# Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Vierzehntes Capitel. Von der Multiplication und Division der Winkel.

# Vierzehntes Capitel.

## Von der Multiplication und Division der Winkel.

§. 234.

Es bezeichne $z$ einen Winkel oder einen Kreisbogen, dessen Radius $= 1$ ist; ferner sey der Sinus dieses Winkels oder Bogens $= x$, der Cosinus $= y$, und die Tangente $= t$, folglich $xx + yy = 1$, und $t = \frac{x}{y}$. Da nun sowohl die Sinus als die Cosinus der Winkel $z$; $2z$; $3z$; $4z$; $5z$; 2c., wie wir oben *) gesehen haben, eine wiederkehrende Reihe geben, deren Beziehungs-Scale $2y, -1$ ist: so sind zuvörderst die Sinus der gedachten Bogen folgende:

$$\begin{aligned}
\sin. 0z &= 0\\
\sin. 1z &= x\\
\sin. 2z &= 2xy\\
\sin. 3z &= 4xy^2 - x\\
\sin. 4z &= 8xy^3 - 4xy\\
\sin. 5z &= 16xy^4 - 12xy^2 + x\\
\sin. 6z &= 32xy^5 - 32xy^3 + 6xy\\
\sin. 7z &= 64xy^6 - 80xy^4 + 24xy^2 - x\\
\sin. 8z &= 128xy^7 - 192xy^5 + 80xy^3 - 8xy
\end{aligned}$$

Und überhaupt folgt daraus

$$\sin. nz = x(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} +$$

(n —

$$\frac{(n-3)(n-4)}{1\ .\ 2}2^{n-5}y^{n-5} - \frac{(n-4)(n-5)(n-6)}{1\ .\ 2\ .\ 3}2^{n-7}y^{n-7} +$$

$$\frac{(n-5)(n-6)(n-7)(n-8)}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ 4}2^{n-9}y^{n-9} - \text{rc.})$$

*) Man vergleiche hierbey §. 129.

## §. 235.

Setzt man den Bogen $nz = s$, so wird $\sin.\,nz = \sin.\,s = \sin.\,(\pi - s) = \sin.\,(2\pi + s) = \sin.\,(3\pi - s)$ rc., denn alle diese Sinus sind einander gleich. Hieraus erhalten wir mehrere Werthe für $x$, nemlich

$$\sin.\frac{s}{n};\ \sin.\frac{\pi - s}{n};\ \sin.\frac{2\pi + s}{n};\ \sin.\frac{3\pi - s}{n};\ \sin.\frac{4\pi + s}{n};\ \text{rc.}$$

welche daher insgesammt der gefundenen Gleichung ein Genüge thun. Ferner sind hierunter so viel von einander verschiedene Werthe, als n Einheiten enthält, und diese Werthe daher die Wurzeln der gefundenen Gleichung. *) Sind nun die Wurzeln der Gleichung a posteriori bekannt, so kommt man durch die Vergleichung dieser Wurzeln mit den Gliedern der Gleichung auf sehr merkwürdige Eigenschaften. Da man aber dazu eine Gleichung haben muß, worin bloß $x$ als eine unbekannte Größe vorkommt, so muß man für $y$ seinen Werth $\sqrt{(1 - xx)}$ setzen; und es ist daher ein doppeltes Verfahren nöthig, je nachdem $n$ eine gerade oder eine ungerade Zahl ist.

*) Ueber diesen Gegenstand habe ich mich im Anhange in dem Zusatze zu §. 234 — 241 des gegenwärtigen Capitels ausführlich erklärt, und noch ausführlicher findet man ihn in des Herrn Hofrath Kästners Abhandlung: Unde plures insint radices aequationibus sectiones angulorum defini-

finientibus, Göttingen 1756 untersucht. Die im Euler unmittelbar folgenden Worte: Cavendum ergo est, ne valores aequales pro iisdem habeantur, quod fiet, dum alternae tantum expressiones assumantur; habe ich in der Uebersetzung weggelassen, weil sie mir zur Erläuterung dieses Gegenstandes nicht zweckmäßig scheinen.

§. 236.

Es sey n eine ungerade Zahl. Da die Bogen $-z$, $+z$, $+3z$, $+5z$, 2c. eine Reihe ausmachen, deren Differenz $2z$ ist, so ist die Beziehungs-Scale dieser Reihe, weil der Cosinus von $2z = 1 - 2xx$ ist, $2 - 4xx, -1$. Folglich ist

$$\begin{aligned}
\sin. -z &= -x \\
\sin. z &= x \\
\sin. 3z &= 3x - 4x^3 \\
\sin. 5z &= 5x - 20x^3 + 16x^5 \\
\sin. 7z &= 7x - 56x^3 + 112x^5 - 64x^7 \\
\sin. 9z &= 9x - 120x^3 + 432x^5 - 576x^7 + 256x^9
\end{aligned}$$

und überhaupt

$$\sin. nz = nx - \frac{n(nn-1)}{1.2.3}x^3 + \frac{n(nn-1)(nn-9)}{1.2.3.4.5}x^5 -$$
$$\frac{n(nn-1)(nn-9)(nn-25)}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + 2c.$$

wenn n eine ungerade Zahl ist. Die Wurzeln dieser Gleichung aber sind: $\sin. z$; $\sin. (\frac{2\pi}{n} + z)$; $\sin. (\frac{4\pi}{n} + z)$; $\sin. (\frac{6\pi}{n} + z)$; $\sin. (\frac{8\pi}{n} + z)$; 2c. und ihre Anzahl ist $= n$.

§. 237.

Es hat daher die Gleichung

$$0 = 1 - \frac{nx}{\sin. nz} + \frac{n(nn-1)x^3}{1.2.3.\sin. nz} - \frac{n(nn-1)(nn-9)x^5}{1.2.3.4.5.\sin. nz} \ldots$$

$\ldots \pm \frac{2^{n-1}x^n}{\sin. nz}$, (worin das obere Zeichen gilt, wenn n um 1 kleiner ist, als das Vielfache von 4, sonst aber das untere genommen werden muß) die Faktoren

$$\left(1 - \frac{x}{\sin. z}\right)\left(1 - \frac{x}{\sin.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)}\right)\left(1 - \frac{x}{\sin.\left(\frac{4\pi}{n} + z\right)}\right) \text{ etc.}$$

und daraus folgt, einmal, daß

$$\frac{n}{\sin. nz} = \frac{1}{\sin. z} + \frac{1}{\sin.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right)} + \frac{1}{\sin.\left(\frac{4\pi}{n} + z\right)} +$$

$$\frac{1}{\sin.\left(\frac{6\pi}{n} + z\right)} + \text{etc.}$$

ist, bis man n Glieder hat. Ferner ist das Produkt von allen $\pm \frac{2^{n-1}}{\sin. nz} =$

$$\frac{1}{\sin. z \sin.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right). \sin.\left(\frac{4\pi}{n} + z\right). \sin.\left(\frac{6\pi}{n} + z\right) \text{ etc.}}$$

oder

$$\sin. nz = \mp 2^{n-1} \sin. z. \sin.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right). \sin.\left(\frac{4\pi}{n} + z\right) \times$$

$$\sin.\left(\frac{6\pi}{n} + z\right) \text{ etc.}$$

Und da das vorletzte Glied fehlt, so ist auch

$$0 = \sin. z + \sin.\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) + \sin.\left(\frac{4\pi}{n} + z\right) + \sin.\left(\frac{6\pi}{n} + z\right) + \text{etc.}$$

Erstes

### Erstes Exempel.

Wenn $n = 3$ ist, so hat man daher:

$$0 = \sin. z + \sin. (120^\circ + z) + \sin. (240^\circ + z) = \sin. z + \sin. (60^\circ - z) - \sin. (60^\circ + z)$$

$$\frac{3}{\sin. 3z} = \frac{1}{\sin. z} + \frac{1}{\sin. (120^\circ + z)} + \frac{1}{\sin. (240^\circ + z)} = \frac{1}{\sin. z} + \frac{1}{\sin. (60^\circ - z)} - \frac{1}{\sin. (60^\circ + z)}$$

$$\sin. 3z = -4 \sin. z. \sin. (120^\circ + z). \sin. (240^\circ + z) = 4 \sin. z. \sin. (60^\circ - z). \sin. (60^\circ + z).$$

Es ist daher, wie bereits oben bemerkt worden ist,

$$\sin. (60^\circ + z) = \sin. z + \sin. (60^\circ - z),$$ und

$$3 \operatorname{cosec}. 3z = \operatorname{cosec}. z + \operatorname{cosec}. (60^\circ - z) - \operatorname{cosec}. (60^\circ + z).$$

### Zweytes Exempel.

Setzt man $n = 5$, so erhält man:

$$0 = \sin. z + \sin. (\tfrac{2}{5} \pi + z) + \sin. (\tfrac{4}{5} \pi + z) + \sin. (\tfrac{6}{5} \pi + z) + \sin. (\tfrac{8}{5} \pi + z),$$ oder

$$0 = \sin. z + \sin. (\tfrac{2}{5} \pi + z) + \sin. (\tfrac{1}{5} \pi - z) - \sin. (\tfrac{1}{5} \pi + z) - \sin. (\tfrac{2}{5} \pi - z),$$ oder

$$0 = \sin. z + \sin. (\tfrac{1}{5} \pi - z) - \sin. (\tfrac{1}{5} \pi + z) + \sin. (\tfrac{2}{5} \pi + z) - \sin. (\tfrac{2}{5} \pi - z).$$

Ferner ist

$$\frac{5}{\sin. 5z} = \frac{1}{\sin. z} + \frac{1}{\sin. (\frac{1}{5} \pi - z)} - \frac{1}{\sin. (\frac{1}{5} \pi + z)} - \frac{1}{\sin. (\frac{2}{5} \pi - z)} + \frac{1}{\sin. (\frac{2}{5} \pi + z)};$$

und endlich

$$\sin. 5z = 16 \sin. z. \sin. (\tfrac{1}{5} \pi - z). \sin. (\tfrac{1}{5} \pi + z). \sin. (\tfrac{2}{5} \pi - z). \sin. (\tfrac{2}{5} \pi + z).$$

### Drittes Exempel.

Auf diese Art wird, wenn man $n = 2m + 1$ setzt,

$$0 = \sin. z + \sin. (\frac{\pi}{n} - z) - \sin. (\frac{\pi}{n} + z) - \sin. (\frac{2\pi}{n} - z)$$

$$+ \sin. (\frac{2\pi}{n} + z) + \sin. (\frac{3\pi}{n} - z) - \sin. (\frac{3\pi}{n} + z) - \ldots$$

$$\ldots \pm \sin. (\frac{m}{n}\pi - z) \mp \sin. (\frac{m}{n}\pi + z)$$

wo die obern Zeichen gelten, wenn $m$ eine ungerade, und die untern, wenn $m$ eine gerade Zahl ist. Die andere Gleichung ist alsdann:

$$\frac{n}{\sin. nz} = \frac{1}{\sin. z} + \frac{1}{\sin. (\frac{\pi}{n} - z)} - \frac{1}{\sin. (\frac{\pi}{n} + z)}$$

$$- \frac{1}{\sin. (\frac{2\pi}{n} - z)} + \frac{1}{\sin. (\frac{2\pi}{n} + z)} + \frac{1}{\sin. (\frac{3\pi}{n} - z)}$$

$$- \frac{1}{\sin. (\frac{3\pi}{n} + z)} - \ldots \pm \frac{1}{\sin. (\frac{m\pi}{n} - z)} \mp \frac{1}{\sin. (\frac{m\pi}{n} + z)},$$

welche sich bequem auf die Cosecanten anwenden läßt. Drittens hat man dieses Produkt:

$$\sin. nz = 2^{2m} \sin. z. \sin. (\frac{\pi}{n} - z). \sin. (\frac{\pi}{n} + z) \times$$

$$\sin. (\frac{2\pi}{n} - z). \sin. (\frac{2\pi}{n} + z). \sin. (\frac{3\pi}{n} - z). \sin. (\frac{3\pi}{n} + z) \ldots$$

$$\ldots\ldots\ldots \times \sin. (\frac{m\pi}{n} - z). \sin. (\frac{m\pi}{n} + z).$$

### §. 238.

Es sey nunmehr $n$ eine gerade Zahl. Da $y = \sqrt{(1 - xx)}$ und $\cos. 2z = 1 - 2xx$, und also die Beziehungs-Scale

der

der Reihe der Sinus, so wie vorhin [§. 236.] $2 \cdot - 4xx$, $- 1$ ist, so ist alsdann

$\sin. 0 z = 0$

$\sin. 2 z = 2 x \sqrt{(1 - xx)}$

$\sin. 4 z = (4x - 8x^3) \sqrt{(1 - xx)}$

$\sin. 6 z = (6x - 32x^3 + 32x^5) \sqrt{(1 - xx)}$

$\sin. 8 z = (8x - 80x^3 + 192x^5 - 128x^7) \sqrt{(1 - xx)}$

und überhaupt

$$\sin. n z = (nx - \frac{n(nn-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3} x^3 + \frac{n(nn-4)(nn-16)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} x^5 - \frac{n(nn-4)(nn-16)(nn-36)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} x^7 + \ldots \pm 2^{n-1} x^{n-1}) \sqrt{(1 - xx)}$$

wenn n eine jede gerade Zahl bedeutet.

## §. 239.

Um diese Gleichung rational zu machen, nehme man auf beyden Seiten die Quadrate. Dann ist

$$(\sin. n z)^2 = nnxx + Px^4 + Qx^6 + \ldots - 2^{2n-2} x^{2n}$$

oder

$$x^{2n} \ldots - \frac{nn}{2^{2n-2}} xx + \frac{1}{2^{2n-2}} (\sin. n z)^2 = 0$$

Die Wurzeln dieser Gleichung sind sowohl positiv als negativ, und also folgende: $\pm \sin z$; $\pm \sin. (\frac{\pi}{n} - z)$; $\pm \sin. (\frac{2\pi}{n} + z)$; $\pm \sin. (\frac{3\pi}{n} - z)$; $\pm \sin. (\frac{4\pi}{n} + z$ ꝛc. wenn man überhaupt n solcher Ausdrücke nimmt. Da nun das letzte Glied das Produkt aus allen diesen Wurzeln ist, so erhält man, wenn man auf beyden Seiten die Quadratwurzel auszieht,

$$\sin. n z = \pm 2^{n-1} \sin. z. \sin. (\frac{\pi}{n} - z). \sin. (\frac{2\pi}{n} + z) \times \sin. (\frac{3\pi}{n} - z) \ldots\ldots$$

Was für ein Zeichen jedesmal genommen werden müsse, muß übrigens die Betrachtung der einzelnen Fälle bestimmen.

## Exempel.

Setzt man für n nach und nach die Zahlen 2, 4, 6, ꝛc. und nimmt man dabey n verschiedene Sinus, so wird

$$\sin. 2z = 2\sin. z. \sin. (\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\sin. 4z = 8\sin. z. \sin. (\frac{\pi}{4} - z). \sin. (\frac{\pi}{4} + z). \sin. (\frac{\pi}{2} - z)$$

$$\sin. 6z = 32\sin. z. \sin. (\frac{\pi}{6} - z). \sin. (\frac{\pi}{6} + z). \sin. (\frac{2\pi}{6} - z) \times$$
$$\sin. (\frac{2\pi}{6} + z). \sin. (\frac{3\pi}{6} - z)$$

$$\sin. 8z = 128 \sin. z. \sin. (\frac{\pi}{8} - z). \sin. (\frac{\pi}{8} + z) \times$$
$$\sin. (\frac{2\pi}{8} - z). \sin. (\frac{2\pi}{8} + z). \sin. (\frac{3\pi}{8} - z) \times$$
$$\sin. (\frac{3\pi}{8} + z). \sin. (\frac{4\pi}{8} - z).$$

## §. 240.

Es ist also auch überhaupt

$$\sin. nz = 2^{n-1}\sin. z. \sin. (\frac{\pi}{n} - z). \sin. (\frac{\pi}{n} + z). \sin. (\frac{2\pi}{n} - z) \times$$
$$\sin. (\frac{2\pi}{n} + z). \sin. (\frac{3\pi}{n} - z). \sin. (\frac{3\pi}{n} + z) \ldots\ldots$$
$$\sin. (\tfrac{1}{2}\pi - z)$$

wenn n eine gerade Zahl ist. Vergleicht man aber diese Formel mit der obigen, [§. 237], wo n eine ungerade Zahl war: so findet man unter beyden eine so große Uebereinstimmung,

stimmung, daß man sie in eine zusammenziehen kann. Es ist daher, n mag eine gerade oder eine ungerade Zahl seyn

$$\text{sin. } nz = 2^{n-1} \text{ sin. } z. \text{ sin. } (\frac{\pi}{n} - z). \text{ sin. } (\frac{\pi}{n} + z) \times$$

$$\text{sin. } (\frac{2\varpi}{n} - z). \text{ sin. } (\frac{2\varpi}{n} + z). \text{ sin. } (\frac{3\varpi}{n} - z) \times$$

$$\text{sin. } (\frac{3\varpi}{n} + z) \text{ etc.}$$

bis man so viel Faktoren hat, als n Einheiten enthält.

## §. 241.

Es leisten aber diese Ausdrücke, worin die Sinus vielfacher Winkel durch Faktoren bestimmt werden, vielen Vortheil, sowohl bey der Erfindung der Logarithmen der Sinus vielfacher Winkel, als auch beym Aufsuchen mehrerer solcher Ausdrücke der Sinus durch Faktoren, als wir oben (§. 184) gehabt haben. Es ist aber

$$\text{sin. } z = 1 \text{ sin. } z$$

$$\text{sin. } 2z = 2 \text{ sin. } z. \text{ sin. } (\frac{\varpi}{2} - z)$$

$$\text{sin. } 3z = 4 \text{ sin. } z. \text{ sin. } (\frac{\varpi}{3} - z). \text{ sin. } (\frac{\varpi}{3} + z)$$

$$\text{sin. } 4z = 8 \text{ sin. } z. \text{ sin. } (\frac{\varpi}{4} - z). \text{ sin. } (\frac{\varpi}{4} + z). \text{ sin. } (\frac{2\varpi}{4} - z)$$

$$\text{sin. } 5z = 16 \text{ sin. } z. \text{ sin. } (\frac{\varpi}{5} - z). \text{ sin. } (\frac{\varpi}{5} + z). \text{ sin. } (\frac{2\varpi}{5} - z) \times$$

$$\text{sin. } (\frac{2\varpi}{5} + z)$$

$$\text{sin. } 6z = 32 \text{ sin. } z. \text{ sin. } (\frac{\varpi}{6} - z). \text{ sin. } (\frac{\varpi}{6} + z). \text{ sin. } (\frac{2\varpi}{6} - z) \times$$

$$\text{sin. } (\frac{2\varpi}{6} + z). \text{ sin. } (\frac{3\varpi}{6} - z)$$

u. s. w.

§. 242.

Da ferner $\frac{\sin. 2nz}{\sin. nz} = 2 \cos. nz$ ist, so lassen sich auch die Cosinus vielfacher Winkel auf eine ähnliche Art durch Faktoren ausdrucken. Es ist nemlich

$$\cos. z = 1 \sin. \left(\frac{\varpi}{2} - z\right)$$

$$\cos. 2z = 2 \sin. \left(\frac{\varpi}{4} - z\right). \sin. \left(\frac{\varpi}{4} + z\right)$$

$$\cos. 3z = 4 \sin. \left(\frac{\varpi}{6} - z\right). \sin. \left(\frac{\varpi}{6} + z\right). \sin. \left(\frac{3\varpi}{6} - z\right)$$

$$\cos. 4z = 8 \sin. \left(\frac{\varpi}{8} - z\right). \sin. \left(\frac{\varpi}{8} + z\right). \sin. \left(\frac{3\varpi}{8} - z\right) \times \sin. \left(\frac{3\varpi}{8} + z\right)$$

$$\cos. 5z = 16 \sin. \left(\frac{\varpi}{10} - z\right). \sin. \left(\frac{\varpi}{10} + z\right). \sin. \left(\frac{3\varpi}{10} - z\right) \times \sin. \left(\frac{3\varpi}{10} + z\right). \sin. \left(\frac{5\varpi}{10} - z\right)$$

und überhaupt

$$\cos. nz = 2^{n-1} \sin. \left(\frac{\varpi}{2n} - z\right). \sin. \left(\frac{\varpi}{2n} + z\right). \sin. \left(\frac{3\varpi}{2n} - z\right) \times \sin. \left(\frac{3\varpi}{2n} + z\right). \sin. \left(\frac{5\varpi}{2n} - z\right) \text{ etc.}$$

bis man so viel Faktoren hat, als n Einheiten enthält.

§. 243.

Eben diese Ausdrücke giebt auch die Betrachtung der Cosinus vielfacher Winkel an die Hand. Denn wenn der $\cos. z = y$ gesetzt wird, so ist

$\cos. 0z = 1$

$\cos. 1z = y$

$$\cos. 2z = 2yy - 1$$
$$\cos. 3z = 4y^3 - 3y$$
$$\cos. 4z = 8y^4 - 8yy + 1$$
$$\cos. 5z = 16y^5 - 20y^3 + 5y$$
$$\cos. 6z = 32y^6 - 48y^4 + 18yy - 1$$
$$\cos. 7z = 64y^7 - 112y^5 + 56y^3 - 7y$$

und überhaupt

$$\cos. nz = 2^{n-1}y^n - \frac{n}{1}2^{n-3}y^{n-2} +$$
$$\frac{n(n-3)}{1.2}2^{n-5}y^{n-4} - \frac{n(n-4)(n-5)}{1.2.3}2^{n-7}y^{n-6} +$$
$$\frac{n(n-5)(n-6)(n-7)}{1.2.3.4}2^{n-9}y^{n-8} - \text{rc.}$$

Da nun $\cos. nz = \cos. (2\varpi - nz) = \cos. (2\varpi + nz) = \cos. (4\varpi \pm nz) = \cos. (6\varpi \pm nz)$ rc. ist, so sind die Wurzeln von $y$ in dieser Gleichung: $\cos. z$; $\cos. (\frac{2\varpi}{n} \pm z)$; $\cos. (\frac{4\varpi}{n} \pm z)$; $\cos. (\frac{6\varpi}{n} \pm z)$ rc. Wie viel man aber davon jedesmal für $y$ nehmen müsse? solches richtet sich nach der Menge der Einheiten, die $n$ enthält.

## §. 244.

Hier fällt nun zuvörderst in die Augen, daß die Summe aller dieser Wurzeln, den Fall ausgenommen, wenn $n = 1$ ist, wegen der Abwesenheit des zweyten Gliedes $= 0$ seyn muß; und es ist daher

$$0 = \cos. z. + \cos. (\frac{2\pi}{n} - z) + \cos. (\frac{2\pi}{n} + z) + \cos. (\frac{4\pi}{n} - z) +$$
$$\cos. (\frac{4\pi}{n} + z) \text{ rc.}$$

wenn man jedesmal so viel Glieder nimmt, als $n$ Einheiten hat. Wenn $n$ eine gerade Zahl ist, so bietet sich diese Gleichung von selbst dar, indem jedes Glied von einem anderen ihm entgegenstehenden aufgehoben wird. Wir wollen daher bloß die ungeraden Zahlen betrachten, und da ist, die Einheit ausgeschlossen, wegen $\cos. v = - \cos. (\pi - v)$

$$o = \cos. z - \cos. (\frac{\pi}{3} - z) - \cos. (\frac{\pi}{3} + z)$$

$$o = \cos. z - \cos. (\frac{\pi}{5} - z) - \cos. (\frac{\pi}{5} + z) + \cos. (\frac{2\pi}{5} - z) + \cos. (\frac{2\pi}{5} + z)$$

$$o = \cos. z - \cos. (\frac{\pi}{7} - z) - \cos. (\frac{\pi}{7} + z) + \cos. (\frac{2\pi}{7} - z) + \cos. (\frac{2\pi}{7} + z) - \cos. (\frac{3\pi}{7} - z) - \cos. (\frac{3\pi}{7} + z)$$

und überhaupt ist, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet,

$$o = \cos. z - \cos. (\frac{\pi}{n} - z) - \cos. (\frac{\pi}{n} + z) + \cos. (\frac{2\pi}{n} - z) + \cos. (\frac{2\pi}{n} + z) - \cos. (\frac{3\pi}{n} - z) - \cos. (\frac{3\pi}{n} + z) + \cos. (\frac{4\pi}{n} - z) - \cos. (\frac{4\pi}{n} + z) - \text{rc.}$$

wenn man immer so viel Glieder nimmt, als n Einheiten hat, und n größer als die Einheit ist, wie schon vorhin bemerkt worden.

§. 245.

Was das Produkt aus allen angeführten Wurzeln betrifft, so findet man solches verschieden, je nachdem n eine ungerade oder eine ungerademal gerade oder eine gerademal gerade Zahl ist. Es sind aber diese verschiedenen Ausdrücke in dem allgemeinen Ausdrucke, den

wir

wir §. 242. gefunden haben, enthalten, wenn man daselbst jeden Sinus in den Cosinus verwandelt. Es ist nemlich

$$\cos. z = 1 \cos. z$$

$$\cos. 2z = 2\cos.(\frac{\pi}{4} + z).\cos.(\frac{\pi}{4} - z)$$

$$\cos. 3z = 4\cos.(\frac{2\pi}{6} + z).\cos.(\frac{2\pi}{6} - z).\cos. z.$$

$$\cos. 4z = 8\cos.(\frac{3\pi}{8} + z).\cos.(\frac{3\pi}{8} - z)\cos.(\frac{\pi}{8} + z) \times \cos.(\frac{\pi}{8} - z)$$

$$\cos. 5z = 16\cos.(\frac{4\pi}{10} + z).\cos.(\frac{4\pi}{10} - z)\cos.(\frac{2\varpi}{10} + z) \times \cos.(\frac{2\varpi}{10} - z)\cos. z.$$

und überhaupt

$$\cos. nz = 2^{n-1}\cos.(\frac{n-1}{2n}\pi + z).\cos.(\frac{n-1}{2n}\varpi - z) \times \cos.(\frac{n-3}{2n}\varpi + z).\cos.(\frac{n-3}{2n}\varpi - z) \times \cos.(\frac{n-5}{2n}\varpi + z).\cos.(\frac{n-5}{2n}\varpi - z) \times \cos.(\frac{n-7}{2n}\varpi + z) \text{ ꝛc.}$$

wenn man jedesmal so viel Faktoren nimmt, als $n$ Einheiten enthält.

## §. 246.

Ist $n$ eine ungerade Zahl, und läßt man die Gleichung von der Einheit anfangen, so ist

$$0 = 1 \mp \frac{ny}{\cos. nz} + \text{ ꝛc.}$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn $n$ eine ungerade Zahl von Form $4m + 1$, das untere aber, wenn es eine ungerade Zahl von der Form $4m - 1$ ist. Daher ist

+

$$+\frac{1}{\cos. z} = \frac{1}{\cos. z}$$

$$-\frac{3}{\cos. 3z} = \frac{1}{\cos. z} - \frac{1}{\cos.(\frac{\pi}{3} - z)} - \frac{1}{\cos.(\frac{\pi}{3} + z)}$$

$$+\frac{5}{\cos. 5z} = \frac{1}{\cos. z} - \frac{1}{\cos.(\frac{\pi}{5} - z)} - \frac{1}{\cos.(\frac{\pi}{5} + z)} +$$

$$\frac{1}{\cos.(\frac{2\pi}{5} - z)} + \frac{1}{\cos.(\frac{2\pi}{5} + z)}$$

und überhaupt, wenn man $n = 2m + 1$ setzt,

$$\frac{n}{\cos. nz} = \frac{2m+1}{\cos.(2m+1)z} = \frac{1}{\cos.(\frac{m}{n}\pi + z)} + \frac{1}{\cos.(\frac{m}{n}\pi - z)} -$$

$$\frac{1}{\cos.(\frac{m-1}{n}\pi + z)} - \frac{1}{\cos.(\frac{m-1}{n}\pi - z)} +$$

$$\frac{1}{\cos.(\frac{m-2}{n}\pi + z)} + \frac{1}{\cos.(\frac{m-2}{n}\pi - z)} -$$

$$\frac{1}{\cos.(\frac{m-3}{n}\pi + z)} - \text{ꝛc.}$$

Man muß aber auch hier jedesmal so viel Glieder nehmen als $n$ Einheiten hat.

## §. 247.

Da $\frac{1}{\cos. v} = \sec. v$ ist, so lassen sich hieraus sehr merkwürdige Eigenschaften der Secanten ableiten. Es ist nemlich

$$\sec. z = \sec. z$$

$$3\sec. 3z = \sec.(\frac{\pi}{3} + z) + \sec.(\frac{\pi}{3} - z) - \sec.(\frac{0\pi}{3} + z)$$

5 sec.

$$5\,\mathrm{sec.}\,5z = \mathrm{sec.}\left(\frac{2\varpi}{5} + z\right) + \mathrm{sec.}\left(\frac{2\varpi}{5} - z\right) - \mathrm{sec.}\left(\frac{\varpi}{5} + z\right) -$$
$$\mathrm{sec.}\left(\frac{\varpi}{5} - z\right) + \mathrm{sec.}\left(\frac{0\varpi}{5} + z\right)$$

$$7\,\mathrm{sec.}\,7z = \mathrm{sec.}\left(\frac{3\varpi}{7} + z\right) + \mathrm{sec.}\left(\frac{3\varpi}{7} - z\right) - \mathrm{sec.}\left(\frac{2\varpi}{7} + z\right) -$$
$$\mathrm{sec.}\left(\frac{2\varpi}{7} - z\right) + \mathrm{sec.}\left(\frac{\varpi}{7} + z\right) + \mathrm{sec.}\left(\frac{\varpi}{7} - z\right) -$$
$$\mathrm{sec.}\left(\frac{0\varpi}{7} + z\right)$$

und überhaupt, wenn man $n = 2m + 1$ setzt,

$$n\,\mathrm{sec.}\,nz = \mathrm{sec.}\left(\frac{m}{n}\varpi + z\right) + \mathrm{sec.}\left(\frac{m}{n}\varpi - z\right) -$$
$$\mathrm{sec.}\left(\frac{m-1}{n}\varpi + z\right) - \mathrm{sec.}\left(\frac{m-1}{n}\varpi - z\right) +$$
$$\mathrm{sec.}\left(\frac{m-2}{n}\varpi + z\right) + \mathrm{sec.}\left(\frac{m-2}{n}\varpi - z\right) -$$
$$\mathrm{sec.}\left(\frac{m-3}{n}\varpi + z\right) - \mathrm{sec.}\left(\frac{m-3}{n}\varpi - z\right) +$$
$$\mathrm{sec.}\left(\frac{m-4}{n}\varpi + z\right) + \ldots\ldots \pm \mathrm{sec.}\,z.$$

## §. 248.

Für die Cosecanten aber erhält man aus §. 237.

$$\mathrm{cosec.}\,z = \mathrm{cosec.}\,z$$

$$3\,\mathrm{cosec.}\,3z = \mathrm{cosec.}\,z + \mathrm{cosec.}\left(\frac{\varpi}{3} - z\right) - \mathrm{cosec.}\left(\frac{\varpi}{3} + z\right)$$

$$5\,\mathrm{cosec.}\,5z = \mathrm{cosec.}\,z + \mathrm{cosec.}\left(\frac{\varpi}{5} - z\right) - \mathrm{cosec.}\left(\frac{\varpi}{5} + z\right) -$$
$$\mathrm{cosec.}\left(\frac{2\varpi}{5} - z\right) + \mathrm{cosec.}\left(\frac{2\varpi}{5} + z\right)$$

7 cosec.

$$7\,\mathrm{cosec.}\,7z = \mathrm{cosec.}\,z + \mathrm{cosec.}\left(\frac{\varpi}{7} - z\right) - \mathrm{cosec.}\left(\frac{\varpi}{7} + z\right) -$$
$$\mathrm{cosec.}\left(\frac{2\varpi}{7} - z\right) + \mathrm{cosec.}\left(\frac{2\varpi}{7} + z\right) +$$
$$\mathrm{cosec.}\left(\frac{3\varpi}{7} - z\right) - \mathrm{cosec.}\left(\frac{3\varpi}{7} + z\right)$$

und überhaupt, wenn man $n = 2m + 1$ setzt,

$$n.\,\mathrm{cosec.}\,nz = \mathrm{cosec.}\,z + \mathrm{cosec.}\left(\frac{\varpi}{n} - z\right) - \mathrm{cosec.}\left(\frac{\varpi}{n} + z\right) -$$
$$\mathrm{cosec.}\left(\frac{2\varpi}{n} - z\right) + \mathrm{cosec.}\left(\frac{2\varpi}{n} + z\right) +$$
$$\mathrm{cosec.}\left(\frac{3\varpi}{n} - z\right) - \mathrm{cosec.}\left(\frac{3\varpi}{n} + z\right) -$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots \mp \mathrm{cosec.}\left(\frac{m\varpi}{n} - z\right) \pm \mathrm{cosec.}\left(\frac{m\varpi}{n} + z\right)$$

wo die obern Zeichen gelten, wenn n eine gerade, die untern aber, wenn m eine ungerade Zahl ist.

## §. 249.

Da, wie wir oben [§. 133.] gesehen haben,

$$\mathrm{cos.}\,nz \pm \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,nz = (\mathrm{cos.}\,z \pm \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,z)^n$$

ist, so ist

$$\mathrm{cos.}\,nz = \frac{(\mathrm{cos.}\,z + \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,z)^n + (\mathrm{cos.}\,z - \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,z)^n}{2},$$

und

$$\mathrm{sin.}\,nz = \frac{(\mathrm{cos.}\,z + \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,z)^n - (\mathrm{cos.}\,z - \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

und also $\mathrm{tang.}\,nz =$

$$\frac{(\mathrm{cos.}\,z + \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,z)^n - (\mathrm{cos.}\,z - \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,z)^n}{(\mathrm{cos.}\,z + \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,z)^n\sqrt{-1} + (\mathrm{cos.}\,z - \sqrt{-1}.\,\mathrm{sin.}\,z)^n\sqrt{-1}}$$

Setzt man daher $\mathrm{tang.}\,z = \dfrac{\mathrm{sin.}\,z}{\mathrm{cos.}\,z} = t$, so ist

tang.

$$\text{tang. } nz = \frac{(1 + t\sqrt{-1})^n - (1 - t\sqrt{-1})^n}{(1 + t\sqrt{-1})^n\sqrt{-1} + (1 - t\sqrt{-1})^n\sqrt{-1}}$$

und hieraus folgt für die Tangenten vielfacher Winkel ·

$$\text{tang. } z = t$$

$$\text{tang. } 2z = \frac{2t}{1 - tt}$$

$$\text{tang. } 3z = \frac{3t - t^3}{1 - 3tt}$$

$$\text{tang. } 4z = \frac{4t - 4t^3}{1 - 6tt + t^4}$$

$$\text{tang. } 5z = \frac{5t - 10t^3 + t^5}{1 - 10tt + 5t^4}$$

und überhaupt tang. $nz =$

$$\frac{nt - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}t^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5}t^5 - \text{etc.}}{1 - \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}tt + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}t^4 - \text{etc.}}$$

Da also tang. $nz =$ tang. $(\pi + nz) =$ tang. $(2\pi + nz) =$ tang. $(3\pi + nz)$ etc. ist, so sind die Werthe von $t$, oder die Wurzeln der Gleichung folgende: tang. $z$; tang. $(\frac{\pi}{n} + z)$; tang. $(\frac{2\pi}{n} + z)$ etc. und ihre Anzahl jedesmal $= n$.

§. 250.

Läßt man die Gleichung von der Einheit anfangen, so ist

$$0 = 1 - \frac{nt}{\text{tang. } nz} - \frac{n(n-1)tt}{1 \cdot 2} + \frac{n(n-1)(n-2)t^3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \text{tang. } nz} + \text{etc.}$$

Vergleicht man nun die Coefficienten mit den Wurzeln, so wird $n$ cot. $nz =$

cot. $z$ + cot. $(\frac{\pi}{n} + z)$ + cot. $(\frac{2\pi}{n} + z)$ + cot. $(\frac{3\pi}{n} + z)$ + cot. $(\frac{4\pi}{n} + z)$ + . . . . . + cot. $(\frac{n-1}{n}\pi + z)$.

Ferner

Ferner ist die Summe der Quadrate dieser Cotangenten $= \frac{nn}{(\sin. nz)^2} - n$; und auf eine ähnliche Art lassen sich die übrigen Potestäten bestimmen. Setzt man aber für n bestimmte Zahlen, so wird

$$\cot. z = \cot. z$$

$$2 \cot. 2z = \cot. z + \cot. (\frac{\varpi}{2} + z)$$

$$3 \cot. 3z = \cot. z + \cot. (\frac{\varpi}{3} + z) + \cot. (\frac{2\varpi}{3} + z)$$

$$4 \cot. 4z = \cot. z + \cot. (\frac{\varpi}{4} + z) + \cot. (\frac{2\varpi}{4} + z) + \cot. (\frac{3\varpi}{4} + z)$$

$$5 \cot. 5z = \cot. z + \cot. (\frac{\varpi}{5} + z) + \cot. (\frac{2\varpi}{5} + z) + \cot. (\frac{3\varpi}{5} + z) + \cot. (\frac{4\varpi}{5} + z).$$

## §. 251.

Weil aber $\cot. v = - \cot. (\varpi - v)$ ist, so wird

$$\cot. z = \cot. z$$

$$2 \cot. 2z = \cot. z - \cot. (\frac{\varpi}{2} + z)$$

$$3 \cot. 3z = \cot. z - \cot. (\frac{\varpi}{3} - z) + \cot. (\frac{\varpi}{3} + z)$$

$$4 \cot. 4z = \cot. z - \cot. (\frac{\varpi}{4} - z) + \cot. (\frac{\varpi}{4} + z) - \cot. (\frac{2\varpi}{4} - z)$$

$$5 \cot. 5z = \cot. z - \cot. (\frac{\pi}{5} - z) + \cot. (\frac{\pi}{5} + z) -$$
$$\cot. (\frac{2\pi}{5} - z) + \cot. (\frac{2\pi}{5} + z)$$

und überhaupt

$$n \cot. nz = \cot. z - \cot. (\frac{\pi}{n} - z) + \cot. (\frac{\pi}{n} + z) -$$
$$\cot. (\frac{2\pi}{n} - z) + \cot. (\frac{2\pi}{n} + z) -$$
$$\cot. (\frac{3\pi}{n} - z) + \cot. (\frac{3\pi}{n} + z) -$$
$$\text{rc.}$$

bis man so viel Glieder hat, als n Einheiten enthält.

§. 252.

Nun fange die gefundene Gleichung von der höchsten Potestät an, wo denn zuvörderst die Fälle von einander zu unterscheiden sind, wenn n eine gerade, und wenn es eine ungerade Zahl ist. Es sey also n eine ungerade Zahl, oder $n = 2m + 1$. Alsdann ist

$$t - \text{tang. } z = 0$$
$$t^3 - 3tt. \text{ tang. } 3z - 3t + \text{tang. } 3z = 0$$
$$t^5 - 5t^4 \text{ tang. } 5z - 10t^3 + 10tt. \text{ tang. } 5z + 5t - \text{tang. } 5z = 0$$

und überhaupt

$$t^n - nt^{n-1} \text{ tang. } nz - \ldots\ldots\ldots \mp \text{tang. } nz = 0,$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn m eine gerade, das untere aber, wenn m eine ungerade Zahl ist. Aus dem Coefficienten des zweyten Gliedes ergiebt sich also

$$\text{tang. } z = \text{tang. } z$$

$$3 \text{ tang. } 3z = \text{tang. } z + \text{tang. } (\frac{\pi}{3} + z) + \text{tang. } (\frac{2\pi}{3} + z)$$

$$5\,\text{tang.}\,5z = \text{tang.}\,z + \text{tang.}\left(\frac{\pi}{5}+z\right) + \text{tang.}\left(\frac{2\pi}{5}+z\right) +$$
$$\text{tang.}\left(\frac{3\pi}{5}+z\right) + \text{tang.}\left(\frac{4\pi}{5}+z\right)$$

2c.

## §. 253.

Da $\text{tang.}\,v = -\text{tang.}\,(\pi - v)$ ist, so lassen sich die Winkel, die größer sind als ein rechter, auf solche zurückführen, die kleiner als ein rechter Winkel sind; und alsdann ist

$$\text{tang.}\ z = \text{tang}\ z$$

$$3\,\text{tang.}\,3z = \text{tang.}\,z - \text{tang.}\left(\frac{\pi}{3}-z\right) + \text{tang.}\left(\frac{\pi}{3}+z\right)$$

$$5\,\text{tang.}\,5z = \text{tang.}\,z - \text{tang.}\left(\frac{\pi}{5}-z\right) + \text{tang.}\left(\frac{\pi}{5}+z\right) -$$
$$\text{tang.}\left(\frac{2\pi}{5}-z\right) + \text{tang.}\left(\frac{2\pi}{5}+z\right)$$

$$7\,\text{tang.}\,7z = \text{tang.}\,z - \text{tang.}\left(\frac{\pi}{7}-z\right) + \text{tang.}\left(\frac{\pi}{7}+z\right) -$$
$$\text{tang.}\left(\frac{2\pi}{7}-z\right) + \text{tang.}\left(\frac{2\pi}{7}+z\right) -$$
$$\text{tang.}\left(\frac{3\pi}{7}-z\right) + \text{tang.}\left(\frac{3\pi}{7}+z\right)$$

und überhaupt, wenn man $n = 2m + 1$ setzt,

$$n\,\text{tang.}\,nz = \text{tang.}\,z - \text{tang.}\left(\frac{\pi}{n}-z\right) + \text{tang.}\left(\frac{\pi}{n}+z\right) -$$
$$\text{tang.}\left(\frac{2\pi}{n}-z\right) + \text{tang.}\left(\frac{2\pi}{n}+z\right) -$$
$$\text{tang.}\left(\frac{3\pi}{n}-z\right) + \ldots\ldots -$$
$$\text{tang.}\left(\frac{m\pi}{n}-z\right) + \text{tang.}\left(\frac{m\pi}{n}+z\right).$$

§. 254.

§. 254.

Ferner ist das Produkt aus allen diesen Tangenten = tang. n z, denn die Zweydeutigkeit in Ansehung der Zeichen fällt weg, weil die Zahl der negativen Zeichen abwechselnd eine gerade und eine ungerade Zahl ist. Folglich ist

$$\text{tang. } z = \text{tang. } z$$

$$\text{tang. } 3z = \text{tang. } z.\ \text{tang. } (\frac{\pi}{3} - z).\ \text{tang. } (\frac{\pi}{3} + z)$$

$$\text{tang. } 5z = \text{tang. } z.\ \text{tang. } (\frac{\pi}{5} - z).\ \text{tang. } (\frac{\pi}{5} + z) \times$$
$$\text{tang. } (\frac{2\pi}{5} - z).\ \text{tang. } (\frac{2\pi}{5} + z)$$

und überhaupt, wenn man $n = 2m + 1$ setzt,

$$\text{tang.} nz = \text{tang.} z. \text{tang.} (\frac{\pi}{n} - z). \text{tang.} (\frac{\pi}{n} + z) \text{tang.} (\frac{2\pi}{n} - z) \times$$
$$\text{tang.} (\frac{2\pi}{n} + z).\ \text{tang.} (\frac{3\pi}{n} - z) \ldots\ldots\ldots\ldots \times$$
$$\text{tang.} (\frac{m\pi}{n} - z).\ \text{tang.} (\frac{m\pi}{n} + z).$$

§. 255.

Ferner sey n eine gerade Zahl, so ist, wenn man von der höchsten Potestät anfängt,

$$tt + 2t.\ \text{cot.} 2z - 1 = 0$$
$$t^4 + 4t^3.\ \text{cot.} 4z - 6tt - 4t.\ \text{cot.} 4z + 1 = 0$$

und überhaupt, wenn $n = 2m$ gesetzt wird,

$$t^n + n t^{n-1} \text{cot.} nz - \ldots\ldots\ldots \mp 1 = 0,$$

wo das obere Zeichen gilt, wenn m eine ungerade, das untere hingegen, wenn m eine gerade Zahl ist. Vergleicht man daher die Wurzeln mit dem Coefficienten des zweyten Gliedes, so wird,

$$-2\cot.2z = \text{tang}.z + \text{tang}.(\frac{\pi}{2} + z)$$

$$-4\cot.4z = \text{tang}.z + \text{tang}.(\frac{\pi}{4} + z) + \text{tang}.(\frac{2\pi}{4} + z) +$$
$$\text{tang}.(\frac{3\pi}{4} + z)$$

$$-6\cot.6z = \text{tang}.z + \text{tang}.(\frac{\pi}{6} + z) + \text{tang}.(\frac{2\pi}{6} + z) +$$
$$\text{tang}.(\frac{3\pi}{6} + z) + \text{tang}.(\frac{4\pi}{6} + z) +$$
$$\text{tang}.(\frac{5\pi}{6} + z).$$

2c.

## §. 256.

Da $\text{tang}.v = -\text{tang}.(\pi - v)$ ist, so folgt hieraus

$$2\cot.2z = -\text{tang}.z + \text{tang}.(\frac{\pi}{2} - z)$$

$$4\cot.4z = -\text{tang}.z + \text{tang}.(\frac{\pi}{4} - z) - \text{tang}.(\frac{\pi}{4} + z) +$$
$$\text{tang}.(\frac{2\pi}{4} - z)$$

$$6\cot.6z = -\text{tang}.z + \text{tang}.(\frac{\pi}{6} - z) - \text{tang}.(\frac{\pi}{6} + z) +$$
$$\text{tang}.(\frac{2\pi}{6} - z) - \text{tang}.(\frac{2\pi}{6} + z) +$$
$$\text{tang}.(\frac{3\pi}{6} - z)$$

und überhaupt, wenn $n = 2m$ ist,

$$n.\cot.nz = -\text{tang}.z + \text{tang}.(\frac{\pi}{n} - z) - \text{tang}.(\frac{\pi}{n} + z) +$$

tang.

$$\text{tang.}\left(\frac{2\pi}{n} - z\right) - \text{tang.}\left(\frac{2\pi}{n} + z\right) +$$

$$\text{tang.}\left(\frac{3\pi}{n} - z\right) - \text{tang.}\left(\frac{3\pi}{n} + z\right) +$$

$$\ldots\ldots\ldots + \text{tang.}\left(\frac{m\pi}{n} - z\right)$$

§. 257.

Hierdurch wird nun aber auch hier die Zweydeutigkeit des Produkts aus allen Wurzeln aus dem Wege geräumt, und es ist daher

$$1 = \text{tang. } z. \text{ tang.}\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$$

$$1 = \text{tang. } z. \text{ tang.}\left(\frac{\pi}{4} - z\right). \text{ tang.}\left(\frac{\pi}{4} + z\right). \text{ tang. }\left(\frac{2\pi}{4} - z\right)$$

$$1 = \text{tang. } z. \text{ tang.}\left(\frac{\pi}{6} - z\right). \text{ tang.}\left(\frac{\pi}{6} + z\right). \text{ tang. }\left(\frac{2\pi}{6} - z\right) \times$$

$$\text{tang.}\left(\frac{2\pi}{6} + z\right). \text{ tang.}\left(\frac{3\pi}{6} - z\right)$$

u. s. f.

Der Grund von diesen Gleichungen fällt beym ersten Anblick in die Augen, indem darin immer je zwey und zwey Winkel einander zum rechten Winkel ergänzen. Da das Produkt aus den Tangenten jeder zweyer von diesen Winkeln $= 1$ ist, so muß auch das Produkt aus allen der Einheit gleich seyn.

§. 258.

Da die Sinus und Cosinus der Winkel, die in einer arithmetischen Progression fortgehen, eine wiederkehrende Reihe ausmachen, [§. 129.] so kann man nach den im vorhergehenden Capitel erklärten Regeln die Summe jeder

Menge dieser Sinus und Cosinus finden. Sind die in einer arithmetischen Progression fortschreitenden Winkel

$$a,\ a+b,\ a+2b,\ a+3b,\ a+4b,\ a+5b,\ \text{etc.}$$

und soll zuvörderst die Summe aller ihrer der Zahl nach unendlichen Sinus gefunden werden: so setze man

$$s = \sin. a + \sin.(a+b) + \sin.(a+2b) + \sin.(a+3b) + \text{etc.}$$

Da diese Reihe eine wiederkehrende Reihe, und ihre Beziehungs-Scale $2\cos. b, -1$ ist: so entspringt dieselbe aus einem Bruche, dessen Nenner $1 - 2z.\cos. b + zz$ ist, wenn man $z = 1$ setzt; der Bruch selbst aber ist $=$

$$\frac{\sin. a + z(\sin.(a+b) - 2\sin. a.\cos. b)}{1 - 2z.\cos. b + zz}$$ [§. 231.] Setzt man daher $z = 1$, so wird

$$s = \frac{\sin. a + \sin.(a+b) - 2\sin. a \cos. b}{2 - 2\cos. b} = \frac{\sin. a - \sin.(a-b)}{2(1-\cos. b)},$$

weil $2\sin. a.\cos. b = \sin.(a+b) + \sin.(a-b)$ ist. Da aber $\sin. f - \sin. g = 2\cos. \frac{f+g}{2}.\sin. \frac{f-g}{2}$ ist, so wird $\sin. a - \sin.(a-b) = 2\cos.(a - \frac{1}{2}b).\sin. \frac{1}{2}b$, und $1 - \cos. b = 2(\sin. \frac{1}{2}b)^2$; und folglich

$$s = \frac{\cos.(a - \frac{1}{2}b)}{2\sin. \frac{1}{2}b}.$$

§. 259.

Hierdurch wird man in den Stand gesetzt, die Summe jeder Anzahl von Sinus, deren Winkel in einer arithmetischen Progression stehen, anzugeben. Soll nemlich die Summe der Reihe

$$\sin. a + \sin.(a+b) + \sin.(a+2b) + \sin.(a+3b) + \ldots \ldots + \sin.(a+nb)$$

gefunden werden, so suche man, da die Summe dieser Reihe,

wenn

wenn man sie ohne Ende fortgehen läßt $= \frac{\cos.\,(a - \frac{1}{2}\,b)}{2\,\sin.\,\frac{1}{2}\,b}$

ist, die Summe der Glieder, die auf $\sin.\,(a + n\,b)$ folgen, oder die Summe von

$$\sin.\,(a + (n+1)\,b) + \sin.\,(a + (n+2)\,b) + \sin.\,(a + (n+3)\,b) + \text{⁊c.}$$

welche $= \frac{\cos.\,(a + (n + \frac{1}{2})\,b)}{2\,\sin.\,\frac{1}{2}\,b}$ seyn wird. Zieht man, wenn dieses geschehen, die zuletzt gefundene Summe von der vorhergehenden ab, so bleibt die gesuchte Summe übrig. Ist nemlich

$$s = \sin.\,a + \sin.\,(a+b) + \sin.\,(a+2\,b) + \ldots + \sin.\,(a + n\,b)$$

so wird

$$s = \frac{\cos.\,(a - \frac{1}{2}\,b) - \cos.\,(a + (n + \frac{1}{2})\,b)}{2\,\sin.\,\frac{1}{2}\,b}$$

$$= \frac{\sin.\,(a + \frac{1}{2}\,n\,b)\,\sin.\,\frac{1}{2}\,(n+1)\,b}{\sin.\,\frac{1}{2}\,b}.$$

## §. 260.

Auf eine ähnliche Art erhält man, wenn man die Cosinus nimmt, und

$$s = \cos.\,a + \cos.\,(a+b) + \cos.\,(a+2\,b) + \cos.\,(a+3\,b) + \text{⁊c.}$$

ohne Ende, setzt

$$s = \frac{\cos.\,a + z\,(\cos.\,(a+b) - 2\,\cos.\,a.\,\cos.\,b)}{1 - 2\,z.\,\cos.\,b + z\,z}, \text{ für } z = 1.$$

Da nun $2\,\cos.\,a.\,\cos.\,b = \cos.\,(a-b) + \cos.\,(a+b)$ ist, so wird

$$s = \frac{\cos.\,a - \cos.\,(a-b)}{2\,(1 - \cos.\,b)}.$$

Nun ist aber $\cos.\,f - \cos.\,g = 2\,\sin.\,\frac{f+g}{2}.\,\sin.\,\frac{g-f}{2}$;

folglich $= \cos.\,a - \cos.\,(a-b) = -2\,\sin.\,(a - \frac{1}{2}\,b).\,\sin.\,\frac{1}{2}\,b$;

 und

und da überdies $1 - \cos. b = 2 (\sin. \tfrac{1}{2} b)^2$ ist, so wird dadurch

$$s = -\frac{\sin. (a - \tfrac{1}{2} b)}{2 \sin. \tfrac{1}{2} b}.$$

Ferner ist auf eine ähnliche Art die Summe der Reihe

$$\cos. (a + (n + 1) b) + \cos. (a + (n + 2) b) + \cos. (a + (n + 3) b) + \text{rc.}$$

$$= -\frac{\sin. (a + (n + \tfrac{1}{2}) b)}{2 \sin. \tfrac{1}{2} b}$$ und zieht man daher diese Summe von jener ab, so bleibt die Summe dieser Reihe

$$s = \cos. a + \cos. (a + b) + \cos. (a + 2b) + \ldots\ldots + \cos. (a + nb)$$

übrig, und es ist daher

$$s = -\frac{\sin. (a - \tfrac{1}{2} b) + \sin. (a + (n + \tfrac{1}{2}) b)}{2 \sin. \tfrac{1}{2} b}$$

$$= \frac{\cos. (a + \tfrac{1}{2} n b) . \sin. \tfrac{1}{2} (n + 1) b}{\sin. \tfrac{1}{2} b.}$$

## §. 261.

Es lassen sich aus den vorhergehenden Sätzen noch sehr viel andere Fragen, die Sinus und die Tangenten betreffend, beantworten; z. B. wie man die Quadrate, und die höhern Potestäten der Sinus und der Tangenten summiret. Da man aber diese Antworten aus den übrigen Coefficienten der obigen Gleichungen auf eine ähnliche Art ableitet, so wollen wir uns dabey nicht aufhalten. Man muß indeß in Rücksicht auf diese letztern Summationen bemerken, daß man eine jede Potestät der Sinus und Cosinus durch die einzeln Sinus und Cosinus ausdrucken kann; und davon soll nun noch kürzlich geredet werden.

## §. 262.

Man nehme also aus den oben [§. 130.] angeführten folgende Sätze zu Hülfe:

2 sin.

$$2\sin a.\sin z = \cos(a-z) - \cos(a+z)$$
$$2\cos a.\sin z = \sin(a+z) - \sin(a-z)$$
$$2\sin a.\cos z = \sin(a+z) + \sin(a-z)$$
$$2\cos a.\cos z = \cos(a-z) + \cos(a+z)$$

Hieraus findet man zuvörderst [S. §. 130. Anmerk.] für die Potestäten der Sinus

$$\sin z = \sin z$$
$$2(\sin z)^2 = 1 - \cos 2z$$
$$4(\sin z)^3 = 3\sin z - \sin 3z$$
$$8(\sin z)^4 = 3 - 4\cos 2z + \cos 4z$$
$$16(\sin z)^5 = 10\sin z - 5\sin 3z + \sin 5z$$
$$32(\sin z)^6 = 10 - 15\cos 2z + 6\cos 4z - \cos 6z$$
$$64(\sin z)^7 = 35\sin z - 21\sin 3z + 7\sin 5z - \sin 7z$$
$$128(\sin z)^8 = 35 - 56\cos 2z + 28\cos 4z - 8\cos 6z + \cos 8z$$
$$256(\sin z)^9 = 126\sin z - 84\sin 3z + 36\sin 5z - 9\sin 7z + \sin 9z$$

rc.

Das Gesetz, nach welchem hier die Coefficienten auf einander folgen, läßt sich aus den Coefficienten eines zu einer Potestät erhobenen Binomiums erkennen, nur muß dabey bemerkt werden, daß die absolute Zahl bey den geraden Potestäten nur die Hälfte von der ist, welche die Coefficienten des zu eben der Potestät erhobenen Binomiums an die Hand geben.

## §. 263.

Auf eine ähnliche Art [S. §. 130. Anmerk.] werden die Potestäten der Cosinus bestimmt. Es ist nemlich

$$\cos z = \cos z$$
$$2(\cos z)^2 = 1 + \cos 2z$$

$$4\,(\cos. z)^3 = 3\cos. z + \cos. 3z$$
$$8\,(\cos. z)^4 = 3 + 4\cos. 2z + \cos. 4z$$
$$16\,(\cos. z)^5 = 10\cos. z + 5\cos. 3z + \cos. 5z$$
$$32\,(\cos. z)^6 = 10 + 15\cos. 2z + 6\cos. 4z + \cos. 6z$$
$$64\,(\cos. z)^7 = 35\cos. z + 21\cos. 3z + 6\cos. 5z + \cos. 7z$$
&c.

Was das Gesetz betrifft, nach welchem hier die Coefficienten auf einander folgen, so gilt davon eben das, was davon vorhin bey den Sinus angemerkt worden ist.

Funf