Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Zwölftes Capitel. Von der reellen Entwickelung der gebrochenen Funktionen.

Zwölftes Capitel.

Von der reellen Entwickelung der gebrochenen Funktionen.

§. 199.

Es ist bereits oben, im zweyten Capitel, gezeigt worden, wie man eine jede gebrochene Funktion in so viel Theile auflösen kann, als der Nenner derselben einfache Faktoren hat. Da aber hierbey eben diese einfache Faktoren die Nenner jener Partial-Brüche werden, und also diese Brüche, wenn die Faktoren, aus welchen sie entspringen, imaginär sind, ebenfalls imaginär werden müssen: so kann es in diesem Falle von keinem Nutzen seyn, daß man einen reellen Bruch in imaginäre auflöset. Da also [im neunten Capitel] gezeigt worden ist, daß eine jede ganze Funktion, dergleichen der Nenner einer jeden gebrochenen Funktion ist, so viel einfache imaginäre Faktoren sie auch immer enthalten mag, dennoch in doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden kann: so kann man dadurch die imaginären Größen bey der Auflösung der gebrochenen Funktionen vermeiden, wenn man dabey nicht die einfachen, sondern die doppelten reellen Faktoren des Haupt-Nenners gebraucht.

§. 200.

Ist daher die gebrochene Funktion $\frac{M}{N}$ gegeben, so suche man daraus auf die oben [im zweyten Capitel] erklärte Art

so

so viel einfache Brüche, als der Nenner N einfache reelle Faktoren hat. Anstatt der imaginären Faktoren aber nehme man den Ausdruck $pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz$ zum Faktor von N an; und da man bey diesem Geschäfte den Zähler und Nenner in entwickelter Gestalt betrachten muß, so sey der gegebene Bruch

$$\frac{A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \text{etc.}}{(pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz)(\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{etc.})}$$

Ferner sey der Partial-Bruch, der aus dem Faktor des Nenners $pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz$ entsteht, $= \frac{\mathfrak{A} + az}{pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz}$: denn da die veränderliche Größe z im Nenner zwey Dimensionen hat, so kann sie im Zähler wohl eine aber nicht mehr haben, weil sonst der Ausdruck eine ganze Funktion enthielte, welche man besonders suchen muß.

§. 201.

Setzt man der Kürze wegen den Zähler $A + Bz + Cz^2 + \text{etc.} = M$, und den zweyten Faktor des Nenners, $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \text{etc.} = Z$; den andern Partial-Bruch aber, der aus dem Faktor des Nenners Z entspringt, $= \frac{Y}{Z}$: so ist Y

$$= \frac{M - \mathfrak{A}Z - aZz}{pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz},$$ *) und dieser Ausdruck muß eine ganze Funktion von z, und also durch $pp - 2pqz \times \cos. \varphi + ppzz$ theilbar seyn. **) Es muß daher $M - \mathfrak{A}Z - aZz$ verschwinden, wenn man $pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz = 0$, seyn läßt, d. h. wenn man sowohl $z = \frac{p}{q} (\cos. \varphi + \sqrt{-1}. \sin. \varphi.)$ als $z = \frac{p}{q} (\cos. \varphi - \sqrt{-1}. \sin. \varphi)$ setzt,

[§. 146]

[§. 146.], und setzt man $\frac{p}{q} = f$, so wird $z^n = f^n(\cos. n\varphi \pm \sqrt{-1}. \sin. n\varphi)$ [§. 133. im Anfange]. Durch die Substitution dieses doppelten Werths von z erhält man daher eine zwiefache Gleichung, woraus man die unbekannten beständigen Größen $\mathfrak{A}$ und a bestimmen kann.

*) Da $N = (pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz) Z$ ist, so ist

$$\frac{M}{N} = \frac{\mathfrak{A} + az}{pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz} + \frac{Y}{Z}$$

$$= \frac{M}{(pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz) Z},$$

und folglich

$$\frac{Y}{Z} = \frac{M - \mathfrak{A}Z - aZz}{(pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz) Z} \text{ und}$$

$$Y = \frac{M - \mathfrak{A}Z - aZz}{pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz}.$$

Man vergleiche hierbey den 41sten §.

**) Denn es ist Y nach §. 41. eine ganze Funktion, und folglich, weil

$$\frac{M - \mathfrak{A}Z - aZz}{pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz} = Y$$

ist, auch $\frac{M - \mathfrak{A}Z - aZz}{pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz}$; und daher auch $M - \mathfrak{A}Z - aZz$ durch $pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz$ theilbar, weil sonst das Vorhergehende nicht statt finden könnte.

§. 202.

Substituirt man wirklich, so giebt die Gleichung $M = \mathfrak{A}Z + aZz$ *), wenn man sie entwickelt, folgende doppelte Gleichung:

$$\left.\begin{array}{l} A + Bf.\cos.\varphi + Cff.\cos.2\varphi + Df.^3\cos.3\varphi + \text{ꝛc.} \\ \pm(Bf.\sin.\varphi + Cff.\sin.2\varphi + Df.^3\sin.3\varphi + \text{ꝛc.})\sqrt{-1} \end{array}\right\} =$$

$$\left\{\begin{array}{l} \mathfrak{A}(\alpha + \beta f.\cos.\varphi + \gamma ff.\cos.2\varphi + \delta f^3.\cos.3\varphi + \text{ꝛc.}) \\ \pm\mathfrak{A}(\beta f.\sin.\varphi + \gamma ff.\sin.2\varphi + \delta f^3.\sin.3\varphi + \text{ꝛc.})\sqrt{-1} \\ + \mathfrak{a}(\alpha f.\cos.\varphi + \beta ff.\cos.2\varphi + \gamma f^3.\cos.3\varphi + \text{ꝛc.}) \\ \pm\mathfrak{a}(\alpha f.\sin.\varphi + \beta ff.\sin.2\varphi + \gamma f^3.\sin.3\varphi + \text{ꝛc.})\sqrt{-1}. \end{array}\right.$$

Man setze, die Rechnung abzukürzen,

$$\begin{array}{rl} A + Bf.\cos.\varphi + Cff.\cos.2\varphi + Df^3\cos.3\varphi + \text{ꝛc.} &= \mathfrak{P} \\ Bf.\sin.\varphi + Cff.\sin.2\varphi + Df^3\sin.3\varphi + \text{ꝛc.} &= \mathfrak{p} \\ \alpha + \beta f\cos.\varphi + \gamma ff.\cos.2\varphi + \delta f^3.\cos.3\varphi + \text{ꝛc.} &= \mathfrak{Q} \\ \beta f.\sin.\varphi + \gamma ff.\sin.2\varphi + \delta f^3.\sin.3\varphi + \text{ꝛc.} &= \mathfrak{q} \\ \alpha f.\cos.\varphi + \beta ff.\cos.2\varphi + \gamma f^3.\cos.3\varphi + \text{ꝛc.} &= \mathfrak{R} \\ \alpha f.\sin.\varphi + \beta ff.\sin.2\varphi + \gamma f^3.\sin.3\varphi + \text{ꝛc.} &= \mathfrak{r} \end{array}$$

so ist $\mathfrak{P} \pm \mathfrak{p}\sqrt{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} \pm \mathfrak{A}\mathfrak{q}\sqrt{-1} + \mathfrak{a}\mathfrak{R} \pm \mathfrak{a}\mathfrak{r}\sqrt{-1}$

*) Man setzt nemlich zuvörderst wieder

$$M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \text{ꝛc., und}$$
$$Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \text{ꝛc.},$$

und darauf substituirt man in diesen Werthen für z^0, z^1, z^2, z^3, ꝛc. die dafür aus $z^n = f^n(\cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin.n\varphi)$ sich ergebende Werthe.

§. 203.

Wegen der doppelten Zeichen erhält man hieraus die beyden Gleichungen

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + \mathfrak{a}\mathfrak{R}$$
$$\mathfrak{p} = \mathfrak{A}\mathfrak{q} + \mathfrak{a}\mathfrak{r} \text{ *)}$$

und hieraus bekommen die unbekannten Größen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{a}$ diese Bestimmung

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}}, \text{ und } \mathfrak{a} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{q}\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}\mathfrak{r}} \text{ **)}$$

Wenn

Wenn also der Bruch $\frac{M}{(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)\,Z}$ gegeben ist, so findet man den daher entstehenden Partial-Bruch $\frac{\mathfrak{A} + az}{pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz}$ auf folgende Art. Man setzt $f = \frac{p}{q}$, und nachdem man die einzeln Glieder entwickelt hat, so sucht man dadurch

daß man $z^n = f^n.\cos.n\,\varphi$ setzt, $M = \mathfrak{P}$
" " $z^n = f^n.\sin.n\,\varphi$ " $M = \mathfrak{p}$
" " $z^n = f^n.\cos.n\,\varphi$ " $Z = \mathfrak{Q}$
" " $z^n = f^n.\sin.n\,\varphi$ " $Z = \mathfrak{q}$
" " $z^n = f^n.\cos.n\,\varphi$ " $zZ = \mathfrak{R}$
" " $z^n = f^n.\sin.n\,\varphi$ " $zZ = \mathfrak{r}$

Hat man auf diese Art die Werthe $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{q}$, $\mathfrak{r}$, gefunden, so ist

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}} \text{ und } a = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q}}{\mathfrak{q}\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}\mathfrak{r}} = \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{Q} - \mathfrak{P}\mathfrak{q}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R}}.$$

*) Es ist nemlich

$$\mathfrak{P} + \mathfrak{p}\sqrt{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + \mathfrak{A}\mathfrak{q}\sqrt{-1} + a\mathfrak{R} + a\mathfrak{r}\sqrt{-1}$$
$$\mathfrak{P} - \mathfrak{p}\sqrt{-1} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} - \mathfrak{A}\mathfrak{q}\sqrt{-1} + a\mathfrak{R} - a\mathfrak{r}\sqrt{-1}$$

folglich $2\mathfrak{P} = 2\mathfrak{A}\mathfrak{Q} + 2a\mathfrak{R}$, und $2\mathfrak{p} = 2\mathfrak{A}\mathfrak{q} + 2a\mathfrak{r}$.

**) Denn aus der zweyten Gleichung ist, $a = \frac{\mathfrak{p} - \mathfrak{A}\mathfrak{q}}{\mathfrak{r}}$, und dieser Werth giebt, wenn man ihn in die erste Gleichung bringt, $\mathfrak{P} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q} + \frac{\mathfrak{p}\mathfrak{R} - \mathfrak{A}\mathfrak{q}\mathfrak{R}}{\mathfrak{r}}$, oder $\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R} = \mathfrak{A}\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{A}\mathfrak{q}\mathfrak{R}$.

Ferner ist aus der ersten Gleichung, $\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P} - a\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}}$, und bringt man diesen Werth in die zweyte Gleichung, so bekommt man $\mathfrak{p} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{q} - a\mathfrak{q}\mathfrak{R}}{\mathfrak{Q}} + a\mathfrak{r}$, oder $\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q} = a\mathfrak{q}\mathfrak{R} - a\mathfrak{Q}\mathfrak{r}$.

Erstes Exempel.

Es sey die gebrochene Funktion $\frac{zz}{(1-z+zz)(1+z^4)}$ gegeben, um daraus den Partial-Bruch, der aus dem Faktor des Nenners, $1-z+zz$, entsteht, zu finden, und dieser Partial-Bruch sey $= \frac{\mathfrak{A}+az}{1-z+zz}$. Vergleicht man diesen Faktor $1-z+zz$ mit der allgemeinen Form $pp - 2pqz.\ \mathrm{cos}.\ \varphi + qqzz$, so findet man $p=1$; $q=1$; und $\mathrm{cos}.\ \varphi = \frac{1}{2}$, und daraus wird $\varphi = 60^\circ = \frac{\pi}{3}$. Da nun $M = zz$; $Z = 1+z^4$, und $f = 1$ ist: so ist

$$\mathfrak{P} = \mathrm{cos}.\ \frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2};\ \mathfrak{p} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \mathrm{cos}.\ \frac{4}{3}\pi = \frac{1}{2};\ \mathfrak{q} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\mathfrak{R} = \mathrm{cos}.\ \frac{\pi}{3} + \mathrm{cos}.\ \frac{5\pi}{3} = 1;\ \mathfrak{r} = 0.$$

Hieraus findet man $\mathfrak{A} = -1$; und $a = 0$, und der gesuchte Bruch ist daher $\frac{-1}{1-z+zz}$. Das Complement hiervon ist $\frac{1+z+zz}{1+z^4}$, *) und da dessen Nenner $1+z^4$ die Faktoren $1+z\sqrt{2}+zz$, und $1-z\sqrt{2}+zz$ hat, so kann man dabey diese Entwickelung von neuem unternehmen. Es wird aber alsdann $\varphi = \frac{\pi}{4}$, und f im ersten Falle $= -1$, und im letzten $= +1$.

*) Denn wenn man die beyden Brüche $\frac{-1}{1-z+zz}$ und $\frac{1+z+zz}{1+z^4}$ addirt, so erhält man zur Summe $\frac{zz}{(1-z+zz)(1+z^4)}$.

Zweytes Exempel.

Es sey also der Bruch

$$\frac{1+z+zz}{(1+z\sqrt{2}+zz)\,(1-z\sqrt{2}+zz)}$$

gegeben, wo $M = 1+z+zz$, und für den ersten Faktor $f = -1$; $\varphi = \frac{\pi}{4}$, und $Z = 1 - z\sqrt{2} + zz$ ist. Hieraus ergiebt sich

$$\mathfrak{P} = 1 - \cos.\frac{\pi}{4} + \cos.\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{p} = -\sin.\frac{\pi}{4} + \sin.\frac{2\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \sqrt{2}.\cos.\frac{\pi}{4} + \cos.\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$\mathfrak{q} = +\sqrt{2}.\sin.\frac{\pi}{4} + \sin.\frac{2\pi}{4} = 2$$

$$\mathfrak{R} = -\cos.\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}.\cos.\frac{2\pi}{4} - \cos.\frac{3\pi}{4} = 0$$

$$\mathfrak{r} = -\sin.\frac{\pi}{4} - \sqrt{2}.\sin.\frac{2\pi}{4} - \sin.\frac{3\pi}{4} = -2\sqrt{2};$$

woher denn ferner $\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R} = -4\sqrt{2}$; $\mathfrak{A} = \frac{\sqrt{2}-1}{2\sqrt{2}}$ und $\mathfrak{a} = 0$ wird. Es erwächst daher aus dem Faktor des Nenners, $1+z\sqrt{2}+zz$, dieser Partial-Bruch $\frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1+z\sqrt{2}+zz}$ und aus dem andern Faktor erhält man auf eine ähnliche Art diesen, $\frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1-z\sqrt{2}+zz}$. Folglich sind die Partial-Brüche, worin die anfänglich gegebene Funktion $\frac{zz}{(1-z+zz)(1+z^4)}$ aufgelöset werden kann, $\frac{-1}{1-z+zz}$

$$+\frac{(\sqrt{2}-1):2\sqrt{2}}{1+z\sqrt{2}+zz} + \frac{(\sqrt{2}+1):2\sqrt{2}}{1-z\sqrt{2}+zz}.$$

Drittes Exempel.

Es sey der Bruch

$$\frac{1 + 2z + zz}{(1 - \frac{8}{5}z + zz)(1 + 2z + 3zz)}$$

gegeben. Setzt man hier den Bruch, der aus dem Faktor des Nenners, $1 - \frac{8}{5}z + zz$, entspringt, $= \frac{\mathfrak{A} + az}{1 - \frac{8}{5}z + zz}$,

so wird $p = 1$; $q = 1$; und $\cos. \varphi = \frac{4}{5}$: woraus $f = 1$; $M = 1 + 2z + zz$, und $Z = 1 + 2z + 3zz$ wird. Weil aber hier das Verhältniß des Winkels φ zum rechten Winkel nicht bekannt ist, so muß man die Sinus und Cosinus seiner Vielfachen besonders suchen. Da nun

$$\cos. \varphi = \frac{4}{5}; \text{ so wird } \sin. \varphi = \frac{3}{5}$$

$$\cos. 2\varphi = \frac{7}{25}; \qquad \sin. 2\varphi = \frac{24}{25}$$

$$\cos. 3\varphi = \frac{-44}{125}; \qquad \sin. 3\varphi = \frac{117}{125};$$

und also

$$\mathfrak{P} = 1 + 2.\frac{4}{5} + \frac{7}{25} = \frac{72}{25}$$

$$\mathfrak{p} = 2.\frac{3}{5} + \frac{24}{25} = \frac{54}{25}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + 2.\frac{4}{5} + 3.\frac{7}{25} = \frac{86}{25}$$

$$\mathfrak{q} = 2.\frac{3}{5} + 3.\frac{24}{25} = \frac{102}{25}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{4}{5} + 2.\frac{7}{25} - 3.\frac{44}{125} = \frac{38}{125}$$

$$\mathfrak{r} = \frac{3}{5} + 2.\frac{24}{25} + 3.\frac{117}{125} = \frac{666}{125}, \text{ und folglich}$$

$$\mathfrak{Q} r - q \mathfrak{R} = \frac{53400}{25 . 125} = \frac{2136}{125}.$$

Folglich ist.

$$\mathfrak{A} = \frac{1836}{2136} = \frac{153}{178}; \text{ und } a = -\frac{540}{2136} = -\frac{45}{178}.$$

Es ist also der Bruch, welcher aus dem Faktor $1 - \frac{8}{5}z + zz$ erwächst,

$$\frac{9(17 - 5z) : 178}{1 - \frac{8}{5}z + zz}.$$

Sucht man auf eine ähnliche Art den Bruch, der zu dem andern Faktor gehört, so wird $p = 1$; $q = -\sqrt{3}$; $\cos. \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$; $f = -\frac{1}{\sqrt{3}}$; $M = 1 + 2z + zz$, und $Z = 1 - \frac{8}{5}z + zz$. Aus $\cos. \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$ aber findet man

$$\cos. \varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad \sin. \varphi = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\cos. 2\varphi = -\frac{1}{3}; \quad \sin. 2\varphi = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\cos. 3\varphi = -\frac{5}{3\sqrt{3}}; \quad \sin. 3\varphi = \frac{\sqrt{3}}{3\sqrt{3}}.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{P} = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} . \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} . - \frac{1}{3} = \frac{2}{9}$$

$$p = -\frac{2}{\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} . \frac{2\sqrt{2}}{3} = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$\mathfrak{Q} = 1 + \frac{8}{5\sqrt{3}} . \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} . - \frac{1}{3} = \frac{64}{45}$$

$$q = + \frac{8}{5\sqrt{3}} . \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3} . \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{34\sqrt{2}}{45}$$

$$\mathfrak{R} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{8}{5 \cdot 3} \cdot -\frac{1}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot -\frac{5}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{135}$$

$$\mathfrak{r} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} - \frac{8}{5 \cdot 3} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} - \frac{1}{3\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{3}} = -\frac{98\sqrt{2}}{135}$$

und also $\mathfrak{Q}\,\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\,\mathfrak{R} = -\frac{712\sqrt{2}}{675}$, folglich

$$\mathfrak{A} = \frac{100}{712} = \frac{25}{178};\ \mathfrak{a} = \frac{540}{712} = \frac{135}{178}.$$

Die Partial-Brüche, worin der Bruch

$$\frac{1 + 2z + zz}{(1 - \frac{8}{5}z + zz)\,(1 + 2z + 3zz)}$$ aufgelöset werden

kann, sind demnach $\frac{9(17 - 5z) : 178}{1 - \frac{8}{5}z + zz} + \frac{5(5 + 27z) : 178}{1 + 2z + 3zz}$.

§. 204.

Es können aber die Werthe der Buchstaben $\mathfrak{R}$ und $\mathfrak{r}$ aus $\mathfrak{Q}$ und $\mathfrak{q}$ bestimmt werden. Denn da

$$\mathfrak{Q} = \alpha + \beta f.\ \cos.\ \phi + \gamma f^2.\ \cos.\ 2\phi + \delta f^3.\ \cos.\ 3\phi + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{q} = \quad \beta f.\ \sin.\ \phi + \gamma f^2.\ \sin.\ 2\phi + \delta f^3.\ \sin.\ 3\phi + \text{etc.}$$

ist: so wird

$$\mathfrak{Q}\cos.\phi - \mathfrak{q}.\sin.\phi = \alpha.\cos.\phi + \beta f.\cos.2\phi + \gamma f^2.\cos.3\phi + \text{etc.}$$

und also

$$\mathfrak{R} = f\,(\mathfrak{Q}.\ \cos.\ \phi - \mathfrak{q}.\ \sin.\ \phi)$$

Ferner ist

$$\mathfrak{Q}.\sin.\phi + \mathfrak{q}.\cos.\phi = \alpha.\sin.\phi + \beta f.\sin.2\phi + \gamma ff.\sin.3\phi + \text{etc.}$$

folglich

$$\mathfrak{r} = f\,(\mathfrak{Q}.\ \sin.\ \phi + \mathfrak{q}.\ \cos.\ \phi).$$

Hieraus fließt weiter

$$\mathfrak{Q}\mathfrak{r} - \mathfrak{q}\mathfrak{R} = (\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + \mathfrak{q}\mathfrak{q})\ f.\ \sin.\ \phi$$

$$\mathfrak{P}\mathfrak{r} - \mathfrak{p}\mathfrak{R} = (\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + \mathfrak{p}\mathfrak{q}) f.\ \sin.\ \phi + (\mathfrak{P}\mathfrak{q} - \mathfrak{p}\mathfrak{Q})\ f.\ \cos.\ \phi.$$

Folglich ist

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq}{\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq} + \frac{\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q}}{\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq} \cdot \frac{\cos. \phi}{\sin. \phi}$$

$$\mathfrak{a} = - \frac{\mathfrak{P}q + p\mathfrak{Q}}{(\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq)\, f.\, \sin. \phi}$$

Es entsteht also aus dem Faktor des Nenners $pp - 2pqz. \cos. \phi + qqzz$ dieser Partial-Bruch,

$$\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)\, f.\, \sin. \phi + (\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})\, (f.\, \cos. \phi - z)}{(pp - 2pqz. \cos. \phi + qqzz)\, (\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq)\, f.\, \sin. \phi}$$

oder, da $f = \frac{p}{q}$ ist, dieser:

$$\frac{(\mathfrak{P}\mathfrak{Q} + pq)\, p.\, \sin. \phi + (\mathfrak{P}q - p\mathfrak{Q})\, (p.\, \cos. \phi - qz)}{(pp - 2pqz. \cos. \phi + qqzz)\, (\mathfrak{Q}\mathfrak{Q} + qq)\, p.\, \sin. \phi}.$$

§. 205.

Dieser Partial-Bruch entspringt also aus dem Faktor $pp - 2pqz. \cos. \phi + qqzz$ des Nenners der Funktion $\frac{M}{(pp - 2pqz. \cos. \phi + qqzz)\, Z}$, und die Buchstaben $\mathfrak{P}$, p, $\mathfrak{Q}$ und q werden auf folgende Art aus den Funktionen M und Z gefunden. Dadurch daß man

$z^n = \frac{p^n}{q^n} . \cos. n\phi$ setzt, wird $M = \mathfrak{P}$

und $Z = \mathfrak{Q}$; und dadurch daß man

$z^n = \frac{p^n}{q^n} . \sin. n\phi$ setzt, wird $M = p$

und $Z = q$.

Es müssen aber die Funktionen M und Z vor dieser Substitution entwickelt werden, so daß sie diese Form erhalten,

$M = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ ꝛc.

und $Z = \alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 +$ ꝛc.

und dann wird

$\mathfrak{P}$

$$\mathfrak{P} = A + B.\frac{p}{q}.\cos.\varphi + C.\frac{p^2}{q^2}.\cos.2\varphi + D.\frac{p^3}{q^3}.\cos.3\varphi + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{p} = B.\frac{p}{q}.\sin.\varphi + C.\frac{p^2}{q^2}.\sin.2\varphi + D.\frac{p^3}{q^3}.\sin.3\varphi + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{Q} = \alpha + \beta.\frac{p}{q}.\cos.\varphi + \gamma.\frac{p^2}{q^2}.\cos.2\varphi + \delta.\frac{p^3}{q^3}.\cos.3\varphi + \text{etc.}$$

$$\mathfrak{q} = \beta.\frac{p}{q}.\sin.\varphi + \gamma.\frac{p^2}{q^2}.\sin.2\varphi + \delta.\frac{p^3}{q^3}.\sin.3\varphi + \text{etc.}$$

§. 206.

Es erhellet indeß aus dem Vorhergehenden, daß diese Auflösung nicht statt finden kann, wenn die Funktion Z eben denselben Faktor $pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz$ in sich enthält. Denn in diesem Falle würde Z in der Gleichung $M = \mathfrak{A}Z + aZz$, wenn man darin $z^n = f^n(\cos.n\varphi \pm \sqrt{-1}.\sin.n\varphi)$ setzte, verschwinden, und folglich nichts weiter geschlossen werden können. Wenn daher der Nenner der gebrochenen Funktion $\frac{M}{N}$ den Faktor $(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^2$ oder eine noch höhere Potestät enthält, so ist ein anderer besonderer Weg nöthig, um die Auflösung zu Stande zu bringen. Es sey also $N = (pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^2 Z$, und die Partial-Brüche, die aus dem Faktor $(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^2$ entspringen, seyen $\frac{\mathfrak{A} + az}{(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^2} + \frac{\mathfrak{B} + bz}{pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz}$, wo folglich die beständigen Größen $\mathfrak{A}$, a, $\mathfrak{B}$, b, zu bestimmen sind.

§. 207.

Dies vorausgesetzt, so muß der Ausdruck

$$\frac{M - (\mathfrak{A} + az)Z - (\mathfrak{B} + bz)Z(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)}{(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^2}$$

eine ganze Funktion, und also der Zähler durch den Nenner theilbar seyn. [§. 43.] Es ist also zuvörderst der Ausdruck $M - \mathfrak{A}Z - azZ$ durch $pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz$ theilbar. Da dies der vorhergehende Fall ist, so werden auch hier die Buchstaben $\mathfrak{A}$ und a eben so wie vorhin bestimmt. Wenn man daher

$z^n = \frac{p^n}{q^n}. \cos. n\varphi$ setzt, so wird $M = \mathfrak{P}$
und $Z = \mathfrak{N}$; und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}. \sin. n\varphi$ setzt, so wird $M = \mathfrak{p}$
und $Z = \mathfrak{n}$.

Ist nun dieses geschehen, so wird nach der §. 204 gegebenen Regel

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{N} + \mathfrak{p}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n} - \mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}. \frac{\cos. \varphi}{\sin. \varphi}, \text{ und}$$

$$a = -\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n} + \mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}. \frac{q}{p. \sin. \varphi}.$$

§. 208.

Hat man auf diese Art $\mathfrak{A}$ und a gefunden, so wird $\frac{M - (\mathfrak{A} + az)Z}{pp + 2pqz. \cos. \varphi + qqzz}$ eine ganze Funktion [§. 43] welche wir $= P$ setzen wollen. Nun muß ferner $P - \mathfrak{B}Z - bzZ$ durch $pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz$ theilbar seyn; und da dieser Ausdruck dem vorhergehenden ähnlich ist, so kann man, wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}. \cos. n\varphi$ setzt, $P = \mathfrak{R}$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}. \sin. n\varphi.$ setzt, $P = \mathfrak{r}$ nehmen, und dann ist

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N} + rn}{\mathfrak{N}^2 + n^2} + \frac{\mathfrak{R}n - r\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2} \cdot \frac{\text{cos.}\,\phi}{\text{sin.}\,\phi}, \text{ und}$$

$$\mathfrak{b} = -\frac{\mathfrak{R}n + r\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2} \cdot \frac{q}{p.\,\text{sin.}\,\phi}.$$

§. 209.

Hieraus läßt sich schon allgemein einsehen, wie man bey dieser Auflösung verfahren muß, wenn der Nenner der gegebenen Funktion $\frac{M}{N}$ den Faktor $(pp - 2pqz.\,\text{cos.}\,\phi + qqzz)^k$ hat. Denn es sey $N = (pp - 2pqz.\,\text{cos.}\,\phi + qqzz)^k Z$, so daß also dieser Bruch

$$\frac{M}{(pp - 2pqz.\,\text{cos.}\,\phi + qqzz)^k Z}$$

aufzulösen ist. Es gebe ferner der Faktor $(pp - 2pqz.\,\text{cos.}\,\phi + qqzz)^k$ die Partial-Brüche

$$\frac{\mathfrak{A} + az}{(pp - 2pqz.\text{cos.}\phi + qqzz)^k} + \frac{\mathfrak{B} + bz}{(pp - 2pqz.\,\text{cos.}\,\phi + qqzz)^{k-1}} +$$

$$\frac{\mathfrak{C} + cz}{(pp - 2pqz.\text{cos.}\phi + qqzz)^{k-2}} + \frac{\mathfrak{D} + dz}{(pp - 2pqz.\text{cos.}\,\phi + qqzz)^{k-3}} + \text{ꝛc.}$$

Setzt man nun, wenn man

$$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,\text{cos.}\,n\,\phi \text{ nimmt, } M = \mathfrak{M}$$

$$\text{und } Z = \mathfrak{N}, \text{ und, wenn man}$$

$$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,\text{sin.}\,n\,\phi \text{ nimmt, } M = m$$

$$\text{und } Z = n;$$

so wird

$$\mathfrak{A} = \frac{\mathfrak{M}\mathfrak{N} + mn}{\mathfrak{N}^2 + n^2} + \frac{\mathfrak{M}n - m\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2} \cdot \frac{\text{cos.}\,\phi}{\text{sin.}\,\phi}, \text{ und}$$

$$\mathfrak{a} = -\frac{\mathfrak{M}n + m\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + n^2} + \frac{q}{p.\,\text{sin.}\,\phi}.$$

Nun sey $\frac{M - (\mathfrak{A} + az)Z}{pp - 2pqz.\,\mathrm{cos}.\,\phi + qqzz} = P$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,\mathrm{cos}.\,n\phi$ setzt, $P = \mathfrak{P}$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,\mathrm{sin}.\,n\phi$ setzt, $P = \mathfrak{p}$;

so ist

$$\mathfrak{B} = \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{N} + \mathfrak{p}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n} - \mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}.\,\frac{\mathrm{cos}.\,\phi}{\mathrm{sin}.\,\phi},\ \text{und}$$

$$\mathfrak{b} = -\frac{\mathfrak{P}\mathfrak{n} + \mathfrak{p}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}.\,\frac{q}{p.\,\mathrm{sin}.\,\phi}.$$

Dann sey $\frac{P - (\mathfrak{B} + \mathfrak{b}z)Z}{pp - 2pqz.\,\mathrm{cos}.\,\phi + qqzz} = Q$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,\mathrm{cos}.\,n\phi$ setzt, $Q = \mathfrak{Q}$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,\mathrm{sin}.\,n\phi$ setzt, $Q = \mathfrak{q}$;

so ist

$$\mathfrak{C} = \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{N} + \mathfrak{q}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n} - \mathfrak{q}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}.\,\frac{\mathrm{cos}.\,\phi}{\mathrm{sin}.\,\phi},\ \text{und}$$

$$\mathfrak{c} = -\frac{\mathfrak{Q}\mathfrak{n} + \mathfrak{q}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}.\,\frac{q}{p.\,\mathrm{sin}.\,\phi}$$

Ferner sey $\frac{Q - (\mathfrak{C} + \mathfrak{c}z)Z}{pp - 2pqz.\,\mathrm{cos}.\,\phi + qqzz} = R$, und wenn man

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,\mathrm{cos}.\,n\phi$ setzt, $R = \mathfrak{R}$, wenn man aber

$z^n = \frac{p^n}{q^n}.\,\mathrm{sin}.\,n\phi$ setzt, $R = \mathfrak{r}$;

so ist

$$\mathfrak{D} = \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{N} + \mathfrak{r}\mathfrak{n}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2} + \frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n} - \mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}.\,\frac{\mathrm{cos}.\,\phi}{\mathrm{sin}.\,\phi}\ \text{und}$$

$$\mathfrak{d} = -\frac{\mathfrak{R}\mathfrak{n} + \mathfrak{r}\mathfrak{N}}{\mathfrak{N}^2 + \mathfrak{n}^2}.\,\frac{q}{p.\,\mathrm{sin}.\,\phi}.$$

Auf

Auf diese Art muß man nun fortgehen, bis man den Zähler des letzten Bruchs, dessen Nenner $pp - 2pqz. \cos. \varphi + qqzz$ ist, gefunden hat.

Exempel.

Es sey der Bruch $\frac{z - z^3}{(1 + zz)^4 + (1 + z^4)}$ gegeben, und die Partial-Brüche, welche aus dem Faktor des Nenners, $(1 + zz^4$, entstehen, seyen

$$\frac{\mathfrak{A} + az}{(1 + zz)^4} + \frac{\mathfrak{B} + bz}{(1 + zz)^3} + \frac{\mathfrak{C} + cz}{(1 + zz)^2} + \frac{\mathfrak{D} + dz}{1 + zz}.$$

Vergleicht man nun, so wird $p = 1$; $q = 1$; $\cos. \varphi = 0$, und also $\varphi = \frac{1}{2}\pi$. Ferner ist $M = z - z^3$, und $Z = 1 + z^4$. Hieraus ergiebt sich $\mathfrak{M} = 0$; $m = 2$; $\mathfrak{N} = 2$; $n = 0$; und $\sin. \varphi = 1$; und es wird folglich

$$\mathfrak{A} = -\tfrac{4}{4}.0 = 0; \text{ und } a = 1.$$

Nunmehr ist also $\mathfrak{A} + az = z$; und daher wird denn $P = \frac{z - z^3 - z - z^5}{1 + zz} = -z^3$, und $\mathfrak{P} = 0$, $p = 1$. Hieraus erhält man

$$\mathfrak{B} = 0; \text{ und } b = \tfrac{1}{2}.$$

Folglich ist $\mathfrak{B} + bz = \frac{1}{2}z$; und $Q = \frac{-z^3 - \frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^5}{1 + zz} = -\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3$. Hieraus wird $\mathfrak{Q} = 0$, und $q = 0$; folglich

$$\mathfrak{C} = 0; \text{ und } c = 0$$

Endlich ist nun $R = -\frac{\frac{1}{2}z - \frac{1}{2}z^3}{1 + zz} = -\frac{1}{2}z$, woraus $\mathfrak{R} = 0$; und $r = -\frac{1}{2}$ folgt, so daß also

$\mathfrak{D} = 0$, und $d = -\frac{1}{4}$ wird. Es sind also die gesuchten Brüche $\frac{z}{(1 + zz)^4} + \frac{z}{2(1 + zz)^3} - \frac{z}{4(1 + zz)}$. Der

Zähler

Zähler des übrigen Bruches aber ist $= S = \frac{R - (\mathfrak{D} + \mathfrak{d}z)Z}{1 + zz}$

$= -\frac{1}{4}z + \frac{1}{4}z^3$, und er selbst wird also $= \frac{-z + z^3}{4(1 + z^4)}$ seyn.

§. 210.

Auf diese Weise findet man daher zugleich den Bruch des Complements, welcher, mit den gefundenen Brüchen zusammengenommen, die gegebene gebrochene Funktion hervorbringt. Hat man nemlich von dem Bruche

$$\frac{M}{(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^k Z}$$

alle Partial-Brüche gefunden, die aus dem Faktor $(pp - 2pqz.\cos.\varphi + qqzz)^k$ entspringen, so ist, wenn man die Reihe der Werthe P, Q, R, S, T, welche man zur Findung jener Partial-Brüche suchen mußte, weiter fortsetzt, derjenige von den Werthen P, Q, R, S, T, welcher dem letzten, den man zur Findung der Zähler nöthig hatte, folgt, der Zähler des übrigen Bruchs mit dem Nenner Z. Ist nemlich $k = 1$, so ist der übrige Bruch $\frac{P}{Z}$; ist $k = 2$, so ist derselbe $\frac{Q}{Z}$; ist $k = 3$; so ist er $\frac{R}{Z}$ u. s. w. Hat man aber diesen übrigen Bruch, dessen Nenner Z ist, gefunden, so kann man ihn vermittelst der bisherigen Regeln weiter auflösen.

Drey-