Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Dreyzehnten Capitel. Von den wiederkehrenden Reihen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53541

Dreyzehntes Capitel.

Von den wiederkehrenden Reihen.

§. 211.

Zu diesen Reihen, welche Moivre wiederkehrende zu nennen pflegt, wollen wir hier alle die Reihen rechnen, die durch die Entwickelung einer jeden gebrochenen Funktion durch eine wirkliche Division entstehen. Es ist bereits [Cap. 4.] von denselben gezeigt worden, daß ein jedes ihrer Glieder aus einigen vorhergehenden nach einem beständigen Gesetze, welches von dem Nenner der gebrochenen Funktion abhängt, bestimmt wird. Da nun [in dem vorhergehenden und dem zweyten Capitel von §. 39. an] gezeigt worden ist, wie man jede gebrochene Funktion in andere einfachere auflöset: so können dadurch auch die wiederkehrenden Reihen in andere einfachere aufgelöset werden. Die Art und Weise, wie dieses geschehen kann, soll in dem gegenwärtigen Capitel erklärt werden.

§. 212.

Es sey die ächte gebrochene Funktion

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{2c.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{2c.}}$$

gegeben, und die wiederkehrende Reihe, worin dieselbe durch die Division verwandelt wird, sey

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{2c.}$$

so ist aus dem vierten Capitel bekannt, nach was für einem

Gesetze

Gesetze die Coefficienten A, B, C, D, E, F ꝛc. fortschreiten. Wird nun die gegebene Funktion in die einfachen Brüche, woraus sie besteht, aufgelöset, und ein jeder dieser Brüche in eine wiederkehrende Reihe verwandelt: so ist offenbar, daß die Summe aller dieser Reihen, die aus den Partial-Brüchen entstanden sind, der Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 +$ ꝛc. gleich seyn muß. Es geben aber die Partial-Brüche, welche zu finden das vorhergehende und das zweyte Capitel eine vollständige Anweisung enthält, Partial-Reihen, deren Natur man, weil sie so einfach sind, leicht erkennt; und da die Summe aller dieser Partial-Reihen der Total-Reihe gleich ist, so kann man sich dadurch auch den Weg zu einer vollständigen Kenntniß von dieser erleichtern.

§. 213.

Es seyen also die wiederkehrenden Reihen, die aus den Partial-Brüchen entstehen, folgende:

$$a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + fz^5 + \text{ꝛc.}$$
$$a' + b'z + c'z^2 + d'z^3 + e'z^4 + f'z^5 + \text{ꝛc.}$$
$$a'' + b''z + c''z^2 + d''z^3 + e''z^4 + f''z^5 + \text{ꝛc.}$$
$$a''' + b'''z + c'''z^2 + d'''z^3 + e'''z^4 + f'''z^5 + \text{ꝛc.}$$

u. s. w.

Da nun diese Reihen zusammengenommen der Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{ꝛc.}$$

gleich seyn müssen, so muß auch nothwendiger Weise

$$A = a + a' + a'' + a''' + \text{ꝛc.}$$
$$B = b + b' + b'' + b''' + \text{ꝛc.}$$
$$C = c + c' + c'' + c''' + \text{ꝛc.}$$
$$D = d + d' + d'' + d''' + \text{ꝛc.}$$

u. s. w.

seyn. Kann man daher in jeder der aus den Partial-Brüchen

chen entstandenen Reihen den Coefficienten der Potestät z^n bestimmen, so findet man in der Summe aller dieser Coefficienten den Coefficienten eben dieser Potestät z^n in der wiederkehrenden Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 +$ rc.

§. 214.

Sollte hier etwa der Zweifel entstehen: Ob auch daraus, daß folgende zwey Reihen gleich sind,

$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ rc. $= \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 +$ rc.

folge, daß $A = \mathfrak{A}$, $B = \mathfrak{B}$, $C = \mathfrak{C}$, $D = \mathfrak{D}$, u. s. f., oder daß die Coefficienten von einerley Potestäten immer einander gleich seyen? so darf man nur überlegen, daß die Gleichheit jener Reihen statt finden muß, was auch die veränderliche Größe z für einen Werth erhält. Man setze also $z = 0$, und dann fällt in die Augen, daß $A = \mathfrak{A}$ ist. Zieht man nun diese gleichen Größen auf beyden Seiten ab, und dividirt überdies die übrig bleibende Gleichung durch z, so bekömmt man $B + Cz + Dz^2 +$ rc. $= \mathfrak{B} + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D}z^2 +$ rc. und daraus folgt $B = \mathfrak{B}$. Auf eine ähnliche Art läßt sich aber auch zeigen, daß $C = \mathfrak{C}$, $D = \mathfrak{D}$, rc. ist.

§. 215.

Wir wollen also die Reihen betrachten, die aus den Partial-Brüchen einer gegebenen gebrochenen Funktion entstehen. Hier ist zuvörderst bekannt, daß der Bruch $\frac{\mathfrak{A}}{1 - pz}$ diese Reihe giebt: $\mathfrak{A} + \mathfrak{A}pz + \mathfrak{A}p^2z^2 + \mathfrak{A}p^3z^3 +$ rc., deren allgemeines Glied $= \mathfrak{A}p^nz^n$ ist. Man nennt nemlich dergleichen Ausdruck ein allgemeines Glied, weil man daraus, wenn man für n nach und nach alle Zahlen setzt, alle Glieder der Reihe erhält. Ferner giebt der Bruch $\frac{\mathfrak{A}}{(1 - pz)^2}$

diese

diese Reihe: $\mathfrak{A} + 2\mathfrak{A}pz + 3\mathfrak{A}p^2z^2 + 4\mathfrak{A}p^3z^3 +$ ꝛc., deren allgemeines Glied $= (n+1)\mathfrak{A}p^nz^n$ ist. Eben so bekommt man aus dem Bruche $\frac{A}{(1-pz)^3}$ die Reihe: $\mathfrak{A} + 3\mathfrak{A}pz + 6\mathfrak{A}p^2z^2 + 10\mathfrak{A}p^3z^3 +$ ꝛc. deren allgemeines Glied $= \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}\mathfrak{A}p^nz^n$ ist. Ueberhaupt aber giebt der Bruch $\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^k}$ diese Reihe: $\mathfrak{A} + k\mathfrak{A}pz + \frac{k(k+1)}{1 \cdot 2}\mathfrak{A}p^2z^2 + \frac{k(k+1)(k+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}\mathfrak{A}p^3z^3 +$ ꝛc. deren allgemeines Glied $= \frac{(n+1)(n+2) \ldots\ldots (n+k-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots (k-1)}\mathfrak{A}p^nz^n$ ist. Wenn man die Reihe fortsetzt, und das allgemeine Glied aus ihr selbst nimmt, so findet man solches $=$

$$\frac{k(k+1)(k+2) \ldots\ldots\ldots (k+n-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots\ldots\ldots n}\mathfrak{A}p^nz^n;$$

es ist aber dieser Ausdruck dem vorhergehenden gleich, so wie solches in die Augen fällt, wenn man überzwerg multiplicirt. Denn es wird alsdann $1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots n \cdot (n+1) \ldots (n+k-1) = 1 \cdot 2 \cdot 3 \ldots (k-1)\, k \ldots (k+n-1)$ welches eine identische Gleichung ist.

§. 216.

So oft man daher bey der Auflösung der gebrochenen Funktionen auf Partial-Brüche von der Form $\frac{\mathfrak{A}}{(1-pz)^k}$ kommt, so oft kann man auch das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihe, die aus der gegebenen gebrochenen Funktion entsteht, oder der Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ ꝛc. angeben; denn es ist dasselbe die Summe der allgemeinen Glieder der Reihen, die sich aus den Partial-Brüchen ergeben.

Erstes

Erstes Exempel.

Das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihe zu finden, die aus dem Bruche $\frac{1-z}{1-z-2zz}$ entspringt.

Die Reihe, die aus diesem Bruche entsteht, ist $1+0z+2zz+2z^3+6z^4+10z^5+22z^6+42z^7+86z^8+$ ꝛc. Um den Coefficienten der allgemeinen Potestät z^n zu finden löse man den Bruch $\frac{1-z}{1-z-2zz}$ in $\frac{\frac{2}{3}}{1+z}+\frac{\frac{1}{3}}{1-2z}$ auf. Daraus erhält man das gesuchte allgemeine Glied $= (\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{3}.2^n)z^n = \frac{2^n \pm 2}{3}z^n$, wo das Zeichen $+$ gilt, wenn n eine gerade, und das Zeichen $-$, wenn n eine ungerade Zahl ist.

Zweytes Exempel.

Das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihe zu finden, die aus dem Bruche $\frac{1-z}{1-5z+6zz}$ entspringt, und welche $1+4z+14z^2+46z^3+146z^4+454z^5+$ ꝛc. ist.

Da der Nenner des gegebenen Bruchs $=(1-2z)(1-3z)$ ist, so zerfällt der Bruch in die beyden Partial-Brüche $\frac{-1}{1-2z}+\frac{2}{1-3z}$; und daraus erhält man zum allgemeinen Nenner $2.3^nz^n - 2^nz^n = (2.3^n-2^n)z^n$.

Drittes Exempel.

Das allgemeine Glied der Reihe $1+3z+4z^2+7z^3+11z^4+18z^5+29z^6+47z^7+$ ꝛc., welche aus dem Bruche $\frac{1+2z}{1-z-zz}$ entspringt, zu finden.

Da die Faktoren des Nenners $1 - (\frac{1+\sqrt{5}}{2})z$ und $1 - (\frac{1-\sqrt{5}}{2})z$ sind, so bekommt man, wenn man den gegebenen Bruch auflöset,

$$\frac{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}{1-(\frac{1+\sqrt{5}}{2})z} + \frac{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}{1-(\frac{1-\sqrt{5}}{2})z};$$

und es ist daher das gesuchte allgemeine Glied

$$= (\frac{1+\sqrt{5}}{2})^{n+1} z^n + (\frac{1-\sqrt{5}}{2})^{n+1} z^n.$$

Viertes Exempel.

Das allgemeine Glied der Reihe
$a + (\alpha a + b)z + (\alpha^2 a + \alpha b + \beta a)z^2 + (\alpha^3 a + \alpha^2 b + 2\alpha\beta a + \beta b)z^3 +$ rc., welche sich aus dem entwickelten Bruche $\frac{a+bz}{1-\alpha z-\beta zz}$ ergiebt, zu finden.

Durch die Auflösung des gegebenen Bruchs bekommt man diese beyden Partial-Brüche:

$$\frac{(a(\alpha + \sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}) + 2b) : 2\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{1 - (\frac{\alpha + \sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{2})z} + \frac{(a(\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)} - \alpha) - 2b) : 2\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{1 - (\frac{\alpha - \sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{2})z}.$$

Folglich ist das allgemeine Glied

$$\frac{a(\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)} + \alpha) + 2b}{2\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}(\frac{\alpha + \sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{2})^n z^n + \frac{a(\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)} - \alpha) - 2b}{2\sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}(\frac{\alpha - \sqrt{(\alpha\alpha + 4\beta)}}{2})^n z^n;$$

und hieraus lassen sich die allgemeinen Glieder aller wiederkehrenden Reihen, worin jedes Glied durch die beyden vorhergehenden bestimmt wird, leicht finden.

Fünftes Exempel.

Das allgemeine Glied der Reihe $1 + z + 2z^2 + 2z^3 + 3z^4 + 3z^5 + 4z^6 + 4z^7 +$ ꝛc., welche aus dem Bruche $\frac{1}{1 - z - zz + z^3} = \frac{1}{(1 - z)^2 (1 + z)}$ entspringt, zu finden.

Hier ist zwar das Gesetz, nach welchem die Reihe fortschreitet, so offenbar, daß es beym ersten Anblick in die Augen fällt. Da indeß $\frac{1}{(1 - z)^2 (1 + z)} = \frac{\frac{1}{2}}{(1 - z)^2} + \frac{\frac{1}{4}}{1 - z} + \frac{\frac{1}{4}}{1 + z}$ ist: so erhält man daher das allgemeine Glied $\frac{1}{2}(n + 1)z^n + \frac{1}{4}z^n + \frac{1}{4}(-1)^n z^n = \frac{2n + 3 \pm 1}{4} z^n$, wo das obere Zeichen genommen werden muß, wenn n eine gerade, und das untere, wenn n eine ungerade Zahl ist.

§. 217.

Auf diese Art kann man die allgemeinen Glieder aller wiederkehrenden Reihen finden, weil man alle Brüche in dergleichen einfache Partial-Brüche auflösen kann. Will man indeß die imaginären Ausdrücke vermeiden, so wird man öfters auf Partial-Brüche von dieser Form kommen: $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{1 - 2pz.\ \cos.\ \varphi + ppzz}$; $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1 - 2pz.\ \cos.\ \varphi + ppzz)^2}$; $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1 - 2pz.\ \cos.\ \varphi + ppzz)^k}$; und wir müssen daher untersuchen, was aus ihrer Entwickelung für Reihen entstehen.

Zuvörderst giebt nun zwar der Bruch $\frac{\mathfrak{A}}{1 - 2pz.\ \cos.\ \varphi + ppzz}$, wenn man denselben entwickelt, weil $\cos. n\varphi = 2\cos.\varphi . \cos.(n-1)\varphi - \cos.(n-2)\varphi$ (* ist,

$$\begin{array}{llll}
\mathfrak{A} + 2\mathfrak{A}pz.\cos.\varphi & + 2\mathfrak{A}p^2z^2.\cos.2\varphi & + 2\mathfrak{A}p^3z^3.\cos.3\varphi & \\
 & + \mathfrak{A}p^2z^2 & + 2\mathfrak{A}p^3z^3.\cos.\varphi & \\
 & & + 2\mathfrak{A}p^4z^4.\cos.4\varphi & \\
 & & + 2\mathfrak{A}p^4z^4\cos.2\varphi & \text{etc. (**} \\
 & & + \mathfrak{A}p^4z^4 &
\end{array}$$

aber das allgemeine Glied dieser Reihe ist nicht so leicht zu entdecken.

*) Aus diesem in der Anmerkung zum 129sten §. bewiesenen Satze folgt, daß

$$2\cos.\varphi\cos.(n-1)\varphi = \cos.n\varphi + \cos.(n-2)\varphi,$$

so wie aus den speciellen Sätzen, aus welchen er abgeleitet worden, daß

$$\begin{aligned}
2\cos.\varphi.\cos.\varphi &= \cos.2\varphi + 1 \\
2\cos.\varphi.\cos.2\varphi &= \cos.3\varphi + \cos.\varphi \\
2\cos.\varphi.\cos.3\varphi &= \cos.4\varphi + \cos.2\varphi \\
2\cos.\varphi.\cos.4\varphi + &= \cos.5\varphi + \cos.3\varphi
\end{aligned}$$

u. s. w.

ist, und in dieser Gestalt werden diese Bestimmungen hier eigentlich gebraucht.

**) Aus der Vergleichung des Bruchs $\frac{\mathfrak{A}}{1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz}$ mit dem Bruche $\frac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$ §. 61. wird, $a = \mathfrak{A}$, $b = 0$, $\alpha = \gamma = 1$, $\beta = -2\cos.\varphi$, und folglich $R = 2\cos.\varphi.Q - P$, wenn P, Q und R auch hier die ihnen §. 61. beygelegte Bedeutung behalten. Setzt man daher

$$\frac{\mathfrak{A}}{1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz} = A + Bpz + Cp^2z^2 +$$

Dp^3z^3 etc. und gebraucht man zugleich die in der vorhergehenden Anmerkung enthaltenen Bestimmungen, so wird

𝔄

$$A = \mathfrak{A}$$

$$B = 2A.\cos.\phi = 2\mathfrak{A}.\cos.\phi$$

$$C = 2B.\cos\phi - A = 2\mathfrak{A}.2.\cos.\phi.\cos.\phi - \mathfrak{A} =$$
$$2\mathfrak{A}.\cos.2\phi + \mathfrak{A}$$

$$D = 2C.\cos.\phi - B = 2\mathfrak{A}.2\cos.\phi.\cos.2\phi =$$
$$2\mathfrak{A}.\cos.3\phi + 2\mathfrak{A}.\cos.\phi$$

$$E = 2D.\cos.\phi - C = 2\mathfrak{A}.2\cos.\phi.\cos.3\phi + \mathfrak{A} =$$
$$2\mathfrak{A}.\cos.4\phi + 2.\mathfrak{A}.\cos.2\phi + \mathfrak{A}$$

u. s. w.

und also die angenommene Reihe der vom V. im §. mitgetheilten gleich.

§. 218.

Wir wollen also, um zu unserm Zwecke zu gelangen, diese beyden Reihen betrachten

$$Ppz.\sin.\phi + Pp^2z^2.\sin.2\phi + Pp^3z^3.\sin.3\phi + Pp^4z^4.\sin.4\phi + \text{etc.}$$
$$Q + Qpz\cos.\phi + Qp^2z^2.\cos.2\phi + Qp^3z^3\cos.3\phi + Qp^4z^4.\cos.4\phi + \text{etc.}$$

welches ebenfalls zwey Reihen sind, die man aus Brüchen, deren Nenner $1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz$ ist, durch die Entwickelung erhalten kann. Die erste Reihe nemlich entspringt aus dem Bruche $\frac{Ppz.\sin.\phi}{1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz}$ *), und die andere aus diesem, $\frac{Q - Qpz.\cos.\phi}{1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz}$ **). Addirt man daher diese beyden Brüche, so giebt ihre Summe $\frac{Q + Ppz.\sin.\phi - Qpz.\cos.\phi}{1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz}$, eine Reihe, deren allgemeines Glied $= (P\sin.n\phi + Q\cos.n\phi)p^nz^n$ ist; und setzt man den Bruch $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz}$ der gedachten Summe gleich, so wird $Q = \mathfrak{A}$, und $P = \mathfrak{A}.\cot.\phi + \mathfrak{B}.\operatorname{cosec}.\phi$ ***). Folglich ist das allgemeine Glied der

Reihe, die aus dem Bruche $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{1 - 2pz.\ \cos.\ \varphi + ppzz}$ entspringt =

$$\frac{\mathfrak{A}.\ \cos.\ \varphi.\ \sin.\ n\varphi + \mathfrak{B}.\ \sin.\ n\varphi. + \mathfrak{A}.\ \sin.\ \varphi \cos.\ n\varphi}{\sin.\ \varphi} \text{****)}\ p^n z^n =$$

$$\frac{\mathfrak{A}\ \sin.\ (n+1)\ \varphi + \mathfrak{B}\ \sin.\ n\ \varphi}{\sin.\ \varphi}\ p^n z^n. \text{*****)}$$

*) Es ist in der Anmerkung zum 129sten §. bewiesen worden, daß

$$\sin.\ n\ \varphi = 2 \cos.\ \varphi.\ \sin.\ (n-1)\ \varphi - \sin.\ (n-2)\varphi$$

ist. Setzt man daher

$$\frac{Ppz.\ \sin.\ \varphi}{1 - 2pz.\ \cos.\ \varphi + ppzz} = A + Bpz + Cp^2z^2 + Dp^3z^3 + Ep^4z^4 + \text{ꝛc.}$$

so wird, §. 61.

$A = 0$

$B = P \sin.\ \varphi$

$C = 2B.\ \cos.\ \varphi = 2P.\cos.\ \varphi \sin.\ \varphi = P.\ \sin.\ 2\varphi$

$D = 2C.\ \cos.\ \varphi - B = P\ (2 \cos.\ \varphi.\ \sin.\ 2\ \varphi - \sin.\ \varphi)$
$= P.\ \sin.\ 3\ \varphi$

$E = 2D.\ \cos.\ \varphi - C = P\ (2 \cos.\ \varphi\ \sin.\ 3\ \varphi - \sin.\ 2\ \varphi)$
$= P.\ \sin.\ 4\ \varphi$

u. s. w.

und also $A + Bpz + Cp^2z^2 + Dp^3z^3 + Ep^4z^4 +$ ꝛc.
$= Ppz.\ \sin.\ \varphi + Pp^2z^2.\ \sin.\ 2\ \varphi + Pp^3z^3.\ \sin.\ 3\varphi + Pp^4z^4.\ \sin.\ 4\ \varphi$ ꝛc.

**) Da $\cos\ n\ \varphi = 2 \cos.\ \varphi\ \cos.\ (n-1)\ \varphi - \cos.\ (n-2)\ \varphi$ ist, §. 129, so wird, wenn man

$$\frac{Q - Qpz.\ \cos.\ \varphi}{1 - pz.\cos.\ \varphi + ppzz} = A + Bpz + Cp^2z^2 + Dp^3z^3 + Ep^4z^4 + \text{ꝛc.}$$

setzt, und A, B, C, D, E ꝛc. wieder nach §. 61. bestimmt,

$A = Q,$
$B = - Q.\cos.\varphi + 2Q.\cos.\varphi = Q.\cos.\varphi$
$C = 2B.\cos.\varphi - A = Q(2\cos.\varphi.\cos.\varphi - 1) = Q.\cos.2\varphi$
$D = 2C.\cos.\varphi - B = Q(2\cos.\varphi.\cos.2\varphi - \cos.\varphi)$
$= Q.\cos.3\varphi$
$E = 2D.\cos.\varphi - C = Q(2\cos.\varphi.\cos.3\varphi - \cos.2\varphi)$
$= Q.\cos.4\varphi$
u. s. w.

und folglich $A + Bpz + Cp^2z^2 + Dp^3z^3 + Ep^4z^4 +$ ꝛc.
$= Q + Qpz.\cos.\varphi + Qp^2z^2.\cos.2\varphi + Qp^3z^3 \times \cos.3\varphi + Qp^4z^4.\cos.4\varphi +$ ꝛc.

***) Aus $\mathfrak{B} = P.\sin.\varphi - Q.\cos.\varphi$ folgt nemlich $P = \frac{\mathfrak{B}}{\sin.\varphi} + \frac{Q.\cos.\varphi}{\sin.\varphi}$, und hieraus $P = \mathfrak{A}.\cot.\varphi + \mathfrak{B}.\mathrm{cosec}.\varphi$, weil $Q = \mathfrak{A}$; $\frac{\cos.\varphi}{\sin.\varphi} = \cot.\varphi$, und $\frac{1}{\sin.\varphi} = \mathrm{cosec}.\varphi$ ist.

****) Man findet diesen Ausdruck aus $(P.\sin.n\varphi + Q.\cos.n\varphi)p^nz^n$, wenn man für P und Q die gefundenen Werthe setzt, jedes Glied durch $\sin.\varphi$ multiplicirt und dividirt, und $\cos.\varphi$ für $\sin.\varphi.\cot.\varphi$, und 1 für $\sin.\varphi.\mathrm{cosec}.\varphi$ schreibt.

*****) Weil $\cos.\varphi.\sin.n\varphi + \sin.\varphi\cos.n\varphi = \sin.(n+1)\varphi$ ist, §. 128.

§. 219.

Wenn der Nenner des gegebenen Bruchs eine Potestät oder $(1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz)^k$ ist, so erleichtert man sich die Findung des allgemeinen Gliedes, wenn man den Bruch in folgende zwey obgleich imaginäre Partial-Brüche

$$\frac{a}{(1-(\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz)^k} + \frac{b}{(1-(\cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz)^k}\,*)$$

auflöset. Das allgemeine Glied der Reihe, die aus diesen beyden Brüchen zusammengenommen entsteht, ist

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(k-1)}(\cos. n\,\varphi+\sqrt{-1}.\sin. n\,\varphi)ap^nz^n +$$

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(k-1)}(\cos. n\varphi-\sqrt{-1}.\sin. n\,\varphi)bp^nz^n.$$

[§. 215 und 133.]

Setzt man daher $a+b=f$, und $a-b=\frac{g}{\sqrt{-1}}$, so daß $a=\frac{f\sqrt{-1}+g}{2\sqrt{-1}}$ und $b=\frac{f\sqrt{-1}-g}{2\sqrt{-1}}$ wird, so ist der Ausdruck

$$\frac{(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+k-1)}{1\,.\,2\,.\,3\,\ldots\,(k-1)}(f.\cos. n\,\varphi+g.\sin. n\varphi)p^nz^n$$

das allgemeine Glied der Reihe, welche aus diesen Brüchen

$$\frac{\frac{1}{2}f+\frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{(1-(\cos.\varphi+\sqrt{-1}.\sin\,\varphi)pz)^k}+\frac{\frac{1}{2}f-\frac{1}{2\sqrt{-1}}g}{(1-(\cos.\varphi-\sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz)^k}$$

oder aus diesem einzigen Bruche

$$\left.\begin{array}{l} f-kfpz.\cos.\varphi+\frac{k(k-1)}{1.2}f.p^2z^2.\cos.2\,\varphi \\ +kgpz.\sin.\varphi-\frac{k(k-1)}{1.2}gp^2z^2.\sin.2\,\varphi \\ -\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}fp^3z^3.\cos.3\,\varphi\text{ ꝛc.} \\ +\frac{k(k-1)(k-2)}{1.2.3}gp^3z^3.\sin.3\,\varphi\text{ ꝛc.} \end{array}\right\} : \left\{(1-2pz.\cos.\varphi+ppzz)^k\right.$$

entsteht.

*) Es ist nemlich $(1-(\cos.\varphi+\sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz)^k\times(1-(\cos.\varphi-\sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz)^k=((1-(\cos.\varphi+\sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz)(1-(\cos.\varphi-\sqrt{-1}.\sin.\varphi)pz))^k=1-2pz.\cos.\varphi+ppzz)^k.$

§. 220.

§. 220.

Setzt man also $k = 2$, so ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche

$$\frac{f - 2pz(f.\cos.\varphi - g.\sin.\varphi) + ppzz.(f.\cos.2\varphi - g.\sin.2\varphi)}{(1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz)^2}$$

entspringt, $= (n+1)(f.\cos.n\varphi + g.\sin.n\varphi)p^n z^n$. Nun ist das allgemeine Glied der Reihe, welche der Bruch

$$\frac{a}{1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz}, = \text{oder} \ \frac{a - 2apz.\cos.\varphi + appzz}{(1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz)^2}$$

giebt, $= \frac{a.\sin.(n+1)\varphi}{\sin.\varphi} p^n z^n$ [§. 218, indem $B = 0$ ist]. Addirt man also diese beyden Brüche, und setzt darauf $a + f = \mathfrak{A}$; $2a.\cos.\varphi + 2f.\cos.\varphi - 2g.\sin.\varphi = -\mathfrak{B}$; und $a + f.\cos.2\varphi - g.\sin.2\varphi = 0$: so wird $g = \frac{\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}.\cos.\varphi}{2\sin.\varphi}$ *); $a = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}.\cos.\varphi}{1 - \cos.2\varphi} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos.\varphi}{2(\sin.\varphi)^2}$ **); $f = -\frac{\mathfrak{A}.\cos.2\varphi - \mathfrak{B}.\cos.\varphi}{2(\sin.\varphi)^2}$ ***); und $g = \frac{\mathfrak{B}\sin.\varphi + \mathfrak{A}\sin.2\varphi}{2\,\sin.\varphi)^2}$. Es ist daher das allgemeine Glied der Reihe, die aus dem Bruche $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz)^2}$ entspringt,

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos.\varphi}{2(\sin.\varphi)^3}.\sin.(n+1)\varphi.p^n z^n + (n+1)$$

$$\frac{\mathfrak{B}\sin.\varphi.\sin.n\varphi + \mathfrak{A}\sin.2\varphi.\sin.n\varphi}{2(\sin.\varphi)^2} p^n z^n + (n+1)$$

$$\frac{-\mathfrak{B}\cos.\varphi.\cos.n\varphi - \mathfrak{A}\cos.2\varphi.\cos.n\varphi}{2(\sin.\varphi)^2}) p^n z^n =$$

$$-\frac{(n+1)(\mathfrak{A}\cos.(n+2)\varphi + \mathfrak{B}\cos.(n+1)\varphi)}{2(\sin.\varphi)^2} p^n z^n +$$

$$\frac{(\mathfrak{A} + \mathfrak{B}\cos.\varphi)\sin.(n+1)\varphi}{2(\sin.\varphi)^3} p^n z^n \text{****})$$

 =

$$= \frac{(\tfrac{1}{2}(n+3)\,\text{sin.}(n+1)\varphi - \tfrac{1}{2}(n+1)\,\text{sin.}(n+3)\varphi)}{2(\text{sin.}\ \varphi)^3}\,\mathfrak{A}p^n z^n\ *****) +$$

$$\frac{(\tfrac{1}{2}(n+2)\,\text{sin.}\ n\varphi - \tfrac{1}{2}\,n\,\text{sin.}\ (n+2)\varphi)}{2(\text{sin.}\ \varphi)^3}\,\mathfrak{B}p^n z^n\ ******);$$ oder

endlich

$$= \frac{(n+3)\,\text{sin.}\ (n+1)\varphi - (n+1)\,\text{sin.}\ (n+3)\varphi}{4(\text{sin.}\ \varphi)^3}\,\mathfrak{A}p^n z^n +$$

$$\frac{(n+2)\,\text{sin.}\ n\varphi - n.\ \text{sin.}\ (n+2)\varphi}{4(\text{sin.}\ \varphi)^3}\,\mathfrak{B}p^n z^n.$$

*) Setzt man $\mathfrak{A} = a + f$ in $2a.\text{cos.}\varphi + 2f.\text{cos.}\varphi - 2g.\text{sin.}\varphi = -\mathfrak{B}$, so wird $2\mathfrak{A}.\text{cos.}\varphi - 2g.\text{sin.}\varphi = -\mathfrak{B}$, und also $g = \frac{\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}.\ \text{cos.}\varphi}{2\,\text{sin.}\ \varphi}$.

**) Aus $f = \mathfrak{A} - a$, $g = \frac{\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}.\ \text{cos.}\varphi}{2\,\text{sin.}\ \varphi}$, und $a + f.\text{cos.}2\varphi - g.\ \text{sin.}2\varphi = 0$ fließt, wenn man die Werthe von f und g in die letzte Gleichung bringt, $a + \mathfrak{A}.\ \text{cos.}\ 2\varphi - a.\ \text{cos.}\ 2\varphi - \frac{(\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}.\ \text{cos.}\varphi)\,\text{sin.}\ 2\varphi}{2\,\text{sin.}\ \varphi} = 0$, oder $a\,(1 - \text{cos.}\ 2\varphi) =$
$$\frac{2\mathfrak{A}.\ \text{sin.}\ 2\varphi.\ \text{cos.}\ \varphi - 2\mathfrak{A}.\ \text{cos.}\ 2\varphi.\ \text{sin.}\ \varphi + \mathfrak{B}.\ \text{sin.}\ 2\varphi}{2\,\text{sin.}\ \varphi}$$
$$= \frac{2\mathfrak{A}.\ \text{sin.}\ \varphi + \mathfrak{B}.\ \text{sin.}\ 2\varphi}{2\,\text{sin.}\ \varphi} = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}.\ \text{cos.}\ \varphi,$$ weil $\text{sin.}\ 2\varphi \times \text{cos.}\ \varphi - \text{cos.}\ 2\varphi.\ \text{sin.}\ \varphi = \text{sin.}\ (2-1)\varphi = \text{sin.}\ \varphi$, §. 128, und $\frac{\text{sin.}\ 2\varphi}{2\,\text{sin.}\ \varphi} = \text{cos.}\ \varphi$ ist, welche letztere Bestimmung aus $\text{sin.}\ 2\varphi = 2\,\text{cos.}\ \varphi.\ \text{sin.}\ \varphi$. §. 129. Anmerk. folgt. Folglich wird
$$a = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}.\ \text{cos.}\ \varphi}{1 - \text{cos.}\ 2\varphi} = \frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}.\ \text{cos.}\ \varphi}{2(\text{sin.}\ \varphi)^2},$$ §. 130, Anmerk.

***) Setzt man $a = \mathfrak{A} - f$, und $g = \frac{\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}.\ \text{cos.}\ \varphi}{2\,\text{sin.}\ \varphi}$

in

in die Gleichung $a + f. \cos. 2\phi - g. \sin. 2\phi = 0$, so wird

$$\mathfrak{A} - f + f. \cos. 2\phi - \frac{(\mathfrak{B} + 2\mathfrak{A}. \cos.\phi) \sin. 2\phi}{2 \sin. \phi} = 0;$$

folglich $f(1 - \cos. 2\phi) = \mathfrak{A} - \mathfrak{B}. \cos. \phi - \mathfrak{A}. 2(\cos.\phi)^2$
$= \mathfrak{A} - \mathfrak{B}. \cos. \phi - \mathfrak{A} - \mathfrak{A}. \cos. 2\phi = - \mathfrak{A}. \cos. 2\phi$
$- \mathfrak{B}. \cos. \phi$. oder $f = - \frac{\mathfrak{A}. \cos. 2\phi - \mathfrak{B} \cos. \phi}{1 - \cos. 2\phi} = -$
$\frac{\mathfrak{A} \cos. 2\phi - \mathfrak{B}. \cos. \phi.}{2(\sin. \phi)^2}$

****) Weil $\cos. y. \cos. z - \sin. y. \sin. z = \cos. (y + z)$ ist, §. 128.

*****) Da nemlich $\cos. y. \sin. z = \frac{\sin. (y + z) - \sin. (y - z)}{2}$ ist, § 130, so ist

$$\frac{-(n+1) \cos. (n+2) \phi. \sin. \phi + \sin. (n+1)\phi}{2 (\sin. \phi)^3} =$$

$$\frac{-(n+1)(\frac{1}{2} \sin.(n+3)\phi + \frac{1}{2} \sin. (n+1)\phi) + \sin.(n+1)\phi}{2 (\sin. \phi)^3} =$$

$$\frac{\frac{1}{2}(n+3) \sin. (n+1) \phi - \frac{1}{2}(n+1) \sin. (n+3)\phi}{2(\sin. \phi)^3}.$$

******) Aus §. 130 folgt nemlich

$$- \frac{(n+1) \cos. (n+1) \phi. \sin. \phi + \sin. (n+1) \phi \cos. \phi}{2 (\sin. \phi)^3} =$$

$$- \frac{(\frac{1}{2} (n+1) \sin. (n+2) \phi - \frac{1}{2} (n+1)) \sin. n\phi)}{2(\sin. \phi)^3} +$$

$$\frac{\frac{1}{2} \sin. (n+2)\phi + \frac{1}{2} \sin. n \phi}{2 (\sin \phi)^3}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} (n+2) \sin. n\phi - \frac{1}{2} n. \sin. (n+2)\phi}{2(\sin. \phi)^3}.$$

§. 221.

§. 221.

Ist $k = 3$, so ist das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche

$$\left.\begin{array}{l} f - 3pz\,(f.\cos.\,\phi - g.\sin.\,\phi) \\ \quad + 3ppzz\,(f.\cos.\,2\phi - g.\sin.\,2\phi) \\ \quad - p^3z^3\,(f.\cos.\,3\phi - g.\sin.\,3\phi) \end{array}\right\} : (1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz)^3$$

entspringt =

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1\;.\;2}(f.\cos.\,n\phi + g.\sin.\,n\phi)\,p^nz^n.$$

Da nun der Bruch $\frac{a + bpz}{(1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz)^2}$, oder dieser

$$\frac{\begin{array}{l} a - 2apz.\cos.\phi + appzz \\ \quad + bpz \quad - 2bppzz.\cos.\phi + bp^3z^3 \end{array}}{(1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz)^3}$$

das allgemeine Glied

$$\frac{(n+3)\sin.(n+1)\phi - (n+1)\sin.(n+3)\phi}{4(\sin.\phi)^3}\,ap^nz^n +$$

$$\frac{(n+2)\sin.\,n\phi - n.\sin.(n+2)\phi}{4(\sin.\phi)^3}\,bp^nz^n$$

giebt: so erhält man, wenn man diese beyden Brüche addirt, und den Zähler = $\mathfrak{A}$ setzt,

$$a + f = \mathfrak{A},$$

$$3f.\cos.\phi - 3g.\sin.\phi + 2a.\cos.\phi - b = 0,$$

$$3f.\cos.2\phi - 3g.\sin.2\phi + a - 2b.\cos.\phi = 0, \text{ und}$$

$$b = f.\cos.3\phi - g.\sin.3\phi.$$

Hieraus ergiebt sich

$$a = \frac{f.\cos.3\phi - g.\sin.3\phi - 3f.\cos.\phi + 3g.\sin.\phi}{2\cos.\phi}$$

$$= 2g(\sin.\phi)^2\,\mathrm{tang}.\phi - f - 2f.(\sin.\phi)^2\,{}^{*});\ \text{ferner}$$

f

$$\frac{f}{g} = \frac{\sin. 5\varphi - 2\sin. 3\varphi + \sin. \varphi}{\cos. 5\varphi - 2\cos. 3\varphi + \cos. \varphi} \text{**)}; \text{ und}$$

$a + f = \mathfrak{A} = 2g. (\sin. \varphi)^2 \text{ tang. } \varphi - 2f. (\sin. \varphi)^2$; folglich

$$\frac{\mathfrak{A}}{2(\sin. \varphi)^2} = \frac{g. \sin. \varphi - f. \cos. \varphi}{\cos. \varphi}; \text{ und hieraus}$$

$$f = \frac{\mathfrak{A}(\sin. \varphi - 2\sin. 3\varphi + \sin. 5\varphi)}{16(\sin. \varphi)^5} \text{***)}$$

$$g = \frac{\mathfrak{A}(\cos. \varphi - 2\cos. 3\varphi + \cos. 5\varphi)}{16(\sin. \varphi)^5};$$

und weil $16(\sin. \varphi)^5 = \sin. 5\varphi - 5\sin. 3\varphi + 10. \sin. \varphi$ ist, [§. 130. Anmerk.]

$$a = \frac{\mathfrak{A}(9\sin. \varphi - 3\sin. 3\varphi)}{16(\sin. \varphi)^5} \text{****)}, \text{ und}$$

$$b = \frac{\mathfrak{A}(-\sin. 2\varphi + \sin. 2\varphi)}{16(\sin. \varphi)^5} = 0;$$

und da $3\sin. \varphi - \sin. 3\varphi = 4(\sin. \varphi)^3$ ist, [§.130.Anmerk.] endlich

$$a = \frac{3\mathfrak{A}}{4(\sin. \varphi)^2}.$$

Es ist also das gesuchte allgemeine Glied

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} \mathfrak{A} p^n z^n \frac{(\sin.(n+1)\varphi - 2\sin.(n+3)\varphi + \sin.(n+5)\varphi)}{16(\sin. \varphi)^5} \text{*****)} +$$

$$3\mathfrak{A} p^n z^n \frac{((n+3)\sin.(n+1)\varphi - (n+1)\sin.(n+3)\varphi}{16(\sin. \varphi)^5} =$$

$$\frac{\mathfrak{A} p^n z^n}{16(\sin. \varphi)^5} \left(\frac{(n+4)(n+5)}{1 \cdot 2} \sin.(n+1)\varphi - \frac{2(n+1)(n+5)}{1 \cdot 2} \sin. (n+3)\varphi + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2} \sin.(n+5)\varphi\right) \text{******)}.$$

*) Wenn man die Gleichung $3f. \cos. \varphi - 3g. \sin. \varphi + 2a. \cos. \varphi - b = 0$ auf die Art abändert, daß man darin $f. \cos. 3\varphi - g. \sin. 3\varphi$ anstatt b aus der vierten Gleichung setzt: so findet man daraus sehr leicht

a

$$a = \frac{f.\,\mathrm{cos.}\,3\varphi - g.\,\mathrm{sin.}\,3\varphi - 3f.\,\mathrm{cos.}\,\varphi + 3g.\,\mathrm{sin.}\,\varphi}{2\,\mathrm{cos.}\,\varphi}.$$

Nun ist aber aus den von Eulern §. 262. angeführten und in dieser Uebersetzung in der Anmerkung zum 130sten §. bewiesenen Bestimmungen der Potestäten der Sinus und Cosinus, $4(\mathrm{sin.}\,\varphi)^3 = 3\,\mathrm{sin.}\,\varphi - \mathrm{sin.}\,3\varphi$; also

$$\frac{g.(3\,\mathrm{sin.}\,\varphi - \mathrm{sin.}\,3\varphi)}{2\,\mathrm{cos.}\,\varphi} = \frac{4g.(\mathrm{sin.}\,\varphi)^3}{2\,\mathrm{cos.}\,\varphi} = 2g.\,(\mathrm{sin.}\,\varphi)^2;$$

$\mathrm{tang.}\,\varphi$. Ferner ist aus §. 129, $\mathrm{cos.}\,3\varphi = 2\,\mathrm{cos}\,\varphi.\,\mathrm{cos.}\,2\varphi - \mathrm{cos.}\,\varphi$, und aus den vorhin angeführten §§, $\mathrm{cos.}\,2\varphi = 1 - 2(\mathrm{sin.}\,\varphi)^2$; folglich ist $\frac{f.(\mathrm{cos.}\,3\varphi - 3\,\mathrm{cos.}\,\varphi)}{2\,\mathrm{cos.}\,\varphi}$

$$= \frac{2\,\mathrm{cos.}\,\varphi.\,f.\,(1 - 2(\mathrm{sin.}\,\varphi)^2 - 2)}{2\,\mathrm{cos.}\,\varphi} = -f - 2f.\,(\mathrm{sin.}\,\varphi)^2.$$

Es wird demnach

$$a = \frac{f.\,\mathrm{cos.}\,3\varphi - g.\,\mathrm{sin.}\,3\varphi - 3f.\,\mathrm{cos.}\,\varphi + 3g.\,\mathrm{sin.}\,\varphi}{2\,\mathrm{cos.}\,\varphi} =$$

$$2g.\,(\mathrm{sin}\,\varphi)^2\,\mathrm{tang.}\,\varphi - f - 2f.\,(\mathrm{sin.}\,\varphi)^2.$$

**) Wenn man den ersten der hier gefundenen Werthe von a, und den in der vierten Gleichung stehenden Werth von b für a und b in die dritte Gleichung setzt, so wird

$$3f.\,\mathrm{cos.}\,2\varphi - 3g.\,\mathrm{sin.}\,2\varphi +$$
$$\frac{f.\,\mathrm{cos.}\,3\varphi - g.\,\mathrm{sin.}\,3\varphi - 3f.\,\mathrm{cos.}\,\varphi + 3g.\,\mathrm{sin.}\,\varphi}{2\,\mathrm{cos.}\,\varphi}$$
$$- 2f.\,\mathrm{cos.}\,3\varphi.\,\mathrm{cos.}\,\varphi + 2g.\,\mathrm{sin.}\,3\varphi.\,\mathrm{cos.}\,\varphi = 0;$$ oder

$$3f.\,2\,\mathrm{cos.}\,\varphi.\,\mathrm{cos.}\,2\varphi - 3g.\,2\,\mathrm{cos.}\,\varphi.\,\mathrm{sin.}\,2\varphi + f.\,\mathrm{cos.}\,3\varphi$$
$$- g.\,\mathrm{sin.}\,3\varphi - 3f.\,\mathrm{cos.}\,\varphi + 3g.\,\mathrm{sin.}\,\varphi - 2f.\,\mathrm{cos.}\,3\varphi.$$
$$2(\mathrm{cos.}\,\varphi)^2 + 2g.\,\mathrm{sin.}\,3\varphi.\,2(\mathrm{cos.}\,\varphi)^2 = 0.$$

Da nun $2(\mathrm{cos.}\,\varphi)^2 = 1 + \mathrm{cos.}\,2\varphi$ ist, §. 130, Anmerk. so erhält man hieraus ferner

$$3f(2\,\mathrm{cos.}\,\varphi.\,\mathrm{cos.}\,2\varphi - \mathrm{cos.}\,\varphi) + f.\,\mathrm{cos.}\,3\varphi - 2f.\,\mathrm{cos.}\,3\varphi.$$
$$\mathrm{cos.}\,2\varphi - 2f.\,\mathrm{cos}\,3\varphi = 3g.(2\,\mathrm{cos.}\,\varphi.\,\mathrm{sin.}\,2\varphi - \mathrm{sin.}\,\varphi)$$
$$+ g.\,\mathrm{sin.}\,3\varphi - 2g.\,\mathrm{sin.}\,3\varphi.\,\mathrm{cos.}\,2\varphi - 2g.\,\mathrm{sin.}\,3\varphi.$$

oder

oder

$3f. \cos. 3\varphi + f. \cos. 3\varphi - f. \cos. 5\varphi - f. \cos. \varphi - 2f. \cos. 3\varphi =$
$3g. \sin. 3\varphi + g. \sin. 3\varphi - f. \sin. 5\varphi - g. \sin. \varphi - 2g. \sin. 3\varphi.$

oder

$f(\cos. 5\varphi - 2\cos. 3\varphi + \cos. \varphi) = g(\sin. 5\varphi - 2\sin. 3\varphi + \sin. \varphi)$

Hieraus aber wird $\frac{f}{g}$ sehr leicht auf die Art bestimmt, wie es im §. geschehen ist.

***) Man setze, die Rechnung abzukürzen, $\sin. 5\varphi - 2\sin. 3\varphi + \sin. \varphi = R$, und $\cos. 5\varphi - 2\cos. 3\varphi + \cos. \varphi = S$, so ist

$$\frac{f}{g} = \frac{R}{S};\ fS = gR;\ g = \frac{fS}{R},$$ und also

$$\frac{\mathfrak{A}. \cos. \varphi}{2(\sin. \varphi)^2} = \frac{fS. \sin. \varphi - fR. \cos. \varphi}{R},$$ und

$$f = \frac{\mathfrak{A}R. \cos. \varphi}{2(\sin. \varphi)^2 (S. \sin. \varphi - R. \cos. \varphi)} =$$

$$\frac{\mathfrak{A}R. \cos. \varphi}{2(\sin. \varphi)^3 S - 2(\sin. \varphi)^2 R. \cos. \varphi}.$$

Da aber $2(\sin. \varphi)^3 S = 2(\sin. \varphi)^3 (\cos. 5\varphi - 2\cos. 3\varphi + \cos. \varphi) = 2(\sin. \varphi)^3 (2\cos. \varphi. \cos. 4\varphi - 6\cos. \varphi. \cos. 2\varphi + 4\cos. \varphi)$, und also $\frac{2(\sin. \varphi)^3 S}{\cos. \varphi} = 4(\sin. \varphi)^3 (\cos. 4\varphi - 3\cos. 2\varphi + 2) =$ (indem $2 - 2\cos. 2\varphi = 4(\sin. \varphi)^2$ ist, §. 130, Anmerk.) $16(\sin. \varphi)^5 + 4(\sin. \varphi)^3 (\cos. 4\varphi - \cos. 2\varphi)$ ist; ferner $2(\sin. \varphi)^2 R = 2(\sin. \varphi)^2 (\sin. 5\varphi - 2\sin. 3\varphi + \sin. \varphi) = 4(\sin. \varphi)^3 (\cos. 4\varphi - \cos. 2\varphi)$ ist, (weil $2\cos. 4\varphi. \sin. \varphi - 2\cos. 2\varphi \sin. \varphi = \sin. 5\varphi - 2\sin. 3\varphi + \sin. \varphi$, §. 130. 2): so wird

$$f. = \frac{\mathfrak{A}R. \cos. \varphi}{2(\sin. \varphi)^3 S - 2(\sin. \varphi)^2 R. \cos. \varphi} = \frac{\mathfrak{A}R}{\frac{2(\sin. \varphi)^3 S}{\cos. \varphi} - 2(\sin. \varphi)^2 R}$$

$$= \frac{\mathfrak{A}R}{16(\sin. \varphi)^5} = \frac{\mathfrak{A}(\sin. \varphi - 2\sin. 3\varphi + \sin. 5\varphi)}{16(\sin. \varphi)^5}.$$

****)

****) Es ist nemlich $a = \mathfrak{A} - f$ aus $a + f = \mathfrak{A}$. Setzt man also für f den vorhin gefundenen Werth, und multiplicirt man außerdem $\mathfrak{A}$ mit $\sin. 5\phi - 5 \sin. 3\phi + 10 \sin. \phi$ und dividirt es mit $16 (\sin. \phi)^5$, so wird

$$a = \frac{\mathfrak{A}(\sin. 5\phi - 5\sin. 3\phi + 10. \sin. \phi)}{16(\sin. \phi)^5} -$$

$$\frac{\mathfrak{A}(\sin. \phi - 2\sin. 3\phi + \sin. 5\phi)}{16(\sin. \phi)^5} = \frac{\mathfrak{A}(9\sin. \phi - 3\sin. 3\phi)}{16(\sin. \phi)^5}.$$

*****) Dieser Theil des allgemeinen Gliedes entsteht aus dem im Anfange des § stehenden allgemeinen Gliede

$$\frac{(n+1)(n+2)}{1 \, . \, 2}(f. \cos. n\phi + g. \sin. n\phi) p^n z^n,$$ wenn

darin die vorhin für f und g gefundenen Werthe setzt, und das Kommende nach §. 130. 1. 2 abändert.

******) Hier ist $\frac{(n+4)(n+5)}{1 \, . \, 2} = \frac{(n+1)(n+2)}{1 \, . \, 2} + 3(n+3)$;

$\frac{2(n+1)(n+5)}{1 \, . \, 2} = \frac{2(n+1)(n+2)}{1 \, . \, 2} + 3(n+1)$ genommen worden.

§. 222.

Das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1 - 2pz. \cos. \phi + ppzz)^3}$$

entspringt, ist folglich

$$\frac{\mathfrak{A}p^n z^n}{16(\sin. \phi)^5}\Big(\frac{(n+5)(n+4)}{1 \, . \, 2}. \sin. (n+1)\phi - \frac{2(n+1)(n+5)}{1 \, . \, 2}.$$

$$\sin. (n+3)\phi + \frac{(n+1)(n+2)}{1 \, . \, 2}\sin. (n+5)\phi\Big) +$$

$$\frac{\mathfrak{B}p^n z^n}{16(\sin. \phi)^5}\Big(\frac{(n+4)(n+3)}{1 \, . \, 2}. \sin. n\phi - \frac{2n(n+4)}{1 \, . \, 2}. \sin.$$

(n

$$(n+2)\varphi + \frac{n(n+1)}{1\,.\,2}\ \sin.(n+4)\varphi)\ ^{*)}.$$

Will man weiter gehen, so wird man auf diesem Wege für das allgemeine Glied der Reihe, welche aus dem Bruche

$$\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{(1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz)^4}$$

entspringt, finden,

$$\frac{\mathfrak{A}p^n z^n}{64(\sin.\varphi)^7}\Big(\frac{(n+7)(n+6)(n+5)}{1\,.\,2\,.\,3}\sin.(n+1)\varphi -$$
$$\frac{3(n+1)(n+7)(n+6)}{1\,.\,2\,.\,3}\sin.(n+3)\varphi + \frac{3(n+1)(n+2)(n+7)}{1\,.\,2\,.\,3}$$
$$\sin.(n+5)\varphi - \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{1\,.\,2\,.\,3}\sin.(n+7)\varphi\Big) +$$
$$\frac{\mathfrak{B}p^n z^n}{16(\sin.\varphi)^7}\Big(\frac{(n+6)(n+5)(n+4)}{1\,.\,2\,.\,3}\sin.n\varphi -$$
$$\frac{3n(n+6)(n+5)}{1\,.\,2\,.\,3}\sin.(n+2)\varphi + \frac{3n(n+1)(n+6)}{1\,.\,2\,.\,3}$$
$$\sin.(n+4)\varphi - \frac{n(n+1)(n+2)}{1\,.\,2\,.\,3}\sin.(n+6)\varphi\Big).$$

Aus diesen Formeln läßt sich die Form der allgemeinen Glieder der höhern Potenzen leicht abnehmen. Will man aber den Grund davon aufsuchen, so thut man wohl, wenn man sich dazu merkt, daß

$$\begin{aligned}
\sin.\varphi &= \sin.\varphi \\
4(\sin.\varphi)^3 &= 3\sin.\varphi - \sin.3\varphi \\
16(\sin.\varphi)^5 &= 10\sin.\varphi - 5\sin.3\varphi + \sin.5\varphi \\
64(\sin.\varphi)^7 &= 35\sin.\varphi - 21\sin.3\varphi + 7\sin.5\varphi - \sin.7\varphi \\
256(\sin.\varphi)^9 &= 126\sin.\varphi - 84\sin.3\varphi + 36\sin.5\varphi - 9\sin.7\varphi \\
&\quad + \sin.9\varphi\ ^{**)}.
\end{aligned}$$

u. s. f.

*) Die Erläuterung, welche dieser § erfordert, findet man im Anhange unter den Zusätzen zum dreyzehnten Capitel.

**) Man sehe hierüber die Anmerkung zum 130sten § nach.

§. 223.

Da man auf diese Weise alle gebrochenen Funktionen in reelle Partial-Brüche auflösen kann, so lassen sich auch die allgemeinen Glieder aller wiederkehrenden Reihen reell darstellen. Um dies desto deutlicher zu machen, wollen wir einige Beyspiele hersetzen.

Erstes Exempel.

Aus dem Bruche $\frac{1}{(1-z)(1-zz)(1-z^3)} = \frac{1}{1-z-zz+z^4+z^5-z^6}$ entsteht diese wiederkehrende Reihe: $1+z+2z^2+3z^3+4z^4+5z^5+7z^6+8z^7+10z^8+12z^9+$ 2c.; man soll ihr allgemeines Glied finden. Druckt man den gegebenen Bruch nach seinen Faktoren aus, so wird er $= \frac{1}{(1-z)^3(1+z)(1+z+zz)}$, und daraus ergeben sich die Partial-Brüche $\frac{1}{6(1-z)^3} + \frac{1}{4(1-z)^2} + \frac{17}{72(1-z)} + \frac{1}{8(1+z)} + \frac{2+z}{9(1+z+zz)}$

Von diesen giebt zum allgemeinen Gliede, der erste, $\frac{(n+1)(n+2)}{1\cdot 2}\cdot\frac{1}{6}z^n = \frac{nn+3n+2}{12}z^n$; der zweyte, $\frac{n+1}{4}z^n$; der dritte, $\frac{17}{72}z^n$; der vierte $\frac{1}{8}(-1)^n z^n$. Was den fünften, $\frac{2+z}{9(1+z+zz)}$, betrifft, so giebt er, wenn man ihn mit der Form $\frac{\mathfrak{A}+\mathfrak{B}pz}{1-2pz.\cos.\varphi+ppzz}$ (218) vergleicht, $p=1$; $\varphi = \frac{\pi}{3} = 60°$; $\mathfrak{A} = +\frac{2}{9}$; $\mathfrak{B} = -\frac{1}{9}$, und

Das

das allgemeine Glied, welches man daher erhält, ist demnach $+ \frac{2 \sin.(n+1)\varphi - \sin. n\varphi}{9 \sin. \varphi} (-1)^n z^n =$

$$+ \frac{4 \sin. (n+1)\varphi - 2 \sin. n\varphi}{9\sqrt{3}} (-1)^n z^n =$$

$$+ \frac{4 \sin. (n+1)\frac{\pi}{3} - 2 \sin. n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}} (-1)^n z^n.$$

Addirt man nun alle gefundenen Glieder, so findet man das allgemeine Glied der gegebenen Reihe $= (\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{47}{72}) z^n$

$$\pm \tfrac{1}{8} z^n \pm \frac{4 \sin. (n+1)\frac{\pi}{3} - 2 \sin. n\frac{\pi}{3}}{9\sqrt{3}} z^n,$$

wo die obern Zeichen gelten, wenn n eine gerade, und die untern, wenn n eine ungerade Zahl ist. Hierbey ist zu bemerken, daß, wenn n eine Zahl von der Form $3m$ ist, $\frac{4 \sin. \frac{1}{3}(n+1)\pi - 2 \sin. \frac{1}{3} n\pi}{9\sqrt{3}} = \pm \frac{2}{9}$; so wie wenn $n = 3m + 1$ ist, eben dieser Ausdruck $= \mp \frac{1}{9}$; und wenn $n = 3m + 2$ wird, $= \mp \frac{1}{9}$ ist, je nachdem n eine gerade oder eine ungerade Zahl bedeutet. Hiernach kann die Natur der gegebenen Reihe auch auf die Art ausgedruckt werden, daß man sagt:

Ist	so ist ihr allgemeines Glied
$n = 6m + 0$	$(\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + 1) z^n$
$n = 6m + 1$	$(\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{5}{12}) z^n$
$n = 6m + 2$	$(\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{2}{3} z^n$
$n = 6m + 3$	$(\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{3}{4}) z^n$
$n = 6m + 4$	$(\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{2}{3}) z^n$
$n = 6m + 5$	$(\frac{nn}{12} + \frac{n}{2} + \frac{5}{12}) z^n$.

Es

So gilt z. B. wenn $n = 50$ ist, die Form $6m + 2$, und das Glied der Reihe ist alsdann $= 234z^{50}$

Zweytes Exempel.

Aus dem Bruche $\frac{1 + z + zz}{1 - z - z^4 + z^5}$ entspringt die wiederkehrende Reihe $1 + 2z + 3zz + 3z^3 + 4z^4 + 5z^5 + 6z^6 + 6z^7 + 7z^8 +$ ꝛc.; man soll das allgemeine Glied derselben finden. Man kann den gegebenen Bruch auf diese Form $\frac{1 + z + zz}{(1-z)^2(1+z)(1+zz)}$ bringen, und ihn also in folgende Partial-Brüche, $\frac{3}{4(1-z)^2} + \frac{3}{8(1-z)} + \frac{1}{8(1+z)} - \frac{1+z}{4(1+zz)}$ auflösen. Nun giebt der erste von diesen Brüchen das allgemeine Glied $\frac{3(n+1)}{4}z^n$; der zweyte, $\frac{3}{8}z^n$; der dritte $\frac{1}{8}(-1)^n z^n$; und aus dem vierten, nemlich $-\frac{1+z}{4(1+zz)}$, erhält man, wenn man ihn mit der Form $\frac{\mathfrak{A} + \mathfrak{B}pz}{1 - 2pz.\cos.\varphi + ppzz}$ vergleicht, $p = 1$; $\cos.\varphi = 0$; und $\varphi = \frac{1}{2}\pi$; ferner $A = -\frac{1}{4}$; und $B = \frac{1}{4}$; also zum allgemeinen Gliede: $(-\frac{1}{4}\sin.\frac{1}{2}(n+1)\pi + \frac{1}{4}\sin.\frac{1}{2}n\pi)z^n$. Folglich ist das gesuchte allgemeine Glied $= (\frac{3}{4}n + \frac{9}{8})z^n \pm \frac{1}{8}z^n - \frac{1}{4}(\sin.\frac{1}{2}(n+1)\pi - \sin.\frac{1}{2}n\pi)z^n$.

Ist daher	so ist das allgemeine Glied
$n = 4m + 0$	$(\frac{3}{4}n + 1)z^n$
$n = 4m + 1$	$(\frac{3}{4}n + \frac{5}{4})z^n$
$n = 4m + 2$	$(\frac{3}{4}n + \frac{3}{2})z^n$
$n = 4m + 3$	$(\frac{3}{4}n + \frac{3}{4})z^n$

Ist z. B. $n = 50$, so gilt die Form $n = 4m + 2$, und das Glied ist $39z^{50}$.

§. 224.

§. 224.

Wenn also eine wiederkehrende Reihe gegeben ist, so kann man, da man den Bruch, woraus sie entspringt, leicht entdeckt, das allgemeine Glied derselben nach den ertheilten Vorschriften finden. Es giebt aber das Gesetz, nach welchem ein jedes Glied der Reihe aus den vorhergehenden gefunden wird, den Nenner des Bruchs zu erkennen, und die Faktoren dieses Nenners geben die Form des allgemeinen Gliedes an die Hand, denn durch den Zähler werden bloß die Coefficienten bestimmt. Es sey z. B. die wiederkehrende Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{etc.}$$

gegeben, und aus dem Gesetze, nach welchem jedes Glied aus einigen vorhergehenden bestimmt wird, sey der Nenner des Bruchs $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3$ gefunden, so daß $D = \alpha C + \beta B + \gamma A$; $E = \alpha D + \beta C + \gamma B$; $F = \alpha E + \beta D + \gamma C$; u. s. f. Nennt man nun mit Moivre die Multiplicatoren α, $+\beta$, $+\gamma$, die Beziehungs-Scale, so beruhet das Gesetz der Forschreitung auf dieser Beziehungs-Scale, und aus ihr erkennt man sogleich den Nenner des Bruchs, aus welchem die wiederkehrende Reihe entspringt.

§. 225.

Um also das allgemeine Glied, oder den Coefficienten der unbestimmten Potestät z^n zu finden, suche man die einfachen oder doppelten Faktoren des Nenners $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3$, die letztern, um die imaginären Faktoren zu vermeiden. Es seyen zuvörderst alle einfache Faktoren unter einander ungleich und reell, und folgende: $(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)$. Alsdann läßt sich der Bruch, woraus die gegebene Reihe entspringt, in $\frac{\mathfrak{A}}{1 - pz} + \frac{\mathfrak{B}}{1 - qz} + \frac{\mathfrak{C}}{1 - rz}$ auflösen, und das allgemeine Glied der Reihe ist daher $(\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n)z^n$. Sind zwey Faktoren einander gleich, nemlich $q = p$, so erhält das allgemeine Glied diese Form: $((\mathfrak{A}n + \mathfrak{B})p^n + \mathfrak{C}r^n)z^n$; und sind alle drey einander gleich, $r = q = p$, so ist das allgemeine Glied $(\mathfrak{A}n^2 + \mathfrak{B}n + \mathfrak{C})p^nz^n$. Hat aber der Nenner $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3$ einen doppelten Faktor, so daß er $= (1 - pz)(1 - 2qz.\cos.\phi + qqzz)$ ist: so ist das allgemeine Glied $= (\mathfrak{A}p^n + \frac{\mathfrak{B}\sin.(n+1)\phi + \mathfrak{C}\sin.n\phi}{\sin.\phi}q^n)z^n$. Da sich nun daraus, wenn man für n nach und nach die Zahlen 0, 1, 2 setzt, die Glieder A, Bz, Cz^2 ergeben müssen, so findet man dadurch die Werthe der Buchstaben $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{C}$.

§. 226.

Ist die Beziehungs-Scale zweytheilig, oder wird ein jedes Glied durch die zwey vorhergehenden bestimmt, so daß $C = \alpha B - \beta A$; $D = \alpha C - \beta B$; $E = \alpha D - \beta C$; rc. ist: so ist offenbar, daß die wiederkehrende Reihe, welche wir =

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + \text{rc.}$$

setzen wollen, aus einem Bruche entspringt, dessen Nenner $1 - \alpha z + \beta zz$ ist. Setzt man nun dessen Faktoren $= (1 - pz)(1 - qz)$ so ist $p + q = \alpha$, und $pq = \beta$, und das allgemeine Glied der Reihe $= (\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n)z^n$. Setzt man also $n = 0$, so wird $A = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}$; und nimmt man $n = 1$, so wird $B = \mathfrak{A}p + \mathfrak{B}q$, und folglich $Aq - B = \mathfrak{A}(q - p)$; $\mathfrak{A} = \frac{Aq - B}{q - p}$; und $\mathfrak{B} = \frac{Ap - B}{p - q}$. Hat man aber die Werthe $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ gefunden, so ist

$$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n; \text{ und}$$

$$Q = \mathfrak{A}p^{n+1} + \mathfrak{B}q^{n+1}; \text{ desgleichen}$$

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \frac{BB - \alpha AB + \beta AA}{4\beta - \alpha\alpha}.$$

§. 227.

§. 227.

Hieraus läßt sich eine Methode ableiten, jedes Glied aus einem einzigen vorhergehenden zu finden, da sonst zu dieser Absicht, nach dem Gesetze der Fortschreitung, zwey erfordert werden. Denn da

$P = \mathfrak{A} p^n + \mathfrak{B} q^n$; und $Q = \mathfrak{A} p.p^n + \mathfrak{B} q.q^n$ ist, so folgt, daß

$Pq - Q = \mathfrak{A}(q-p)p^n$; und $Pp - Q = \mathfrak{B}(p-q)q^n$

seyn wird. Multiplicirt man nun diese Ausdrücke mit einander, so erhält man

$$P^2 pq - (p+q)PQ + QQ - \mathfrak{A}\mathfrak{B}(p-q)^2 p^n q^n = 0$$

Da aber $p + q = \alpha$; $pq = \beta$; $(p-q)^2 = (p+q)^2 - 4pq = \alpha\alpha - 4\beta$; und $p^n q^n = \beta^n$ ist: so bekommt man, wenn man diese Werthe substituirt,

$$\beta P^2 - \alpha PQ + QQ = (\beta AA - \alpha AB + BB)\beta^n, \text{ oder}$$

$$\frac{QQ - \alpha PQ + \beta PP}{BB - \alpha AB + \beta AA} = \beta^n,$$

welches eine sehr merkwürdige Eigenschaft der wiederkehrenden Reihen ist, deren jedes Glied durch die beyden vorhergehenden bestimmt wird. Kennt man also darin irgend ein Glied P, so ist das folgende $Q = \frac{1}{2}\alpha P + \sqrt{((\frac{1}{4}\alpha^2 - \beta) P^2 + (B^2 - \alpha AB + \beta AA)\beta^n)}$; und dieser Ausdruck ist, des darin enthaltenen Wurzelzeichens ohngeachtet, stets rational, weil in der wiederkehrenden Reihe keine irrationalen Glieder vorkommen.

§. 228.

Aus jeden zwey unmittelbar auf einander folgenden Gliedern Pz^n und Qz^{n+1} läßt sich ferner das von ihnen durch mehrere andere getrennte Glied Xz^{2n} finden. Denn setzt man

$$X = fP^2 + gPQ - h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n:$$

so ist, weil

$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n$, und $Q = \mathfrak{A}p . p^n + \mathfrak{B}q . q^n$, ferner $X = \mathfrak{A}p^{2n} + \mathfrak{B}q^{2n}$ ist,

$$\begin{array}{rl} fP^2 = & f\mathfrak{A}^2p^{2n} + f\mathfrak{B}^2q^{2n} + 2f\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n \\ gPQ = & g\mathfrak{A}^2p.p^{2n} + g\mathfrak{B}^2q.q^{2n} + g.\mathfrak{A}\mathfrak{B}\alpha\beta^n \\ -h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n = & \qquad\qquad\qquad\qquad -h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n \\ \hline X = & \mathfrak{A}p^{2n} + \mathfrak{B}q^{2n}. \end{array}$$

Es wird demnach $f + gp = \frac{1}{\mathfrak{A}}$, $f + gq = \frac{1}{\mathfrak{B}}$; und $h = 2f + g\alpha$; und daraus $g = \frac{\mathfrak{B} - \mathfrak{A}}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p - q)}$ und $f = \frac{\mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q}{\mathfrak{A}\mathfrak{B}(p - q)}$.

Nun ist aber $\mathfrak{B} - \mathfrak{A} = \frac{\alpha A - 2B}{p - q}$, und $\mathfrak{A}p - \mathfrak{B}q = \frac{\alpha B - 2A\beta}{p - q}$: folglich wird $f = \frac{\alpha B - 2A\beta}{AB(\alpha\alpha - 4\beta)}$ und $g = \frac{\alpha A - 2B}{AB(\alpha\alpha - 4\beta)}$; oder $f = \frac{2A\beta - \alpha B}{BB - \alpha AB + \beta AA}$, und $g = \frac{2B - \alpha A}{BB - \alpha AB + \beta AA}$; also $h = \frac{(4\beta - \alpha\alpha)A}{BB - \alpha AB + \beta AA}$.

Gebraucht man also diese Werthe in $X = fP^2 + gPQ - h\mathfrak{A}\mathfrak{B}\beta^n$, so wird

$$X = \frac{(2A\beta - \alpha B)P^2 + (2B - \alpha A)PQ}{BB - \alpha AB + \beta AA} - A\beta^n$$

so wie hieraus, wenn man für β^n den dafür im vorhergehenden §. gefundenen Werth setzt,

$$X = \frac{(\beta A - \alpha B)P^2 + 2BPQ - AQQ}{BB - \alpha AB + \beta AA} \text{ *)}.$$

*) Euler setzt hier zuvörderst

$$X = \frac{(2A\beta - \alpha B)P^2 + (2B - \alpha A)PQ}{BB - \alpha AB + \beta AA} - \mathfrak{A}\beta^n$$

und fügt darauf hinzu: Auf eine ähnliche Art findet man,

X

$$X = \frac{(\alpha\beta A - (\alpha\alpha - 2\beta)B)P^2 + (2B - \alpha A)Q^2}{\alpha(BB - \alpha AB + \beta AA)} - \frac{2B\beta^n}{\alpha};$$

und durch die Verbindung dieser Bestimmungen mit einander und durch die Wegschaffung des Gliedes β^n erhält man

$$X = \frac{(\beta A - \alpha B)P^2 + 2BPQ - AQQ}{BB - \alpha AB + \beta AA}.$$

Es scheint aber das A in der ersten Bestimmung von X ein Rechnungsfehler zu seyn.

§. 229.

Druckt man die folgenden Glieder der gegebenen Reihe auf diese Art aus:

$$A + Bz + Cz^2 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \ldots\ldots + Xz^{2n} + Yz^{2n+1} + Zz^{2n+2},$$

so erhält man auf eine ähnliche Art

$$Z = \frac{(\beta A - \alpha B)Q^2 + 2BQR - ARR}{BB - \alpha AB + \beta AA}$$

und da $R = \alpha Q - \beta P$ ist, so wird

$$Z = \frac{-\beta\beta AP^2 + 2\beta(\alpha A - B)PQ + (\alpha B - (\alpha\alpha - \beta)A)Q^2}{BB - \alpha AB + \beta AA}$$

Nun ist $Z = \alpha Y - \beta X$, und also $Y = \frac{Z + \beta X}{\alpha}$; folglich

$$Y = \frac{-\beta BP^2 + 2\beta APQ + (B - \alpha A)QQ}{BB - \alpha AB + \beta AA} \; ^{*)}.$$

Man kann daher nunmehr auch aus X und Y auf eine ähnliche Art die Coefficienten der Potestäten z^{4n} und z^{4n+1}, so wie hieraus die Coefficienten der Potestäten z^{8n}, z^{8n+1} u. s. f. finden.

*) Im Originale ist $(B - \alpha A)QQ$ in der Bestimmung von Y noch mit α multiplicirt, welches wahrscheinlicher Weise ein Druckfehler ist.

Exempel.

Exempel.

Es sey die wiederkehrende Reihe

$1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + 11z^4 + 18z^5 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1}$ rc.

gegeben. Da darin jeder Coefficient die Summe der beyden vorhergehenden ist, so ist der Nenner des Bruchs, aus welchem diese Reihe entspringt, $= 1 - z - zz$; und folglich $\alpha = 1$; $\beta = -1$; $A = 1$; und $B = 3$; so daß also $BB - \alpha AB + \beta AA = 5$ wird. Hieraus ergiebt sich nun zuvörderst $Q = \frac{P + \sqrt{(5PP + 20(-1)^n)}}{2} = \frac{P + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$, wo das obere Zeichen gilt, wenn n eine gerade, das untere aber, wenn n eine ungerade Zahl ist. Ist z. B. $n = 4$, folglich $P = 11$, so ist $Q = \frac{11 + \sqrt{(5.121 + 20)}}{2} = \frac{11 + 25}{2} = 18$. Setzt man ferner den Coefficienten der Potestät z^{2n}, $= X$ so ist $X = \frac{-4PP + 6PQ - QQ}{5}$, folglich der Coefficient der Potestät $z^8 = \frac{-4.121 + 6.198 - 324}{5} = 76$. Da aber $Q = \frac{P + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$ ist, so ist $QQ = \frac{3PP \pm 10 + P\sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$; und folglich $X = \frac{-PP \pm 2 + P\sqrt{(5PP \pm 20)}}{2}$. Man findet also aus einem jeden Gliede Pz^n einer wiederkehrenden Reihe diese beyden: $\frac{P + \sqrt{(5PP \pm 20)}}{2} z^{n+1}$, und

$$\frac{-PP \mp 2 + P\sqrt{(5PP \pm 20)}}{2} z^{2n}.$$

§. 230.

Auf eine ähnliche Art läßt sich in den wiederkehrenden Reihen, worin jedes Glied aus den drey vorhergehenden bestimmt wird, jedes Glied auch aus den zwey vorhergehenden finden. Denn es sey $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} +$ ꝛc. eine solche Reihe, und ihre Beziehungs-Scale sey $\alpha, -\beta, +\gamma$, oder es entstehe die Reihe aus einem Bruche, dessen Nenner $= 1 - \alpha z + \beta zz - \gamma z^3$ ist. Druckt man nun die Glieder P, Q, R eben so wie vorhin durch die Faktoren dieses Nenners, welche $(1-pz)(1-qz)(1-rz)$ seyn mögen, aus, so daß

$$P = \mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n$$

$$Q = \mathfrak{A}p.p^n + \mathfrak{B}q.q^n + \mathfrak{C}r.r^n, \text{ und}$$

$$R = \mathfrak{A}p^2.p^n + \mathfrak{B}q^2.q^n + \mathfrak{C}r^2.r^n$$

ist: so erhält man, weil $p+q+r=\alpha$; $pq+pr+qr=\beta$; und $pqr=\gamma$ ist, folgende Proportion:

$$R^3 \left.\begin{matrix} -2\alpha Q \\ +\beta P \end{matrix}\right\} R^2 \left.\begin{matrix} +(\alpha\alpha+\beta)Q^2 \\ -(\alpha\beta+3\gamma PQ \\ +\alpha\gamma\quad P^2 \end{matrix}\right\} R \begin{matrix} -(\alpha\beta-\gamma)Q^3 \\ +(\alpha\gamma+\beta\beta\; PQ^2 \\ -2\beta\gamma\quad P^2Q \\ +\gamma\gamma\quad P^3 \end{matrix} : C^n =$$

$$C^3 \left.\begin{matrix} -2\alpha B \\ +\beta A \end{matrix}\right\} C^2 \left.\begin{matrix} +(\alpha\alpha+\beta\; B^2 \\ -(\alpha\beta+3\gamma)AB \\ +\alpha\gamma\quad A^2 \end{matrix}\right\} C \begin{matrix} -(\alpha\beta-\gamma)B^3 \\ +(\alpha\gamma+\beta\beta)AB^2 \\ -2\beta\gamma\quad A^2B \\ +\gamma\gamma\quad A^3 \end{matrix} : 1$$

Es hängt also die Erfindung des Gliedes R aus den beyden vorhergehenden P und Q von der Auflösung einer cubischen Gleichung ab.

§. 231.

Nach diesen Untersuchungen über die allgemeinen Glieder der wiederkehrenden Reihen müssen wir nun auch noch die Art und Weise, wie die Summen dieser Reihen gefunden werden, kennen zu lernen suchen. Hierbey ist zuvörderst offenbar, daß die Summe der ganzen ohne Ende fortlaufenden wiederkehrenden Reihe dem Bruche gleich ist,

aus

aus welchem sie entspringt; und da der Nenner dieses Bruchs aus dem Fortschreitungsgesetze der Reihe erkannt wird, so ist nur noch übrig, daß gezeigt werde, wie man den Zähler finden kann. Es sey also die Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + Gz^6 + \text{etc.}$$

gegeben, und das Gesetz, nach welchem dieselbe fortschreitet, führe auf den Nenner, $1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4$. Angenommen, daß der Bruch, welcher der Summe der ganzen unendlichen Reihe gleich ist, $= \frac{a + bz + cz^2 + dz^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}$ sey, und also die angeführte Reihe aus ihm entspringe: so findet man durch die Vergleichung

$$\begin{aligned} a &= A \\ b &= B - \alpha A \\ c &= C - \alpha B + \beta A \\ d &= D - \alpha C + \beta B - \gamma A. \end{aligned}$$

Demnach ist die gesuchte Summe

$$\frac{A + (B - \alpha A) z + (C - \alpha B + \beta A) z^2}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} + \frac{(D - \alpha C + \beta B - \gamma A) z^3}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta 4 z}.$$

§. 232.

Hieraus läßt sich leicht einsehen, wie man die Summe einer wiederkehrenden Reihe bis auf ein gegebenes Glied derselben zu suchen hat. Soll z. B. die Summe der vorhin angenommenen Reihe bis auf das Glied Pz^n gefunden werden, so setze man

$$s = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots + Pz^n.$$

Da nun die Summe der ganzen unendlichen Reihe bekannt ist, so suche man die Summe aller der Glieder, die auf das vorhergehende letzte Pz^n ohne Ende folgen, und nehme dabei

t =

$t = Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + Sz^{n+3} + Tz^{n+4} +$ ꝛc.

Da diese Reihe, durch z^{n+1} dividirt, eine der gegebenen gleiche wiederkehrende Reihe giebt, so ist ihre Summe $t =$

$$\frac{Qz^{n+1} + (R - \alpha Q)z^{n+2} + (S - \alpha R + \beta Q)z^{n+3}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} +$$

$$\frac{(T - \alpha S + \beta R - \gamma Q)z^{n+4}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}$$

Folglich ist die gesuchte Summe $s =$

$$\frac{+A + (B - \alpha A)z + (C - \alpha B + \beta A)z^2}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} +$$

$$\frac{(D - \alpha C + \beta B - \gamma A)z^3 - Qz^{n+1}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4} -$$

$$\frac{(R - \alpha Q)z^{n+2} - (S - \alpha R - \beta Q)z^{n+3}}{1 - \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4} -$$

$$\frac{(T - \alpha S + \beta R - \gamma Q)z^{n+4}}{1 - \alpha z + \beta z^2 - \gamma z^3 + \delta z^4}.$$

§. 233.

Ist daher die Beziehungs-Scale zweitheilig, und $\alpha, -\beta$: so ist die Summe der Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots Pz^n$, welche aus dem Bruche $\frac{A + (B - \alpha A)z}{1 - \alpha z + \beta zz}$ entspringt, folgende:

$$\frac{A + (B - \alpha A)z - Qz^{n+1} - (R - \alpha Q)z^{n+2}}{1 - \alpha z + \beta zz}$$

Da aber, wegen der Natur der Reihe, $R = \alpha Q - \beta P$ ist, so wird diese Summe dadurch in diese verwandelt:

$$\frac{A + (B - \alpha A)z - Qz^{n+1} + \beta Pz^{n+2}}{1 - \alpha z + \beta zz}$$

Exempel.

Ist die Reihe $1 + 3z + 4z^2 + 7z^3 + \ldots\ldots + Pz^n$ gegeben, wo $\alpha = 1$; $\beta = -1$; $A = 1$ und $B = 3$ ist: so ist

ist die Summe derselben $= \frac{1 + 2z - Qz^{n+1} - Pz^{n+2}}{1 - z - zz}$.

Setzt man aber $z = 1$, so wird die Summe der Reihe $1 + 3 + 4 + 7 + 11 + \ldots\ldots + P = P + Q - 3$. Die Summe des letzten und des folgenden Gliedes übertrifft also die Summe der ganzen Reihe um 3. Da nun $Q = \frac{P + \surd(5PP \pm 20)}{2}$, ist, so ist die Summe der Reihe

$$1 + 3 + 4 + 7 + 11 + \ldots + P = \frac{3P - 6 + \surd(5PP \pm 20)}{2},$$

und man kann daher diese Summe auch aus dem letzten Gliede allein finden.