n^6}(C-1) - \text{ꝛc.}$$

Da nun die Logarithmen von $\pi$ und 8 bekannt sind, so ist der hyperbolische Logarithme des Sinus des Winkels

$$\frac{m}{n}90^\circ = lm + l(2n-m) + l(2n+m) - 3ln$$

$$- \quad 0,93471165583043575410$$

$$- \frac{m^2}{n^2}.\ 0,16123351671205660911$$

$$- \frac{m^4}{n^4}.\ 0,00257260105347306848$$

$$- \frac{m^6}{n^6}.\ 0,00009032844783567260$$

$$- \frac{m^8}{n^8}.\ 0,00000398179316205501$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}}.\ 0,00000019425295465196$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}}.\ 0,00000001001328748812$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}}.\ 0,00000000053404135618$$

$$- \frac{m^{16}}{n^{16}}.\ 0,00000000002914859658$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}}.\ 0,00000000000161797979$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}00000000000009097690$$

$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0{,}00000000000000516827$$

$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0{,}00000000000000029607$$

$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0{,}00000000000000001708$$

$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \cdot 0{,}00000000000000000099$$

$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \cdot 0{,}00000000000000000005$$

Dagegen ist der hyperbolische Logarithme des Cosinus des Winkels $\frac{m}{n} 90^0 = l(n-m) + l(n+m) - 2ln$

$$- \frac{m^{2}}{n^{2}} \cdot 0{,}23370055013616982735$$

$$- \frac{m^{4}}{n^{4}} \cdot 0{,}00733901580209602727$$

$$- \frac{m^{6}}{n^{6}} \cdot 0{,}00048235888031404063$$

$$- \frac{m^{8}}{n^{8}} \cdot 0{,}00003879475632402982$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}00000340827260896510$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}00000031430809718659$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}00000002989150274450$$

$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}00000000290464467239$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,00000000028682639518$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,00000000002868076974$$

$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0,00000000000289697956$$

$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \; 0,00000000000029506024$$

$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \; 0,00000000000003026249$$

$$- \frac{m^{28}}{n^{28}} \; 0,00000000000000312232$$

$$- \frac{m^{30}}{n^{30}} \; 0,00000000000000032379$$

$$- \frac{m^{32}}{n^{32}} \; 0,00000000000000003373$$

$$- \frac{m^{34}}{n^{34}} \; 0,00000000000000000352$$

$$- \frac{m^{36}}{n^{36}} \; 0,00000000000000000037$$

$$- \frac{m^{38}}{n^{38}} \; 0,00000000000000000004$$

### §. 195.

Multiplicirt man diese hyperbolischen Logarithmen der Sinus und Cosinus durch 0,4342944819 u. s. f. so erhält man ihre gemeinen Logarithmen für den Radius = 1. Da aber in den trigonometrischen Tafeln der Sinus des rechten Winkels = 10 angenommen zu werden pflegt, so muß man, um die Logarithmen der Sinus und Cosinus, so wie sie in den Tafeln stehen, zu erhalten, nach der gedachten Multiplication noch 10 dazu addiren. Hiernach ist der

tabu-

tabularische Logarithme des Sinus des Winkels $\frac{m}{n}90^\circ =$

$$lm + l(2n - m) + l(2n + m) - 3ln$$

$$+ \quad 9,594059885702190$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,070022826605901$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,001117266441661$$

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0,000039229146453$$

$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0,000001729270798$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0,000000084362986$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0,000000004348715$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0,000000000231931$$

$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0,000000000012659$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0,000000000000702$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0,000000000000039$$

und der tabularische Logarithme des Cosinus des Winkels

$$\frac{m}{n}90^\circ = l(n-m) + l(n+m) - 2ln$$

$$+ \quad 10,000000000000000$$

$$- \frac{m^2}{n^2} \cdot 0,101494859341892$$

$$- \frac{m^4}{n^4} \cdot 0,003187294065451$$

$$- \frac{m^6}{n^6} \cdot 0{,}000209485800017$$

$$- \frac{m^8}{n^8} \cdot 0{,}000016848348597$$

$$- \frac{m^{10}}{n^{10}} \cdot 0{,}000001480193986$$

$$- \frac{m^{12}}{n^{12}} \cdot 0{,}000000136502272$$

$$- \frac{m^{14}}{n^{14}} \cdot 0{,}000000012981715$$

$$- \frac{m^{16}}{n^{16}} \cdot 0{,}000000001261471$$

$$- \frac{m^{18}}{n^{18}} \cdot 0{,}000000000124567$$

$$- \frac{m^{20}}{n^{20}} \cdot 0{,}000000000012456$$

$$- \frac{m^{22}}{n^{22}} \cdot 0{,}000000000001258$$

$$- \frac{m^{24}}{n^{24}} \cdot 0{,}000000000000128$$

$$- \frac{m^{26}}{n^{26}} \cdot 0{,}000000000000013$$

## §. 196.

Vermittelst dieser Formeln kann man sowohl die hyperbolischen als die gemeinen Logarithmen der Sinus und Cosinus eines jeden Winkels finden, ohne daß man dabey die Sinus und Cosinus selbst zu wissen braucht. Aus den Logarithmen der Sinus und Cosinus aber findet man die Logarithmen der Tangenten, der Cotangenten, der Secanten und der Cosecanten durch eine bloße Subtraction, und es sind also dazu keine besondere Formeln nöthig. Uebrigens

gens muß bemerkt werden, daß man von den Zahlen $m$, $n$, $n-m$, $n+m$ u. s. f. entweder die hyperbolischen oder die gemeinen Logarithmen zu nehmen hat, je nachdem man die hyperbolischen oder die gemeinen Logarithmen der Sinus und der Cosinus sucht. Ueberdies zeigt der Bruch $\frac{m}{n}$ das Verhältniß an, welches der gegebene Winkel zum rechten Winkel hat; und da die Sinus der Winkel, die größer sind als ein halber rechter Winkel, den Cosinus der Winkel, die um eben so viel kleiner sind als ein halber R, gleich sind: so braucht der Bruch $\frac{m}{n}$ nie größer als $\frac{1}{2}$ angenommen zu werden, und es convergiren daher die angeführten Glieder weit stärker, so daß man meistens nur die Hälfte davon zu nehmen braucht.

§. 197.

Ehe wir diesen Gegenstand verlassen, müssen wir noch eine bequemere Art die Tangenten und Secanten eines jeden Winkels zu finden, als das vorhergehende Capitel an die Hand giebt, mittheilen. Denn wenn man gleich die Tangenten und Secanten aus den Sinus und Cosinus erhalten kann, so ist doch dieser Weg, da man dabey die Division gebraucht, in so großen Zahlen zu lästig. Zwar haben wir die Formeln für die Tangenten und Cotangenten schon oben §. 135 gegeben, allein wir waren da noch nicht im Stande, den Grund davon zugleich beyzufügen. Dies ist dem gegenwärtigen Capitel vorbehalten worden.

§. 198. a.

Zuvörderst leiten wir also aus §. 181. einen Ausdruck für die Tangente des Winkels $\frac{m}{2n}\pi$ her. Da nemlich

$$\frac{1}{nn-mm}+\frac{1}{9nn-mm}+\frac{1}{25nn-mm}+ \text{rc.}$$

$$= \frac{\pi}{4mn} \cdot \text{tang.} \frac{m}{2n}\pi$$

ist, so ist

$$\text{tang.} \frac{m}{2n}\pi = \frac{4mn}{\pi} \left( \frac{1}{nn - mm} + \frac{1}{9nn - mm} + \frac{1}{25nn - mm} + \text{rc.} \right)$$

Da ferner

$$\frac{1}{nn - mm} + \frac{1}{4nn - mm} + \frac{1}{9nn - mm} + \text{rc.}$$

$$= \frac{1}{2mm} - \frac{\pi}{2mn} \cdot \cot. \frac{m}{n}\pi$$

ist [§. 181.] so erhält man, wenn man $2n$ anstatt $n$ setzt,

$$\cot. \frac{m}{2n}\pi = \frac{2n}{m\pi} - \frac{4mn}{\pi} \left( \frac{1}{4nn - mm} + \frac{1}{16nn - mm} + \frac{1}{36nn - mm} + \text{rc.} \right)$$

Verwandelt man nun diese Brüche, die ersten ausgenommen, wobey solches nicht nöthig ist, in unendliche Reihen, so wird

$$\text{tang.} \frac{m}{2n}\pi = \frac{mn}{nn - mm} \cdot \frac{4}{\pi}$$

$$+ \frac{4}{\pi} \left( \frac{m}{3^2 n} + \frac{m^3}{3^4 n^3} + \frac{m^5}{3^6 n^5} + \text{rc.} \right)$$

$$+ \frac{4}{\pi} \left( \frac{m}{5^2 n} + \frac{m^3}{5^4 n^3} + \frac{m^5}{5^6 n^5} + \text{rc.} \right)$$

$$+ \frac{4}{\pi} \left( \frac{m}{7^2 n} + \frac{m^3}{7^4 n^3} + \frac{m^5}{7^6 n^5} + \text{rc.} \right)$$

u. s. w.

$$\cot. \frac{m}{2n}\pi = \frac{n}{m} \cdot \frac{2}{\pi} - \frac{mn}{4nn - mm} \cdot \frac{4}{\pi}$$

$$- \frac{4}{\pi} \left( \frac{m}{4^2 n} + \frac{m^3}{4^4 n^3} + \frac{m^5}{4^6 n^5} + \text{rc.} \right)$$

—

$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{6^2n}+\frac{m^3}{6^4n^3}+\frac{m^5}{6^6n^5}+\text{ꝛc.}\right)$$

$$-\frac{4}{\pi}\left(\frac{m}{8^2n}+\frac{m^3}{8^4n^3}+\frac{m^5}{8^6n^5}+\text{ꝛc.}\right)$$

u. s. f.

### §. 198 b.

Aus dem bekannten Werthe von $\pi$ aber findet man

$$\frac{1}{\pi}=0,318309886183790671537767926745028724;$$

und außerdem kommen hier eben die Reihen vor, welche wir oben [§. 190 und 193.] durch die Buchstaben A, B, C, D u. s. f. und $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, u. s. f. bezeichnet haben. Dies vorausgesetzt, so ist

$$\text{tang.}\,\frac{m}{2n}\pi=\frac{mn}{nn-mm}\cdot\frac{4}{\pi}+\frac{m}{n}\cdot\frac{4}{\pi}(A-1)+\frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{4}{\pi}(B-1)+\frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{4}{\pi}(C-1)+\frac{m^7}{n^7}\cdot\frac{4}{\pi}(D-1)+\text{ꝛc.}$$

desgleichen

$$\text{cot.}\,\frac{m}{2n}\pi=\frac{n}{m}\cdot\frac{2}{\pi}-\frac{4mn}{4nn-mm}\cdot\frac{1}{\pi}-\frac{m}{n}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\alpha-\frac{1}{2^2}\right)-\frac{m^3}{n^3}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\beta-\frac{1}{2^4}\right)-\frac{m^5}{n^5}\cdot\frac{4}{\pi}\left(\gamma-\frac{1}{2^6}\right)-\text{ꝛc.}$$

Aus diesen Formeln nun sind die Ausdrücke entstanden, welche oben §. 135. für die Tangenten und die Cotangenten gegeben worden sind; und zugleich ist §. 137. gezeigt werden, wie man die Secanten und Cosecanten aus den Tangenten und Cotangenten durch eine bloße Addition zu finden im Stande ist. Vermittelst dieser Regeln könnten daher die ganzen trigonometrischen Tafeln auf eine viel leichtere Art berechnet werden, als es von den ersten Verfertigern derselben geschehen ist.

---

Zwölf-