Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Funfzehntes Capitel. Von den Reihen, die aus der Entwickelung der Faktoren entspringen.

Funfzehntes Capitel.

Von den Reihen, welche aus der Entwickelung der Faktoren entspringen.

§. 264.

Wenn ein Produkt gegeben ist, welches auch Faktoren von folgender Form

$$(1+\alpha z)(1+\beta z)(1+\gamma z)(1+\delta z)(1+\varepsilon z)(1+\zeta z) \text{ ꝛc.}$$

deren Anzahl übrigens endlich oder unendlich seyn mag, besteht, und man dafür durch die wirkliche Multiplication dieser Faktoren die Reihe

$$1+Az+Bz^2+Cz^3+Dz^4+Ez^5+Fz^6+\text{ꝛc.}$$

erhält: so ist bekannt, daß die Coefficienten auf die Art aus den Zahlen α, β, γ, δ, ε, ζ ꝛc. erwachsen, daß

$A=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon+\zeta+$ ꝛc. $=$ der Summe aller dieser Zahlen einzeln genommen,

$B=$ der Summe der Produkte aus je zwey und zweyen,

$C=$ der Summe der Produkte aus je drey und dreyen,

$D=$ der Summe der Produkte aus je vier und vieren,

$E=$ der Summe der Produkte aus je fünf und fünfen von diesen Zahlen, ꝛc. ist, bis daß man zu dem Produkte aus allen gekommen ist. Man darf aber hierbey keine von den Zahlen α, β, γ, δ, ε, ꝛc. mit sich selbst verbinden.

§. 265.

Wenn also $z=1$ gesetzt wird, so ist das Produkt

$$(1+\alpha)(1+\beta)(1+\gamma)(1+\delta)(1+\varepsilon) \text{ ꝛc.}$$

gleich

gleich der Einheit nebst der Reihe aller der Zahlen, die sich aus α, β, γ, δ, ε, ꝛc. ergeben, wenn man dieselben theils einzeln nimmt, theils zwey oder mehrere von einander verschiedene von denselben mit einander multiplicirt. Ergiebt sich dabey eine und dieselbe Zahl auf zwey oder mehrere Arten, so muß dieselbe auch zwey oder mehrmal in der gedachten Reihe enthalten seyn.

§. 266.

Setzt man $z = -1$ so ist das Produkt

$$(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon) \text{ ꝛc.}$$

wieder gleich der Einheit nebst der Reihe aller der Zahlen, die sich aus α, β, γ, δ, ε, ꝛc. ergeben, wenn man dieselben theils einzeln nimmt, theils zwey oder mehrere von einander verschiedene von ihnen mit einander multiplicirt, doch mit der Veränderung, daß alle Produkte aus drey, fünf oder jeder ungeraden Menge dieser Zahlen als negative, die Produkte aber aus zwey, oder vier oder jeder geraden Menge von ihnen also positive Zahlen betrachtet werden müssen.

§. 267.

Setzt man für α, β, γ, δ, ꝛc. alle Prim-Zahlen, 2, 3, 5, 7, 11, 13, ꝛc. so ist das Produkt

$$(1+2)(1+3)(1+5)(1+7)(1+11)(1+13) \text{ ꝛc.} = P$$

gleich der Einheit nebst der Reihe aller Zahlen, die entweder selbst Prim-Zahlen sind, oder aus verschiedenen Prim-Zahlen durch die Multiplication entstehen. Es ist also

$$P = 1+2+3+5+6+7+10+11+13+14+15+17+ \text{ꝛc.}$$

welches eine Reihe ist, worinn alle natürliche Zahlen, die Potestäten, und diejenigen Zahlen, welche durch Potestäten theilbar sind, ausgenommen, vorkommen. Es fehlen

nem-

nemlich die Zahlen 4, 8, 9, 12, 16, 18 2c. weil sie entweder Potestäten sind, wie 4, 8, 9, 16, 2c. oder durch Potestäten getheilt werden können, wie 12, 18 2c.

§. 268.

Auf eben die Art wird es sich verhalten, wenn man für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 2c. die Potestäten der Prim-Zahlen von irgend einem Grade setzt. Macht man nemlich

$$P = (1 + \frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{3^n})(1 + \frac{1}{5^n})(1 + \frac{1}{7^n})(1 + \frac{1}{11^n}) \text{ 2c.}$$

so wird, wenn man wirklich multiplicirt,

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \text{ 2c.}$$

und in diesen Brüchen kommen alle Zahlen vor, diejenigen ausgenommen, welche entweder selbst Potestäten, oder durch Potestäten theilbar sind. Denn da alle ganze Zahlen entweder Prim-Zahlen, oder aus dergleichen durch die Multiplication zusammengesetzte Zahlen sind, so fallen hier bloß diejenigen aus, bey deren Zusammensetzung eine und dieselbe Zahl zwey- oder mehrmal genommen wird.

§. 269.

Wenn die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, 2c. so wie vorhin [§. 266.] negativ genommen, und also

$$P = (1 - \frac{1}{2^n})(1 - \frac{1}{3^n})(1 - \frac{1}{5^n})(1 - \frac{1}{7^n})(1 - \frac{1}{11^n}) \text{ 2c.}$$

gesetzt wird; so ist

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} - \frac{1}{13^n} + \frac{1}{15^n} - \text{ 2c.}$$

wo wieder, wie vorhin alle Zahlen, außer den Potestäten,

und

und denen, die durch Potestäten theilbar sind, vorkommen. Aber alle die zusammengesetzten Zahlen, die aus drey, fünf, oder jeder ungeraden Menge von Prim Zahlen entstanden sind, haben das Zeichen — vor sich; so wie hingegen vor denen, welche aus zwey oder vier oder sechs oder jeder andern geraden Menge von Prim-Zahlen entsprungen sind, das Zeichen + steht. So kommt z. B. in dieser Reihe das Glied $\frac{1}{30^n}$ vor, weil $30 = 2 . 3 . 5$ ist, und also keine Potestät in sich enthält; dieses Glied hat das Zeichen — vor sich, weil 30 ein Produkt aus drey Prim-Zahlen ist.

§. 270.

Nimmt man nunmehr den Ausdruck

$$\frac{1}{(1-\alpha z)(1-\beta z)(1-\gamma z)(1-\delta z)(1-\varepsilon z) \text{ rc.}}$$

und druckt man Reihe, welche man daraus, wenn man wirklich dividirt, erhält, auf folgende Art aus:

$$1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 + Fz^6 + \text{ rc.}$$

so ist bekannt, daß die Coefficienten A, B, C, D, E rc. auf die Art aus den Zahlen α, β, γ, δ, ε, rc. entstehen, daß

A = der Summe aller dieser Zahlen einzeln genommen
B = der Summe aller Produkte aus je zwey und zweyen
C = der Summe aller Produkte aus je drey und dreyen
D = der Summe aller Produkte aus je vier und vieren

von ihnen rc. ist, doch so, daß dabey jede auch so oft als möglich mit sich selbst verbunden wird.

§. 271.

Setzt man $z = 1$, so wird der Ausdruck

$$\frac{1}{(1-\alpha)(1-\beta)(1-\gamma)(1-\delta)(1-\varepsilon) \text{ rc.}}$$

der Einheit nebst der Reihe aller der Zahlen gleich, die aus

diesen

diesen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, ꝛc. entstehen, wenn man dieselben theils einzeln nimmt, theils zwey oder mehrere mit einander multiplicirt, so daß man dabey auch jede mehr als einmal nimmt oder mit sich selbst verbindet. Es unterscheidet sich also die Reihe, die man hier erhält, von der §. 265. dadurch, daß bey jener nur verschiedene Faktoren mit einander multiplicirt werden durften, bey dieser aber ein und derselbe Faktor zwey und mehrmal vorkommen kann. Es enthält nemlich die gegenwärtige Reihe alle Zahlen, die auf irgend eine Art aus den Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ꝛc. durch die Multiplication hervorgebracht werden können.

§. 272.

Es ist daher die Anzahl der Glieder dieser Reihe allezeit eine unendliche Zahl, die Menge der Faktoren mag endlich oder unendlich seyn. So ist z. B.

$$\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \text{ꝛc.}$$

wo alle aus der 2 durch die Multiplication entstehende Zahlen, oder alle Potestäten der 2 vorkommen. Ferner ist

$$\frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{18} + \text{ꝛc.}$$

wo keine andere Zahlen vorkommen, als solche, welche aus 2 und 3 zusammengesetzt, oder nur durch 2 oder 3 theilbar sind.

§. 273.

Setzt man daher für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, ꝛc. die Einheit, durch alle einzelne Prim-Zahlen dividirt, oder

P =

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\ \text{rc.}}$$

so wird

$$P = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \text{rc.}$$

so daß hier sowohl alle Prim-Zahlen, als alle aus ihnen zusammengesetzte Zahlen vorkommen. Da aber jede ganze Zahl entweder eine Prim-Zahl ist, oder aus den Prim-Zahlen durch die Multiplication hervorgebracht wird, so ist offenbar, daß hier alle ganze Zahlen ohne Ausnahme vorkommen müssen.

§. 274.

Eben das findet statt, wenn man die Potestäten der Prim-Zahlen von irgend einem Grade nimmt. Denn setzt man

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\ \text{rc.}}$$

so wird

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n}\ \text{rc.}$$

wo alle natürliche Zahlen ohne Ausnahme vorkommen. Giebt man aber den Faktoren allenthalben das Zeichen +, so daß

$$P = \frac{1}{(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n})(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})\ \text{rc.}}$$

ist: so wird

$$P = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} - \text{rc.}$$

Hier haben die Prim-Zahlen das Zeichen — vor sich; ferner sind die Produkte aus zwey einander gleichen oder verschiedenen Prim-Zahlen mit dem Zeichen + versehen, und eben das findet allemal statt, wenn die Menge der Primzahlen, durch deren Multiplication irgend ein Glied entstanden, eine gerade Zahl ist; ist hingegen diese Menge eine ungerade Zahl, so muß das Zeichen — wieder gebraucht werden. So hat das Glied $\frac{1}{240^n}$, weil $240 = 2.2.2.2.3.5$ ist, das Zeichen +. Der Grund hiervon liegt im 270sten §, wenn man $z = -1$ setzt.

§. 275.

Wenn man dieses mit dem Vorhergehenden [im Anfange dieses Capitels] vergleicht, so erhält man dadurch zwey Reihen, deren Produkt $= 1$ ist. Es sey nemlich

$$P = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\text{ etc.}}$$

und

$$Q = (1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\text{ etc.}$$

so ist

$$P = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \text{etc.}$$

und

$$Q = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} - \text{etc.}$$

[§. 269.] und es fällt dabey in die Augen, daß $PQ = 1$ ist.

§. 276.

Setzt man hingegen

$$P = \frac{1}{(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n})(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})\text{ etc.}}$$

und

$$Q=(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n})(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})\text{ ꝛc.}$$

so wird

$$P=1-\frac{1}{2^n}-\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}-\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}-\frac{1}{7^n}-\frac{1}{8^n}+\frac{1}{9^n}+\text{ꝛc.}$$

und

$$Q=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\frac{1}{10^n}+\frac{1}{11^n}+\text{ꝛc.}$$

und es ist auch hier $PQ=1$. Kennt man daher die Summe der einen Reihe, so kann man auch die Summe der andern finden.

§. 277.

Umgekehrt kann man aus den bekannten Summen dieser Reihen die Werthe der ohne Ende fortlaufenden Faktoren bestimmen. Denn setzt man

$$M=1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+\frac{1}{7^n}+\text{ꝛc. und}$$

$$N=1+\frac{1}{2^{2n}}+\frac{1}{3^{2n}}+\frac{1}{4^{2n}}+\frac{1}{5^{2n}}+\frac{1}{6^{2n}}+\frac{1}{7^{2n}}+\text{ꝛc.}$$

so ist

$$M=\frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\text{ ꝛc.}}\text{ und}$$

$$N=\frac{1}{(1-\frac{1}{2^{2n}})(1-\frac{1}{3^{2n}})(1-\frac{1}{5^{2n}})(1-\frac{1}{7^{2n}})(1-\frac{1}{11^{2n}})\text{ ꝛc.}}$$

Hieraus ergiebt sich durch die Division

$$\frac{M}{N}=(1+\frac{1}{2^n})(1+\frac{1}{3^n})(1+\frac{1}{5^n})(1+\frac{1}{7^n})(1+\frac{1}{11^n})\text{ ꝛc.}$$

und daraus findet man

$$\frac{MM}{N}=\frac{2^n+1}{2^n-1}\cdot\frac{3^n+1}{3^n-1}\cdot\frac{5^n+1}{5^n-1}\cdot\frac{7^n+1}{7^n-1}\cdot\frac{11^n+1}{11^n-1}\text{ ꝛc.}$$

Sind

Sind daher M und N bekannt, so kann man einmal die Werthe dieser Produkte finden, und dann erhält man daraus auch die Summen folgender Reihen

$$\frac{1}{M} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{2^{2n}} - \frac{1}{3^{2n}} - \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} - \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{10^{2n}} - \frac{1}{11^{2n}} - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{M}{N} = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{11^n} + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{N}{M} = 1 - \frac{1}{2^n} - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{10^n} - \text{ꝛc.}$$

und daraus lassen sich vermittelst der Combination sehr viele andere herleiten.

Erstes Exempel.

Es sey $n = 1$. Da nun, wie wir oben bewiesen haben, $l\frac{1}{1-x} = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^6}{6} + \text{ꝛc.}$ ist, so erhält man, wenn man $x = 1$ setzt, $l\frac{1}{1-1} = l\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \text{ꝛc.}$ Aber der Logarithme einer unendlich großen Zahl ist selbst unenendlich groß, und folglich ist

$$M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \text{ꝛc.} = \infty$$

Da nun hierdurch $\frac{1}{M} = \frac{1}{\infty} = 0$ wird, so ist

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} \text{ ꝛc.}$$

Ferner hat man hieraus

$$M = \infty = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\text{ ꝛc.}}$$

und dieses giebt

$$\infty = \frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{7}{6}\cdot\frac{11}{10}\cdot\frac{13}{12}\cdot\frac{17}{16}\cdot\frac{19}{18}\text{ ꝛc.}$$

$$0 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{10}{11}\cdot\frac{12}{13}\cdot\frac{16}{17}\cdot\frac{18}{19}\text{ ꝛc.}$$

Hiernächst ist nach den oben [§. 167. f.] erklärten Regeln von der Summation der Reihen,

$$N = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \text{ ꝛc.} = \frac{\pi\pi}{6}$$

und daraus fließen folgende Summen

$$\frac{6}{\pi\pi} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{11^2} - \text{ ꝛc.}$$

$$\infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \text{ ꝛc.}$$

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\text{ ꝛc.}$$

Endlich erhält man für die Faktoren

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{2^2}{2^2-1}\cdot\frac{3^2}{3^2-1}\cdot\frac{5^2}{5^2-1}\cdot\frac{7^2}{7^2-1}\cdot\frac{11^2}{11^2-1}\cdot\text{ ꝛc. oder}$$

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{4}{3}\cdot\frac{9}{8}\cdot\frac{25}{24}\cdot\frac{49}{48}\cdot\frac{121}{120}\cdot\frac{169}{168}\text{ ꝛc.}$$

und da $\frac{M}{N} = \infty$ oder $\frac{N}{M} = 0$ ist, so ist ferner

$$\infty = \frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\frac{8}{7}\cdot\frac{12}{11}\cdot\frac{14}{13}\cdot\frac{18}{17}\cdot\frac{20}{19}\text{ ꝛc.}$$

$$0 = \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\frac{7}{8}\cdot\frac{11}{12}\cdot\frac{13}{14}\cdot\frac{17}{18}\cdot\frac{19}{20}\text{ ꝛc., desgleichen}$$

$$\infty = \frac{3}{1} \cdot \frac{4}{2} \cdot \frac{6}{4} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{14}{12} \cdot \frac{18}{16} \cdot \frac{20}{18} \text{ ꝛc.}$$

$$0 = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{9}{10} \text{ ꝛc.}$$

In diesen Brüchen sind, wenn man den ersten ausnimmt, die Zähler allenthalben um 1 kleiner als die Nenner; addirt man aber den Zähler und Nenner eines jeden Bruchs, so geben diese Summen die Prim-Zahlen 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 ꝛc.

Zweytes Exempel.

Setzt man $n = 2$, so ist aus §. 167.

$$M = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \text{ ꝛc.} = \frac{\pi\pi}{6}$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \text{ ꝛc.} = \frac{\pi^4}{90}$$

Hieraus lassen sich zuvörderst folgende Reihen summiren

$$\frac{6}{\pi\pi} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} - \frac{1}{12^2} - \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{90}{\pi^4} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} - \frac{1}{11^4} - \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{15}{\pi^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{10^2} + \frac{1}{11^2} - \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{\pi\pi}{15} = 1 - \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} - \frac{1}{5^2} + \frac{1}{6^2} - \frac{1}{7^2} - \frac{1}{8^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{10^2} \text{ ꝛc.}$$

Dann sind daraus auch die Werthe folgender Produkte bekannt

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{2^2}{2^2-1} \cdot \frac{3^2}{3^2-1} \cdot \frac{5^2}{5^2-1} \cdot \frac{7^2}{7^2-1} \cdot \frac{11^2}{11^2-1} \cdot \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdot \frac{7^4}{7^4-1} \cdot \frac{11^4}{11^4-1} \cdot \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{15}{\pi\pi} = \frac{2^2+1}{2^2} \cdot \frac{3^2+1}{3^2} \cdot \frac{5^2+1}{5^2} \cdot \frac{7^2+1}{7^2} \cdot \frac{11^2+1}{11^2} \cdot \text{ꝛc. oder}$$

$$\frac{\pi\pi}{15} = \frac{4}{5} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{25}{26} \cdot \frac{49}{50} \cdot \frac{121}{122} \cdot \frac{169}{170} \cdot$$

desgleichen

$$\frac{5}{2} = \frac{2^2+1}{2^2-1} \cdot \frac{3^2+1}{3^2-1} \cdot \frac{5^2+1}{5^2-1} \cdot \frac{7^2+1}{7^2-1} \cdot \frac{11^2+1}{11^2-1} \cdot \text{ꝛc. oder}$$

$$\frac{5}{2} = \frac{5}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{61}{60} \cdot \frac{85}{84} \cdot \text{ꝛc. oder}$$

$$\frac{3}{2} = \frac{5}{4} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{25}{24} \cdot \frac{61}{60} \cdot \frac{85}{84} \cdot \text{ꝛc.}$$

In diesen Brüchen sind die Zähler allenthalben um 1 größer als die Nenner, beyde aber zu einander addirt geben die Quadrate der Prim-Zahlen 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, ꝛc.

Drittes Exempel.

Da wir nach dem Obigen den Werth von M bloß dann angeben können, wenn n eine gerade Zahl ist, so sey nunmehr $n = 4$. Alsdann ist

$$M = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi^4}{90}$$

$$N = 1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi^8}{9450}$$

Darnach lassen sich zuvörderst folgende Reihen summiren

$$\frac{90}{\pi^4} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} - \frac{1}{11^4} \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{9450}{\pi^8} = 1 - \frac{1}{2^8} - \frac{1}{3^8} - \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} - \frac{1}{7^8} + \frac{1}{10^8} - \frac{1}{11^8} \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{105}{\pi^4} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{10^4} + \frac{1}{11^4} \text{ ꝛc.}$$

$$\frac{\pi^4}{105} = 1 - \frac{1}{2^4} - \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} - \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} - \frac{1}{7^4} - \frac{1}{8^4} + \frac{1}{9^4} \text{ ꝛc.}$$

Hier-

Hiernächst findet man auch die Werthe folgender Produkte

$$\frac{\pi^4}{90} = \frac{2^4}{2^4-1} \cdot \frac{3^4}{3^4-1} \cdot \frac{5^4}{5^4-1} \cdot \frac{7^4}{7^4-1} \cdot \frac{11^4}{11^4-1} \cdot \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pi^8}{9450} = \frac{2^8}{2^8-1} \cdot \frac{3^8}{3^8-1} \cdot \frac{5^8}{5^8-1} \cdot \frac{7^8}{7^8-1} \cdot \frac{11^8}{11^8-1} \cdot \text{ꝛc.}$$

$$\frac{105}{\pi^4} = \frac{2^4+1}{2^4} \cdot \frac{3^4+1}{3^4} \cdot \frac{5^4+1}{5^4} \cdot \frac{7^4+1}{7^4} \cdot \frac{11^4+1}{11^4} \cdot \text{ꝛc. und}$$

$$\frac{7}{6} = \frac{2^4+1}{2^4-1} \cdot \frac{3^4+1}{3^4-1} \cdot \frac{5^4+1}{5^4-1} \cdot \frac{7^4+1}{7^4-1} \cdot \frac{11^4+1}{11^4-1} \cdot \text{ꝛc. oder}$$

$$\frac{35}{34} = \frac{41}{40} \cdot \frac{313}{312} \cdot \frac{1201}{1200} \cdot \frac{7321}{7320} \cdot \text{ꝛc.}$$

In diesen Brüchen sind die Zähler allenthalben um 1 größer als die Nenner, beyde aber zu einander addirt geben die Biquadrate der ungeraden Prim-Zahlen, 3, 5, 7, 11, ꝛc.

§. 278.

Da wir hier die Summe der Reihe

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \text{ꝛc.}$$

auf Faktoren gebracht haben, so setzt uns dieses in den Stand, unsere Betrachtung auf die Logarithmen auszudehnen. Denn da

$$M = \frac{1}{(1-\frac{1}{2^n})(1-\frac{1}{3^n})(1-\frac{1}{5^n})(1-\frac{1}{7^n})(1-\frac{1}{11^n})\ \text{ꝛc.}}$$

ist, so hat man daher

$$lM = -l(1-\frac{1}{2^n}) - l(1-\frac{1}{3^n}) - l(1-\frac{1}{5^n}) - l(1-\frac{1}{7^n})\ \text{ꝛc.}$$

und es ist folglich, wenn man die hyperbolischen Logarithmen nimmt,

$$lM = +1(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \text{ꝛc.})$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \frac{1}{11^{3n}} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \frac{1}{5^{4n}} + \frac{1}{7^{4n}} + \frac{1}{11^{4n}} + \text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

Setzt man nun außerdem

$$N = 1 + \frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{4^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{6^{2n}} + \text{ꝛc. so daß}$$

$$N = \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2^{2n}}\right)\left(1 - \frac{1}{3^{2n}}\right)\left(1 - \frac{1}{5^{2n}}\right)\left(1 - \frac{1}{7^{2n}}\right)\left(1 - \frac{1}{11^{2n}}\right)\text{ꝛc.}}$$

wird: so ist, wenn man wieder die hyperbolischen Logarithmen braucht,

$$lN = + 1\left(\frac{1}{2^{2n}} + \frac{1}{3^{2n}} + \frac{1}{5^{2n}} + \frac{1}{7^{2n}} + \frac{1}{11^{2n}} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{4n}} + \frac{1}{3^{4n}} + \frac{1}{5^{4n}} + \frac{1}{7^{4n}} + \frac{1}{11^{4n}} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{6n}} + \frac{1}{3^{6n}} + \frac{1}{5^{6n}} + \frac{1}{7^{6n}} + \frac{1}{11^{6n}} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{4}\left(\frac{1}{2^{8n}} + \frac{1}{3^{8n}} + \frac{1}{5^{8n}} + \frac{1}{7^{8n}} + \frac{1}{11^{8n}} + \text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

Aus diesen beyden Bestimmungen aber folgt

$$lM - \tfrac{1}{2}lN = + 1\left(\frac{1}{2^{n}} + \frac{1}{3^{n}} + \frac{1}{5^{n}} + \frac{1}{7^{n}} + \frac{1}{11^{n}} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{3n}} + \frac{1}{3^{3n}} + \frac{1}{5^{3n}} + \frac{1}{7^{3n}} + \frac{1}{11^{3n}} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{5n}} + \frac{1}{3^{5n}} + \frac{1}{5^{5n}} + \frac{1}{7^{5n}} + \frac{1}{11^{5n}} + \text{ꝛc.}\right)$$

$$+ \tfrac{1}{7}\left(\frac{1}{2^{7n}} + \frac{1}{3^{7n}} + \frac{1}{5^{7n}} + \frac{7}{7^{7n}} + \frac{1}{11^{7n}} + \text{ꝛc.}\right)$$

ꝛc.

§. 279.

§. 279.

Setzt man n = 1, so wird $M = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} +$ ꝛc. $= l\infty$, [§. 277. erst. Ex.] und $N = \frac{\pi\pi}{6}$. Folglich ist

$$l.\,l\infty - \tfrac{1}{2} l \frac{\pi\pi}{6} = + 1\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} + \frac{1}{7^3} + \frac{1}{11^3} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{2^5} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} + \frac{1}{7^5} + \frac{1}{11^5} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{7}\left(\frac{1}{2^7} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} + \frac{1}{7^7} + \frac{1}{11^7} + \text{ꝛc.}\right)$$
ꝛc.

Da aber diese Reihen, außer der ersten, nicht nur jede für sich, sondern auch zusammengenommen, eine endliche und noch dazu sehr kleine Summe geben: so muß die Summe der ersten Reihe $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} +$ ꝛc. unendlich groß seyn; sie ist nemlich um eine hinlänglich kleine Größe geringer als der hyperbolische Logarithme der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} +$ ꝛc.

§. 280.

Setzt man n = 2, so ist $M = \frac{\pi\pi}{6}$ und $N = \frac{\pi^4}{90}$. Folglich wird

$$2l\pi - l6 = + 1\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{11^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+ \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{11^6} + \text{ꝛc.}\right)$$
ꝛc.

$$4l\pi - l90 = +1\left(\frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{11^4} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+\tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{11^8} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \frac{1}{7^{12}} + \frac{1}{11^{12}} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$\text{ꝛc.}$$

$$\tfrac{1}{2}l\tfrac{5}{2} = +1\left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{11^2} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+\tfrac{1}{3}\left(\frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{11^6} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$+\tfrac{1}{5}\left(\frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \frac{1}{7^{10}} + \frac{1}{11^{10}} + \text{ꝛc.}\right)$$
$$\text{ꝛc.}$$

§. 281.

Obgleich das Gesetz, nach welchem die Prim-Zahlen fortschreiten, nicht bekannt ist, so lassen sich doch die Summen der höhern Potestäten dieser Reihen ohne Schwierigkeit näherungsweise bestimmen. Denn ist

$$M = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \text{ꝛc. und}$$

$$S = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \text{ꝛc.}$$

so ist

$$S = M - 1 - \frac{1}{4^n} - \frac{1}{6^n} - \frac{1}{8^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{10^n} - \text{ꝛc.}$$

und da

$$\frac{M}{2^n} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} + \frac{1}{12^n} + \text{ꝛc.}$$

so wird

S =

$$S = M - \frac{M}{2^n} - 1 + \frac{1}{2^n} - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} - \text{ꝛc.}$$

oder

$$S = (M-1)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right) - \frac{1}{9^n} - \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} - \frac{1}{25^n} - \frac{1}{27^n} - \text{ꝛc.}$$

und da

$$M\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\frac{1}{3^n} = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \text{ꝛc.}$$

ist, so wird

$$S = (M-1)\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)\left(-\frac{1}{3^n}\right) + \frac{1}{6^n} - \frac{1}{25^n} - \frac{1}{35^n} - \frac{1}{45^n} - \text{ꝛc.}$$

Da also M bekannt ist, so findet man hiernach den Werth von S sehr leicht, wenn n eine nur einigermaßen große Zahl ist.

§. 282.

Sind aber die Summen der höhern Potestäten bekannt, so kann man aus den gefundenen Formeln auch die Summen der niedern Potestäten bestimmen. Auf diese Art sind folgende Summen der Reihe

$$\frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \text{ꝛc.}$$

gefunden worden.

Wenn gesetzt wird, so ist die Summe der Reihe

n = 2;	0,452247420041222
n = 4;	0,076993139764252
n = 6;	0,017070086850639
n = 8;	0,004061405366515
n = 10;	0,000993603573633
n = 12;	0,000246026470033
n = 14;	0,000061244396725
n = 16;	0,000015282026219
n = 18;	0,000003817278702

n =

$n = 20$; 0,000000953961123
$n = 22$; 0,000000238450446
$n = 24$; 6,000000059608184
$n = 26$; 0,000000014901555
$n = 28$; 0,000000003725333
$n = 30$; 0,000000000931323
$n = 32$; 0,000000000232830
$n = 34$; 0,000000000058207
$n = 36$; 0,000000000014551

Die folgenden Summen der geraden Potestäten findet man durch eine fortgesetzte Division durch 4.

§. 283.

Die Verwandlung der Reihe $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \text{ꝛc.}$ in ein unendliches Produkt kann aber auch auf folgende Weise directe vorgenommen werden. Es sey

$$A = 1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{8^n} + \text{ꝛc.}$$

Subtrahirt man hiervon

$$\frac{1}{2^n}A = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{8^n} + \text{ꝛc.}$$

so erhält man

$$\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)A = 1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{11^n} + \text{ꝛc.} = B,$$

eine Reihe, in welcher alle durch 2 theilbaren Glieder fehlen. Subtrahirt man ferner hiervon

$$\frac{1}{3^n}B = \frac{1}{3^n} + \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} + \frac{1}{21^n} + \frac{1}{27^n} + \text{ꝛc.}$$

so bekommt man

$$\left(1 - \frac{1}{3^n}\right)B = 1 + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \text{ꝛc.} = C$$

worin

worin außerdem auch alle durch 3 theilbaren Glieder fehlen. Subtrahirt man also wieder hiervon

$$\frac{1}{5^n}C = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{25^n} + \frac{1}{35^n} + \frac{1}{55^n} + \text{ꝛc.}$$

so wird

$$(1 - \frac{1}{5^n})C = 1 + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} + \text{ꝛc.}$$

so daß nunmehr auch alle durch 5 theilbaren Glieder weggeschafft sind. Da man nun auf diese Art auch alle durch 7, 11, und die übrigen Prim-Zahlen theilbaren Glieder wegbringen kann, so fällt in die Augen, daß nach der Wegschaffung aller durch die Prim-Zahlen theilbaren Glieder allein die Einheit übrig bleibe. Setzt man daher für B, C, D, E ꝛc. die ihnen zukommenden Werthe, so findet man

$$A(1 - \frac{1}{2^n})(1 - \frac{1}{3^n})(1 - \frac{1}{5^n})(1 - \frac{1}{7^n})(1 - \frac{1}{11^n}) \text{ ꝛc.} = 1$$

und es ist daher die Summe der gegebenen Reihe =

$$A = \frac{1}{(1 - \frac{1}{2^n})(1 - \frac{1}{3^n})(1 - \frac{1}{5^n})(1 - \frac{1}{7^n})(1 - \frac{1}{11^n}) \text{ ꝛc.}}, \text{ oder}$$

$$A = \frac{2^n}{2^n - 1} \cdot \frac{3^n}{3^n - 1} \cdot \frac{5^n}{5^n - 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n - 1} \text{ ꝛc.}$$

§. 284.

Diese Methode läßt sich sehr gut gebrauchen, um nunmehr auch andere Reihen, deren Summen oben von uns gefunden worden sind, in unendliche Produkte zu verwandeln. Wir kennen aber aus §. 175. die Summen dieser Reihen

$$1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \text{ꝛc.}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist; denn der allgemeine Aus-

druck

druck für diese Summe ist $N\pi^n$, und die Werthe von N finden sich am angeführten Orte. Da hier bloß die ungeraden Zahlen vorkommen, so muß bemerkt werden, daß dieselben das Zeichen + vor sich haben, wenn sie unter die Form $4m+1$ gehören, und das Zeichen —, wenn sie unter dem allgemeinen Ausdrucke $4m-1$ begriffen sind. Es sey also

$$A = 1 - \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{15^n} + \text{etc.}$$

so ist, wenn man dazu

$$\frac{1}{3^n} A = \frac{1}{3^n} - \frac{1}{9^n} + \frac{1}{15^n} - \frac{1}{21^n} + \frac{1}{27^n} - \text{etc.}$$

addirt,

$$(1 + \frac{1}{3^n}) A = 1 + \frac{1}{5^n} - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \text{etc.} = B$$

Ferner erhält man, wenn man hiervon

$$\frac{1}{5^n} B = \frac{1}{5^n} + \frac{1}{25^n} - \frac{1}{35^n} - \frac{1}{55^n} \text{ etc.}$$

subtrahirt,

$$(1 - \frac{1}{5^n}) B = 1 - \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \text{etc.} = C$$

worin bereits alle Zahlen fehlen, die durch 3 und 5 theilbar sind. Addirt man nun wieder

$$\frac{1}{7^n} C = \frac{1}{7^n} - \frac{1}{49^n} - \frac{1}{77^n} + \text{etc.}$$

so fallen auch die durch 7 theilbaren Zahlen weg, und es wird

$$(1 + \frac{1}{7^n}) C = 1 - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \text{etc.} = D$$

Hiezu

$$\frac{1}{11^n} D = \frac{1}{11^n} - \frac{1}{121^n} + \text{etc.}$$

gesetzt, so wird

$$\left(1+\frac{1}{11^n}\right)D = 1 + \frac{1}{13^n} + \frac{1}{17^n} - \text{rc. } E$$

und es sind also auch die durch 11 theilbaren Zahlen weggebracht worden. Fährt man auf diese Art fort, so findet man nach der Wegschaffung aller durch die übrigen Prim-Zahlen theilbaren Zahlen endlich

$$A\left(1+\frac{1}{3^n}\right)\left(1-\frac{1}{5^n}\right)\left(1+\frac{1}{7^n}\right)\left(1+\frac{1}{11^n}\right)\left(1-\frac{1}{13^n}\right) \text{ rc.} = 1$$

oder

$$A = \frac{3^n}{3^n+1} \cdot \frac{5^n}{5^n-1} \cdot \frac{7^n}{7^n+1} \cdot \frac{11^n}{11^n+1} \cdot \frac{13^n}{13^n-1} \cdot \frac{17^n}{17^n-1} \text{ rc.}$$

Hier kommen in den Zählern die Potestäten aller Prim-Zahlen vor, und eben diese Potestäten sind in den Nennern entweder um 1 vermehrt, oder um 1 vermindert, je nachdem die Prim-Zahlen entweder unter die Form $4m-1$, oder unter diese, $4m+1$ gehören.

§. 285.

Setzt man also $n = 1$, so erhält man, weil alsdann $A = \frac{\pi}{4}$ ist,

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \text{ rc.}$$

Nun haben wir oben [§. 277. S.] gefunden

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3^2}{2.4} \cdot \frac{5^2}{4.6} \cdot \frac{7^2}{6.8} \cdot \frac{11^2}{10.12} \cdot \frac{13^2}{12.14} \cdot \frac{17^2}{16.18} \cdot \frac{19^2}{18.20} \text{ rc.}$$

Dividirt man daher diese zweyte Summe durch die erste, so wird

$$\frac{2\pi}{3} = \frac{4}{3} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \text{ rc.}$$

oder

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \text{ rc.}$$

Hier

Hier machen die Prim-Zahlen die Zähler, und die ungerademal geraden Zahlen, die sich von diesen Zählern um 1 unterscheiden, die Nenner aus. Dividirt man aber dieses Letzte nochmals durch $\frac{\pi}{4}$, so wird

$$2 = \frac{4}{2} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{8}{6} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{16}{18} \cdot \frac{20}{18} \cdot \frac{24}{22} \cdot \text{ꝛc. oder}$$

$$2 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{12}{11} \cdot \text{ꝛc.}$$

und hierin entstehen die Brüche aus den ungeraden Prim-Zahlen, wenn man dieselben in zwey um 1 von einander unterschiedene Theile theilt, und die geraden Theile zu den Zählern, die ungeraden hingegen zu den Nennern nimmt.

§. 286.

Vergleicht man diese Ausdrücke mit der Wallisischen Bestimmung [§. 185.]

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.\ 2.\ 4.\ 4.\ 6.\ 6.\ 8.\ 8.\ 10.\ 10.\ 12}{1.\ 3.\ 3.\ 5.\ 5.\ 7.\ 7.\ 9.\ 9.\ 11.\ 11} \text{ ꝛc.}$$

oder

$$\frac{4}{\pi} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \text{ ꝛc.}$$

so findet man, wenn diesen letztern Ausdruck durch

$$\frac{\pi\pi}{8} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \text{ ꝛc.}$$

aus dem vorhergehenden §. dividirt,

$$\frac{32}{\pi^3} = \frac{9 \cdot 9}{8 \cdot 10} \cdot \frac{15 \cdot 15}{14 \cdot 16} \cdot \frac{21 \cdot 21}{20 \cdot 22} \cdot \frac{25 \cdot 25}{24 \cdot 26} \cdot \text{ ꝛc.}$$

wo in den Zählern alle ungerade Zahlen vorkommen, die keine Prim-Zahlen sind.

§. 287.

Setzt man $n = 3$, so wird $A = \frac{\pi^3}{32}$ [§. 175.] und daher

$$\frac{\pi^3}{32} = \frac{3^3}{3^3+1} \cdot \frac{5^3}{5^3-1} \cdot \frac{7^3}{7^3+1} \cdot \frac{11^3}{11^3+1} \cdot \frac{13^3}{13^3-1} \cdot \frac{17^3}{17^3-1} \cdot \text{2c.}$$

Nun giebt aber die Reihe [§. 167.]

$$\frac{\pi^6}{945} = 1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{2c.}$$

nach §. 277.

$$\frac{\pi^6}{945} = \frac{2^6}{2^6-1} \cdot \frac{3^6}{3^6-1} \cdot \frac{5^6}{5^6-1} \cdot \frac{7^6}{7^6-1} \cdot \frac{11^6}{11^6-1} \cdot \frac{13^6}{13^6-1}\ \text{2c.}$$

oder

$$\frac{\pi^6}{960} = \frac{3^6}{3^6-1} \cdot \frac{5^6}{5^6-1} \cdot \frac{7^6}{7^6-1} \cdot \frac{11^6}{11^6-1} \cdot \frac{13^6}{13^6-1}\ \text{2c.}$$

Dividirt man also diesen letzten Ausdruck durch den ersten, so wird

$$\frac{\pi^3}{30} = \frac{3^3}{3^3-1} \cdot \frac{5^3}{5^3+1} \cdot \frac{7^3}{7^3-1} \cdot \frac{11^3}{11^3-1} \cdot \frac{13^3}{13^3+1} \cdot \frac{17^3}{17^3+1}\ \text{2c.}$$

und dividirt man diesen nochmals durch den ersten, so erhält man

$$\frac{16}{15} = \frac{3^3+1}{3^3-1} \cdot \frac{5^3-1}{5^3+1} \cdot \frac{7^3+1}{7^3-1} \cdot \frac{11^3+1}{11^3-1} \cdot \frac{13^3-1}{13^3+1} \cdot \frac{17^3-1}{17^3+1} \cdot \text{2c.}$$

oder

$$\frac{16}{15} = \frac{14}{13} \cdot \frac{62}{63} \cdot \frac{172}{171} \cdot \frac{666}{665} \cdot \frac{1098}{1099} \cdot \text{2c.}$$

Diese Brüche entstehen aus den Cubis der ungeraden Prim-Zahlen, wenn man jeden in zwey um 1 unterschiedene Theile theilt, und die geraden Theile zu den Zählern, die ungeraden aber zu den Nennern nimmt.

§. 288.

Aus diesen Ausdrücken können wieder neue Reihen gemacht werden, in welchen alle natürliche Zahlen in den Nennern vorkommen. Denn da

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{3+1} \cdot \frac{5}{5-1} \cdot \frac{7}{7+1} \cdot \frac{11}{11+1} \cdot \frac{13}{13-1} \cdot \text{2c.}$$

 ist,

ist, so ist

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\text{ıc.}}$$

und daraus erhält man, wenn man entwickelt, diese Reihe

$$\frac{\pi}{6} = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}\text{ ıc.}$$

Mit den Zeichen verhält es sich darin so, daß die 2 das Zeichen —, die Prim-Zahlen von der Form $4m - 1$ ebenfalls —, die aber von der Form $4m + 1$ das Zeichen +, und die zusammengesetzten Zahlen endlich das Zeichen haben, welches ihnen nach ihrer Entstehung aus den Prim-Zahlen zukommt. So bekommt der Bruch $\frac{1}{60}$ das Zeichen —, weil $60 = 2.2.3.5$ ist, und die drey ersten Zahlen hier das Zeichen —, und die letzte allein das Zeichen + hat. Auf eine ähnliche Art ist

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1-\frac{1}{13})\text{ıc.}}$$

und daraus entsteht die Reihe

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10}\text{ ıc.}$$

Hier hat die 2 das Zeichen +, die Prim-Zahlen von der Form $4m - 1$ das Zeichen —, die von der Form $4m + 1$ das Zeichen +, und die zusammengesetzten Zahlen bekommen das Zeichen, welches ihnen nach ihrer Entstehung aus den Prim-Zahlen zukommt.

§. 289.

Da ferner

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})\text{ıc.}}$$

ist, so erhält man durch die Entwickelung

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{13} \text{ ꝛc.}$$

wo bloß die ungeraden Zahlen vorkommen, die Zeichen aber so beschaffen sind, daß die Prim-Zahlen von der Form $4m - 1$ das Zeichen $+$, die von der Form $4m + 1$ aber das Zeichen $-$ haben, wodurch denn zugleich die Zeichen der zusammengesetzten Zahlen bestimmt werden. Hieraus aber lassen sich ferner zwey andere Reihen finden, worin alle Zahlen vorkommen. Es ist nemlich

$$\pi = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13}) \text{ ꝛc}}$$

und daraus ergiebt sich durch die Entwickelung

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \text{ ꝛc.}$$

wo die 2 das Zeichen $+$, die Prim-Zahlen von der Form $4m - 1$ ebenfalls $+$, die von der Form $4m + 1$ aber das Zeichen $-$ haben. Dann ist aber auch

$$\frac{\pi}{3} = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13}) \text{ ꝛc.}}$$

und hier giebt die Entwickelung

$$\frac{\pi}{3} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \text{ ꝛc.}$$

wo die 2 das Zeichen $-$, die Prim-Zahlen von der Form $4m - 1$ das Zeichen $+$, und die von der Form $4m + 1$ das Zeichen $-$ haben.

§. 290.

Man kann hieraus noch unzählige andere Folgen der Zeichen finden, so daß die Summe der Reihe

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \frac{1}{6}, \frac{1}{7}, \frac{1}{8}, \text{ ꝛc.}$$

bestimmbar bleibt. Da nemlich

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})\text{ etc.}}$$

ist, so bekommt man, wenn man diesen Ausdruck durch $\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}$ $= 2$ multiplicirt,

$$\pi = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})\text{ etc.}} \text{ und}$$

$$\pi = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11}\text{ etc.}$$

Hier sind die 2 und die 3 positiv, die übrigen Prim-Zahlen aber, wenn sie unter die Form $4m - 1$ gehören, negativ, und wenn sie unter dieser, $4m + 1$, begriffen sind, positiv, woraus sich denn ferner die Zeichen der zusammengesetzten Zahlen bestimmen lassen. Auf eine ähnliche Art findet man aus

$$\pi = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})\text{ etc.}}$$

wenn man diesen Ausdruck durch $\frac{1+\frac{1}{5}}{1-\frac{1}{5}} = \frac{3}{2}$ multiplicirt,

$$\frac{3\pi}{2} = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1-\frac{1}{7})(1-\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13})(1+\frac{1}{17})\text{ etc.}}$$

und hieraus ferner durch die Entwickelung

$$\frac{3\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \text{ etc.}$$

wo die 2 und die Prim-Zahlen von der Form $4m - 1$ positiv, die Prim-Zahlen von der Form $4m + 1$ aber negativ sind, bloß die 5 ausgenommen, welche ebenfalls positiv ist.

§. 291.

Auch lassen sich unzählige Reihen finden, deren Summe $= 0$ ist. Denn da [§. 277. S. 308.]

$$0 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \text{ etc.}$$

ist,

ist, so ist auch

$$0 = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13}) \text{ ꝛc.}}$$

und hieraus wird, [nach §. 276.]

$$0 = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} + \frac{1}{10} \text{ ꝛc.}$$

wo alle Prim-Zahlen das Zeichen — haben, und die zusammengesetzten Zahlen sich nach der Regel der Multiplication richten. Multiplicirt man aber diesen Ausdruck durch $\frac{1+\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}} = 3$, so ist auch

$$0 = \frac{1}{(1-\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})(1+\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13}) \text{ ꝛc.}}$$

und daraus findet man durch die Entwickelung

$$0 = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \text{ ꝛc.}$$

wo die 2 das Zeichen +, die übrigen Prim-Zahlen aber insgesammt das Zeichen — haben. Auf eine ähnliche Art ist

$$0 = \frac{1}{(1+\frac{1}{2})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})(1+\frac{1}{7})(1+\frac{1}{11})(1+\frac{1}{13}) \text{ ꝛc.}}$$

und daraus entspringt die Reihe

$$0 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} - \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} \text{ ꝛc.}$$

wo alle Prim-Zahlen, die 3 und die 5 ausgenommen, das Zeichen — haben. Ueberhaupt ist die Summe dieser Reihe $= 0$, wenn alle Prim-Zahlen, außer einigen wenigen, das Zeichen —, und hingegen $= \infty$, wenn alle Prim-Zahlen, außer einigen wenigen, das Zeichen + haben.

§. 292.

Auch haben wir oben [§. 176.] die Summe der Reihe

$$A = 1 - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{4^n} - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{8^n} + \frac{1}{10^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} \text{ ꝛc.}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist, gefunden. Da nun hieraus

$$\frac{1}{2^n}A = \frac{1}{2^n} - \frac{1}{4^n} + \frac{1}{8^n} - \frac{1}{10^n} + \frac{1}{14^n} - \text{2c.}$$

ist, so bekommt man, wenn man dieses zu dem Vorhergehenden addirt,

$$B = (1 + \frac{1}{2^n})A = 1 - \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n}$$
$$+ \frac{1}{19^n} - \frac{1}{23^n} + \frac{1}{25^n} - \text{2c.}$$

Addirt man ferner hierzu

$$\frac{1}{5^n}B = \frac{1}{5^n} - \frac{1}{25^n} + \frac{1}{35^n} - \frac{1}{55^n} \text{2c.}$$

so bekommt man

$$C = (1 + \frac{1}{5^n})B = 1 + \frac{1}{7^n} - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n}$$
$$- \frac{1}{23^n} \text{2c.}$$

so wie hieraus, wenn man davon

$$\frac{1}{7^n}C = \frac{1}{7^n} + \frac{1}{49^n} - \frac{1}{77^n} + \text{2c.}$$

subtrahirt,

$$D = (1 - \frac{1}{7^n})C = 1 - \frac{1}{11^n} + \frac{1}{13^n} - \frac{1}{17^n} + \frac{1}{19^n} - \text{2c.}$$

entspringt. Fährt man auf diesem Wege fort, so findet man endlich

$$A(1 + \frac{1}{2^n})(1 + \frac{1}{5^n})(1 - \frac{1}{7^n})(1 + \frac{1}{11^n})(1 - \frac{1}{13^n} \text{2c.} = 1$$

wo alle Prim-Zahlen, welche die Vielfachen von 6 um 1 übersteigen, das Zeichen —, diejenigen aber, welche um 1 kleiner sind, das Zeichen + haben. Es ist also

$$A = \frac{2^n}{2^n + 1} \cdot \frac{5^n}{5^n + 1} \cdot \frac{7^n}{7^n - 1} \cdot \frac{11^n}{11^n + 1} \cdot \frac{13^n}{13^n - 1} \cdot \text{2c.}$$

§. 293

§. 293.

Nun sey $n = 1$, in welchem Falle $A = \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$ wird, [§. 176.] so ist

$$\frac{\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \text{ꝛc.}$$

wo in den Zählern alle auf die 3 folgenden Prim-Zahlen vorkommen, die Nenner aber von den Zählern um 1 unterschieden, und alle durch 6 theilbar sind. Da nun [§. 277. S. 309.]

$$\frac{\pi\pi}{6} = \frac{4}{3} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \text{ ꝛc.}$$

ist, so findet man, wenn man diesen Ausdruck durch jenen dividirt,

$$\frac{\pi\sqrt{3}}{2} = \frac{9}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \text{ꝛc.}$$

wo die Nenner nicht durch 6 theilbar sind. Oder es ist

$$\frac{\pi}{2\sqrt{3}} = \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{24} \cdot \text{ꝛc. und}$$

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{22} \cdot \text{ꝛc.}$$

Folglich ist, wenn man diesen letztern Ausdruck durch den erstern dividirt,

$$\frac{4}{3} = \frac{6}{4} \cdot \frac{6}{8} \cdot \frac{12}{10} \cdot \frac{12}{14} \cdot \frac{18}{16} \cdot \frac{18}{20} \cdot \frac{24}{22} \cdot \text{ꝛc.}$$

oder

$$\frac{4}{3} = \frac{3}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{9}{10} \cdot \frac{12}{11} \cdot \text{ꝛc.}$$

und diese Brüche erhält man, wenn man die Prim-Zahlen 5, 7, 11, ꝛc. in zwey um 1 von einander unterschiedene Theile theilt, und immer den Theil, der durch 3 theilbar ist, zum Zähler nimmt.

§. 294.

Da wir oben [§. 285.] gesehen haben, daß

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \text{ ꝛc. oder}$$

$$\frac{\pi}{3} = \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \text{ ꝛc.}$$

ist, so findet man, wenn man die vorhergehenden Ausdrücke $\frac{\pi}{2\sqrt{3}}$ und $\frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$ durch diesen theilt,

$$\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{8}{9} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{14}{15} \cdot \frac{16}{15} \text{ ꝛc. und}$$

$$\frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{12}{11} \cdot \frac{18}{19} \cdot \frac{24}{23} \cdot \frac{30}{29} \text{ ꝛc.}$$

Die Brüche des ersten Ausdrucks erhält man aus den Prim-Zahlen von der Form $12m + 6 \pm 1$, und die Brüche des andern Ausdrucks aus den Prim-Zahlen von der Form $12m \pm 1$, wenn man jede derselben in zwey um 1 von einander unterschiedene Theile theilt, und die geraden Theile zu den Zählern, die ungeraden hingegen zu den Nennern nimmt.

§. 295.

Nun wollen wir noch die §. 179 gefundene Reihe betrachten, welche folgende ist:

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \text{ꝛc.} = A$$

Subtrahirt man davon

$$\frac{1}{3}A = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} - \frac{1}{21} + \frac{1}{27} + \frac{1}{33} - \text{ꝛc.}$$

so erhält man

$$\left(1 - \frac{1}{3}\right)A = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} + \frac{1}{19} - \text{ꝛc.} = B$$

Addirt

Addirt man ferner hierzu

$$\frac{1}{5}B = \frac{1}{5} - \frac{1}{25} - \frac{1}{35} + \frac{1}{55} - \text{etc.}$$

so wird

$$(1 + \frac{1}{5})B = 1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{17} \text{ etc.} = C$$

Und fährt man auf diese Art fort, so erhält man endlich

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}}(1 - \frac{1}{3})(1 + \frac{1}{5})(1 + \frac{1}{7})(1 - \frac{1}{11})(1 + \frac{1}{13})(1 - \frac{1}{17}) \times$$
$$(1 - \frac{1}{19}) \text{ etc.} = 1$$

wo es sich mit den Zeichen auf die Art verhält, daß die Prim-Zahlen von der Form $8m + 1$ oder $8m + 3$ negativ, die Prim-Zahlen hingegen von der Form $8m + 5$ oder $8m + 7$ positiv sind. Es ist folglich

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{24} \cdot \text{etc.}$$

wo alle Nenner entweder durch 8 theilbar sind, oder zu den ungerademal geraden Zahlen gehören. Da nun

$$\frac{\pi}{4} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{8} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{16} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{24} \cdot \text{etc. und}$$

$$\frac{\pi}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{10} \cdot \frac{13}{14} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{18} \cdot \frac{23}{22} \cdot \text{etc. und}$$

$$\frac{\pi\pi}{8} = \frac{3 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{5 \cdot 5}{4 \cdot 6} \cdot \frac{7 \cdot 7}{6 \cdot 8} \cdot \frac{11 \cdot 11}{10 \cdot 12} \cdot \frac{13 \cdot 13}{12 \cdot 14} \cdot \text{etc.}$$

ist, so wird

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdot \frac{11}{12} \cdot \frac{13}{12} \cdot \frac{17}{18} \cdot \frac{19}{20} \cdot \frac{23}{22} \cdot \text{etc.}$$

wo kein Nenner vorkommt, der durch 8 theilbar wäre, die gerademal geraden Zahlen aber sind da, so oft sie von den Zählern nur um 1 verschieden sind. Dividirt man nun den ersten Ausdruck durch den letzten, so wird

$$1 = \frac{2}{1} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{6}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \frac{9}{8} \cdot \frac{10}{9} \cdot \frac{11}{12} \cdot \text{ꝛc.}$$

und diese Brůche erhålt man aus den Prim-Zahlen, wenn man jede derselben in zwey um 1 unterschiedene Theile theilt, und die geraden Theile, (ausgenommen, wenn sie gerademal gerade Zahlen sind,) zu den Zählern nimmt.

§. 296.

Auf eine åhnliche Art lassen sich auch die ůbrigen Reihen, die wir oben [§. 179. f.] fůr die Ausdrůcke der Kreisbogen gefunden haben, in Faktoren verwandeln, die aus den Prim-Zahlen formirt werden, und es kônnen auf diese Art noch sehr viel andere merkwůrdige Eigenschaften sowohl dieser Faktoren, als der unendlichen Reihen gefunden werden. Da indeß die vornehmsten davon bereits angefůhrt worden sind, so wollen wir uns nicht dabey aufhalten, um noch mehrere zu finden, sondern zu einem hiermit verwandten Gegenstande fortgehen. So wie wir nemlich in dem gegenwårtigen Capitel die Zahlen nach ihrer Entstehungsart durch die Multiplication betrachtet haben: so wollen wir in dem folgenden die Entstehung derselben durch die Addition erwågen.

Sechs-