Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Sechszehntes Capitel. Von der Theilung der Zahlen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53541

Sechszehntes Capitel.

Von der Theilung der Zahlen.

§. 297.

Es sey der Ausdruck

$$(1+x^{\alpha}z)(1+x^{\beta}z)(1+x^{\gamma}z)(1+x^{\delta}z)(1+x^{\varepsilon}z)\ \text{ꝛc.}$$

gegeben, und es werde gefragt: Was derselbe für eine Form bekomme, wenn er durch die Multiplication entwickelt wird? Angenommen, daß das gesuchte Produkt =

$$1+Pz+Qz^2+Rz^3+Sz^4+\text{ꝛc.}$$

sey: so ist offenbar, daß P die Summe der Potestäten $x^{\alpha}+x^{\beta}+x^{\gamma}+x^{\delta}+x^{\varepsilon}+$ ꝛc. seyn wird. Ferner ist alsdann Q die Summe der Produkte aus allen Paaren dieser Potestäten, oder das Aggregat aller Potestäten von x, deren Exponenten Summen zweyer verschiedener Glieder dieser Reihe

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \zeta,\ \eta,\ \text{ꝛc.}$$

sind. Eben so ist R das Aggregat der Potestäten von x, deren Exponenten Summen von drey, S das Aggregat der Potestäten von x, deren Exponenten Summen von vier verschiedenen Gliedern eben dieser Reihe sind, ꝛc.

§. 298.

Die Potestäten von x, die in den Werthen der Buchstaben P, Q, R, S, ꝛc. vorkommen, haben die Einheit

zum

zum Coefficienten, wenn ihre Exponenten nur auf eine einzige Art aus α, β, γ, δ, 2c. formirt werden können; kann aber der Exponent einer solchen Potestät auf mehr denn eine Art die Summe zweyer, dreyer oder mehrerer Glieder der Reihe α, β, γ, δ, ε 2c. seyn, so hat diese Potestät einen Coefficienten, der eben so vielmal, als dies statt findet, die Einheit in sich enthält. Findet man z. B. in dem Werthe von Q den Ausdruck Nx^n, so zeigt derselbe an, daß die Zahl n auf N verschiedene Arten die Summe zweyer verschiedener Glieder der Reihe α, β, γ, δ, 2c. ist. Und kommt man bey der Entwickelung der Faktoren auf ein Glied von der Form Nx^nz^m, so zeigt der Coefficient N an, auf wie vielerley Art die Zahl n die Summe von m Gliedern der Reihe α, β, γ, δ, ε, ζ, 2c. seyn kann.

§. 299.

Wenn man also das gegebene Produkt

$$(1+x^\alpha z)(1+x^\beta z)(1+x^\gamma z)(1+x^\delta z)\text{ 2c.}$$

durch die Multiplication wirklich entwickelt, so erhellet aus dem dadurch gefundenen Ausdrucke sogleich, auf wie vielerley Arten eine gegebene Zahl die Summe von so viel verschiedenen Gliedern der Reihe α, β, γ, δ, ε, ζ, 2c. als man will, seyn kann. Will man nemlich wissen, auf wie vielerley Arten die Zahl n die Summe von m verschiedenen Gliedern jener Reihe seyn kann, so sucht man in dem entwickelten Produkte das Glied x^nz^m, und der Coefficient desselben zeigt die verlangte Zahl an.

§. 300.

Damit dieses desto deutlicher werde, so sey folgendes Produkt, dessen Faktoren der Zahl nach unendlich sind, gegeben:

(1 +

$$(1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z)\ \text{ꝛc.}$$

Entwickelt man dasselbe durch eine wirkliche Multiplication, so bekommt man:

$$\begin{aligned}
1+z\,&(x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7\\
&\qquad+x^8+x^9+\text{ꝛc.})\\
+z^2&(x^3+x^4+2x^5+2x^6+3x^7+3x^8+4x^9\\
&\qquad+4x^{10}+5x^{11}+\text{ꝛc.})\\
+z^3&(x^6+x^7+2x^8+3x^9+4x^{10}+5x^{11}+7x^{12}\\
&\qquad+8x^{13}+10x^{14}+\text{ꝛc.})\\
+z^4&(x^{10}+x^{11}+2x^{12}+3x^{13}+5x^{14}+6x^{15}+9x^{16}\\
&\qquad+11x^{17}+15x^{18}+\text{ꝛc.})\\
+z^5&(x^{15}+x^{16}+2x^{17}+3x^{18}+5x^{19}+7x^{20}+10x^{21}\\
&\qquad+13x^{22}+18x^{23}+\text{ꝛc.})\\
+z^6&(x^{21}+x^{22}+2x^{23}+3x^{24}+5x^{25}+7x^{26}+11x^{27}\\
&\qquad+14x^{28}+20x^{29}+\text{ꝛc.})\\
+z^7&(x^{28}+x^{29}+2x^{30}+3x^{31}+5x^{32}+7x^{33}+11x^{34}\\
&\qquad+15x^{35}+21x^{36}+\text{ꝛc.})\\
+z^8&(x^{36}+x^{37}+2x^{38}+3x^{39}+5x^{40}+7x^{41}+11x^{42}\\
&\qquad+15x^{43}+22x^{44}+\text{ꝛc.})\\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

Aus diesen Reihen nun läßt sich sogleich bestimmen, auf wie vielerley Arten eine gegebene Zahl aus einer gegebenen Menge von einander verschiedener Glieder dieser Reihe, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ꝛc. entstehen kann. Wollte man z. B. wissen, auf wie vielerley Art die Zahl 35 die Summe aus sieben verschiedenen Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ꝛc. seyn kann: so dürfte man nur in der Reihe, vor der z^7 als ein Multiplicator steht, die Potestät x^{35} aufsuchen, und der Coefficient dieser Dignität, 15, würde anzeigen, daß man die Zahl 35 auf 15 verschiedene Arten aus sieben verschiedenen Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ꝛc. durch die Addition erhalten könne.

§. 301.

§. 301.

Setzt man aber $z = 1$, und zieht man die ähnlichen Potestäten von x in eine Summe zusammen, oder welches eben dasselbe ist, entwickelt man diesen unendlichen Ausdruck

$$(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^3)(1 + x^4)(1 + x^5)(1 + x^6) \text{ꝛc.}$$

wodurch man die Reihe:

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + \text{ꝛc.}$$

erhält: so zeigt ein jeder Coefficient an, auf wie vielerley Arten der Exponent der Dignität von x, zu welcher er gehört, aus den Gliedern der Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ꝛc. vorausgesetzt, daß jedes nicht mehr als einmal genommen werde, durch die Addition entstehen kann. Auf diese Art erhellt, daß die Zahl 8 auf sechs verschiedene Arten durch die Addition verschiedener Zahlen erhalten wird, und diese sind

$8 = 8$	$8 = 5 + 3$
$8 = 7 + 1$	$8 = 5 + 2 + 1$
$8 = 6 + 2$	$8 = 4 + 3 + 1$

Hier ist indeß zu bemerken, daß die gegebene Zahl ebenfalls mitgerechnet werden muß, weil die Zahl der zu nehmenden Glieder nicht bestimmt wird, und also auch ein einziges genommen werden kann.

§. 302.

Man erkennt also hieraus, wie eine jede Zahl durch die Addition verschiedener Zahlen entsteht. Soll nun aber die Bedingung der Verschiedenheit wegfallen, so muß man die vorhin angenommenen Faktoren in den Nenner setzen. Es sey also der Ausdruck

$$\frac{1}{(1 - x^\alpha z)(1 - x^\beta z)(1 - x^\gamma z)(1 - x^\delta z)(1 - x^\varepsilon z) \text{ꝛc.}}$$

gege-

gegeben, und die Reihe, welche man daraus, wenn man wirklich dividirt, erhält, sey

$$1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \text{ꝛc.}$$

Hier ist offenbar, daß P das Aggregat der Potestäten von x ist, deren Exponenten in dieser Reihe

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta, \eta \text{ ꝛc.}$$

enthalten sind. Ferner ist Q das Aggregat der Potestäten von x, deren Exponenten Summen zweyer Glieder dieser Reihe sind, so aber, daß die gedachten zwey Glieder auch einander gleich seyn können. Weiter ist R das Aggregat der Potestäten von x, deren Exponenten Summen dreyer Glieder, und S das Aggregat der Potestäten von x, deren Exponenten Summen von vier Gliedern jener Reihe sind, und zwar ebenfalls so, daß diese Glieder entweder alle von einander verschieden, oder auch alle oder zum Theil einander gleich seyn können. Auf eine ähnliche Art verhält es sich mit den übrigen Coefficienten.

§. 303.

Wenn man also den ganzen Ausdruck nach allen seinen Gliedern entwickelt, und die ähnlichen Glieder zusammenzieht, so ist man im Stande daraus zu erkennen, auf wie viel verschiedene Arten eine Zahl n durch die Addition von m, einander entweder gleichen oder von einander verschiedenen, Gliedern aus der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, ꝛc. hervorgebracht werden kann. Man darf nemlich nur in dem entwickelten Ausdrucke das Glied $x^n z^m$ suchen, und den Coefficienten desselben betrachten, der N heißen mag, so daß also das ganze Glied $= N x^n z^m$ ist; denn dieser Coefficient N zeigt an, auf wie viel verschiedene Arten die Zahl n aus m Gliedern der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon$, ꝛc. durch die Addition erhalten werden kann.

§. 304.

§. 304.

Wir wollen jetzt das Gesagte auf einen vor andern merkwürdigen Fall anwenden. Es sey also der Ausdruck

$$\frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z)\text{ ꝛc.}}$$

gegeben, wofür man, wenn man ihn durch die Division entwickelt, folgendes erhält:

$$\begin{aligned}
1 &+ z\,(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 \\
&\qquad + x^8 + x^9 + \text{ꝛc.}) \\
&+ z^2(x^2 + x^3 + 2x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 3x^7 + 4x^8 \\
&\qquad + 4x^9 + 5x^{10} + \text{ꝛc.}) \\
&+ z^3(x^3 + x^4 + 2x^5 + 3x^6 + 4x^7 + 5x^8 + 7x^9 \\
&\qquad + 8x^{10} + 10x^{11} + \text{ꝛc.}) \\
&+ z^4(x^4 + x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 5x^8 + 6x^9 + 9x^{10} \\
&\qquad + 11x^{11} + 15x^{12} + \text{ꝛc.}) \\
&+ z^5(x^5 + x^6 + 2x^7 + 3x^8 + 5x^9 + 7x^{10} + 10x^{11} \\
&\qquad + 13x^{12} + 18x^{13} + \text{ꝛc.}) \\
&+ z^6(x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 5x^{10} + 7x^{11} + 11x^{12} \\
&\qquad + 14x^{13} + 20x^{14} + \text{ꝛc.}) \\
&+ z^7(x^7 + x^8 + 2x^9 + 3x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 11x^{13} \\
&\qquad + 15x^{14} + 21x^{15} + \text{ꝛc.}) \\
&+ z^8(x^8 + x^9 + 2x^{10} + 3x^{11} + 5x^{12} + 7x^{13} + 11x^{14} \\
&\qquad + 15x^{15} + 22x^{16} + \text{ꝛc.}) \\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

Aus diesen Reihen läßt sich nun sogleich bestimmen, auf wie viel verschiedene Arten eine gegebene Zahl aus einer gegebenen Menge von Gliedern dieser Reihe, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ꝛc. durch die Addition hervorgebracht werden kann. Wird z. B. gefragt, auf wie vielerley Art die Zahl 13 aus fünf ganzen Zahlen durch die Addition entstehen kann: so darf man nur das Glied $x^{13}z^5$ aufsuchen, denn dessen Coefficient 18 zeigt an, daß die gegebene Zahl 13 auf achtzehn ver=

verschiedene Arten aus fünf ganzen Zahlen durch die Addition erhalten werden kann.

§. 305.

Wenn man $z = 1$ setzt, und die ähnlichen Potestäten von x zusammenzieht, so giebt der Ausdruck

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ic.}}$$

wenn man ihn entwickelt, die Reihe

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + \text{ic.}$$

worin jeder Coefficient anzeigt, auf wie vielerley Arten der Exponent der Potestät, zu welcher er gehört, aus gleichen entweder oder ungleichen ganzen Zahlen durch die Addition hervorgebracht werden kann. So sieht man aus dem Gliede $11x^6$, daß dieses bey 6 auf eilf Arten möglich ist, und diese sind

$6 = 6$	$6 = 3 + 1 + 1 + 1$
$6 = 5 + 1$	$6 = 2 + 2 + 2$
$6 = 4 + 2$	$6 = 2 + 2 + 1 + 1$
$6 = 4 + 1 + 1$	$6 = 2 + 1 + 1 + 1 + 1$
$6 = 3 + 3$	$6 = 1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1$
$6 = 3 + 2 + 1$	

Hierbey ist zu bemerken, daß die gegebene Zahl selbst, weil sie in der gegebenen Zahl-Reihe 1, 2, 3, 4, 5, 6, ic. ebenfalls enthalten ist, auch eine Art giebt.

§. 306.

Nachdem wir dieses überhaupt angemerkt haben, so wollen wir die Art und Weise, die Menge der gedachten Zusammensetzungen gegebener Zahlen zu bestimmen, genauer zu erforschen suchen. Wir wollen hierbey von dem Falle anfangen, den wir auch vorhin zuerst berührt haben, und wobey die ganzen Zahlen, woraus die gegebenen durch die Addition hervorgebracht werden sollen, insgesammt von einander verschieden sind. Es sey also der Ausdruck

$$Z = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z) \text{ ꝛc.}$$

gegeben, und die Reihe, welche man dafür erhält, wenn man ihn entwickelt und nach den Potestäten von x ordnet, sey

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \text{ꝛc.}$$

Hier muß nun gezeigt werden, wie man die Funktionen von x, welche durch die Buchstaben $P, Q, R, S, T,$ ꝛc. angedeutet werden, auf eine leichte Art finden kann, denn dies ist es, worauf es bey der gedachten Untersuchung eigentlich ankommt.

§. 307.

Setzt man also xz anstatt z, so wird

$$(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)(1+x^5z) \text{ ꝛc.} = \frac{Z}{1+xz}$$

und es geht also der Werth des Produkts, welches wir Z genannt haben, wenn man xz für z setzt, in $\frac{Z}{1+xz}$ über; so daß daher, da

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \text{ꝛc.}$$

ist,

$$\frac{Z}{1+xz} = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \text{ꝛc.}$$

wird. Multiplicirt man also diese Gleichung durch $1+xz$ so bekömmt man

$$\begin{aligned} Z = 1 &+ Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \text{ꝛc.} \\ &+ xz + Px^2z^2 + Qx^3z^3 + Rx^4z^4 + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

und vergleicht man nunmehr diesen Werth von Z mit dem vorhergehenden, so wird $P = \frac{x}{1-x}$; $Q = \frac{Px^2}{1-x^2}$;

R =

$$R = \frac{Qx^3}{1 - x^3};\ S = \frac{Rx^4}{1 - x^4};\ \text{rc.}$$

Es sind folglich die Werthe, welche man für P, Q, R, S, rc. erhält, folgende:

$$P = \frac{x}{1 - x}$$

$$Q = \frac{x^3}{(1 - x)(1 - x^2)}$$

$$R = \frac{x^6}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)}$$

$$S = \frac{x^{10}}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)}$$

$$T = \frac{x^{15}}{(1 - x)(1 - x^2)(1 - x^3)(1 - x^4)(1 - x^5)}$$

rc.

§. 308.

Auf diese Art können wir also jede Potestäten-Reihe von x besonders darstellen, und daraus bestimmen, auf wie vielerley Arten eine gegebene Zahl aus einer gegebenen Menge anderer ganzen Zahlen durch die Addition hervorgebracht werden kann. Zugleich fällt hierbey in die Augen, daß jede dieser Reihen eine wiederkehrende Reihe seyn wird, weil sie insgesammt aus der Entwickelung einer gebrochenen Funktion von x entspringen. So giebt der erste Ausdruck $P = \frac{x}{1 - x}$ die geometrische Reihe

$$x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \text{rc.}$$

aus welcher erhellet, daß eine jede Zahl einmal in der Reihe der ganzen Zahlen enthalten ist.

§. 309.

Was den zweyten Ausdruck, $Q = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)}$ betrifft, so giebt derselbe die Reihe

$$x^3 + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 3x^7 + 3x^8 + 4x^9 + 4x^{10} + \text{rc.}$$

und darin zeigt der Coefficient eines jeden Gliedes an, auf wie viel Arten der Exponent von x in zwey ungleiche Theile getheilt werden kann. So giebt das Glied $4x^9$ zu erkennen, daß sich die Zahl 9 auf vier verschiedene Arten in zwey ungleiche Theile theilen läßt. Dividirt man die angeführte Reihe durch x^3, so erhält man zum Quotienten die Reihe, welche aus dem Bruche $\frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$ entspringt, und folgende ist:

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 4x^7 + \text{rc.}$$

Setzt man nun das allgemeine Glied dieser Reihe $= Nx^n$, so ist aus der Entstehungsart derselben klar, daß der Coefficient N anzeigt, auf wie vielerley Arten der Exponent n aus den Zahlen 1 und 2 durch die Addition hervorgebracht werden kann. Da also das allgemeine Glied der vorhergehenden Reihe $= Nx^{n+3}$ ist, so erhalten wir dadurch den Lehrsatz:

Auf eben so viel Arten, als eine Zahl n aus den Zahlen 1 und 2 durch die Addition hervorgebracht werden kann, auf eben so viel Arten läßt sich die Zahl $n + 3$ in zwey ungleiche Theile theilen.

§. 310.

Entwickelt man ferner den dritten Ausdruck $\frac{x^6}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ so erhält man dafür die Reihe

$$x^6 + x^7 + 2x^8 + 3x^9 + 4x^{10} + 5x^{11} + 7x^{12} + 8x^{13} + \text{rc.}$$

in

in welcher der Coefficient eines jeden Gliedes anzeigt, auf wie viel verschiedene Arten der Exponent der Potestät von x, zu welcher er gehört, in drey ungleiche Theile getheilt werden kann. Entwickelt man aber den Bruch

$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$ so bekommt man die Reihe

$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 4x^4 + 5x^5 + 7x^6 + 8x^7 +$ ꝛc.

und wenn man das allgemeine Glied derselben $= Nx^n$ setzt, so zeigt der Coefficient N an, auf wie viel Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2 und 3 durch die Addition erhalten werden kann. Da nun das allgemeine Glied der vorhergehenden Reihe $= Nx^{n+6}$ ist, so folgt daraus der Lehrsatz:

Auf eben so viel Arten, als eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2 und 3 durch die Addition erhalten werden kann, auf eben so viel Arten läßt sich die Zahl $n + 6$ in drey ungleiche Theile theilen läßt.

§. 311.

Der vierte Ausdruck $\frac{x^{10}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$

giebt, wenn man ihn in eine wiederkehrende Reihe auflöset,

$x^{10} + x^{11} + 2x^{12} + 3x^{13} + 5x^{14} + 6x^{15} + 9x^{16} +$ ꝛc.

und in dieser Reihe zeigt der Coefficient eines jeden Gliedes an, auf wie vielerley Arten der Exponent der neben ihm stehenden Potestät von x in vier ungleiche Theile zerfällt werden kann. Entwickelt man aber den Ausdruck

$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$ so erhält man die vorhergehende Reihe durch x^{10} dividirt, oder

$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 9x^6 +$ ꝛc.

und setzt man das allgemeine Glied dieser Reihe $= Nx^n$ so so ist bekannt, daß der Coefficient N anzeigt, auf wie viel Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 durch die Addition erhalten werden kann. Da also das allgemeine Glied der ersten Reihe $= Nx^{n+10}$ ist, so folgt hieraus der Lehrsatz:

Auf eben so viel Arten, als eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 durch die Addition hervorgebracht werden kann, auf eben so viel Arten läßt sich die Zahl $n + 10$ in vier ungleiche Theile theilen.

§. 312.

Ueberhaupt also zeigt der Coefficient N, wenn man diesen Ausdruck

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)}$$

in eine Reihe auflöset, und das allgemeine Glied dieser Reihe $= Nx^n$ setzt, an, auf wie vielerley Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 ..... m durch die Addition hervorgebracht werden kann. Löset man aber den Ausdruck

$$\frac{x^{\frac{m(m+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)}$$

in eine Reihe auf, so wird das allgemeine Glied derselben $= Nx^{n+\frac{m(m+1)}{2}}$, und darin zeigt der Coefficient N an, auf wie viel verschiedene Arten die Zahl $n + \frac{m(m+1)}{1.2}$ in m ungleiche Theile getheilt werden kann. Hieraus fließt folgender Lehrsatz:

Auf eben so viele Arten, als man eine Zahl n durch die Addition aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m hervorbringen kann, auf eben so viele Arten läßt sich auch die Zahl $n + \frac{m(m+1)}{1 \cdot 2}$ in m ungleiche Theile theilen.

§. 313.

Nachdem wir die Theilung der Zahlen in ungleiche Theile betrachtet haben, so wollen wir nun die Theilung derselben betrachten, bey welcher die Theile auch [entweder alle oder einige] einander gleich seyn können, und bey welcher der Ausdruck

$$Z = \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z) \text{ etc.}}$$

zum Grunde liegt. Wir wollen annehmen, daß wir aus diesem Ausdrucke, wenn wir wirklich dividiren,

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \text{etc.}$$

erhalten. Da nun, wenn man xz anstatt z setzt,

$$\frac{1}{(1-x^2z)(1-x^3z)(1-x^4z)(1-x^5z) \text{ etc.}} = (1-xz)Z$$

wird, so wird auch, wenn man eben diese Veränderung mit der entwickelten Reihe vornimmt,

$$(1-xz)Z = 1 + Pxz + Qx^2z^2 + Rx^3z^3 + Sx^4z^4 + \text{etc.}$$

seyn. Multiplicirt man ferner die Reihe

$$Z = 1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + Tz^5 + \text{etc.}$$

durch $1-xz$, so erhält man

$$\begin{aligned}(1-xz)Z = 1 &+ Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \text{etc.}\\ &- xz - Pxz^2 - Qxz^3 - Rxz^4 - \text{etc.}\end{aligned}$$

und vergleicht man endlich dieses mit dem Vorhergehenden, so findet man

$$P = \frac{x}{1-x};\ Q = \frac{Px}{1-x^2};\ R = \frac{Qx}{1-x^3};\ S = \frac{Rx}{1-x^4};\ \text{etc.}$$

Man erhält also für P, Q, R, S etc. folgende Werthe:

$$P = \frac{x}{1-x}$$

$$Q = \frac{x^2}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$R = \frac{x^3}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)}$$

$$S = \frac{x^4}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

ꝛc.

§. 314.

Diese Bestimmungen der Buchstaben P, Q, R, S ꝛc. unterscheiden sich von den vorher [§. 307.] gefundenen bloß darin, daß die Exponenten ihrer Zähler kleiner sind; und es stimmen daher die Reihen, die sich durch die Entwickelung der gegenwärtigen und der vorhergehenden Werthe von P, Q, R, S ꝛc. ergeben, in Ansehung der Coefficienten auf das genaueste mit einander überein. Man kann diese Uebereinstimmung schon bey einer Vergleichung der Reihen im 300ten und 304ten §. wahrnehmen, allein hier fällt zuerst der Grund davon in die Augen. Wegen dieser Uebereinstimmung müssen nun aber auch die Lehrsätze, auf welche die gegenwärtige Untersuchung führt, durchaus den obigen [§. 309. bis 312.] ähnlich seyn, und es sind dieselben also folgende:

Auf eben so viel Arten, als man eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2 durch die Addition hervorbringen kann, auf eben so viel Arten läßt sich auch die Zahl n + 2 in zwey Theile theilen.

Auf eben so viel Arten, als man eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3 durch die Addition hervorbringen kann, auf eben so viel Arten läßt sich auch die Zahl n + 3 in drey Theile theilen.

Auf

Auf eben so viel Arten, als man eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 durch die Addition hervorbringen kann, auf eben so viel Arten läßt sich auch die Zahl $n + 4$ in vier Theile theilen

Und überhaupt:

Auf eben so viel Arten, als man eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorbringen kann, auf eben so viel Arten läßt sich auch die Zahl $n + m$ in m Theile theilen.

§. 315.

Es mag also gefragt werden, entweder, auf wie viel Arten sich eine gegebene Zahl in m ungleiche Theile, oder auf wie viel Arten sie sich auf die Art in m Theile theilen lasse, daß diese Theile auch [entweder alle oder einige] einander gleich seyn können: so läßt sich jedesmal die Antwort leicht finden, wenn man weiß, auf wie viel Arten eine jede Zahl aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann. Es erhellet dies aus folgenden Lehrsätzen, die aus den obigen abgeleitet sind.

Eine jede Zahl n läßt sich auf so viel Arten in m ungleiche Theile theilen, als die Zahl $n - \frac{m(m+1)}{2}$ aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann.

Eine jede Zahl n läßt sich auf so viel Arten in m gleiche oder ungleiche Theile theilen, als die Zahl $n - m$ aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann.

Hieraus fließen ferner folgende Lehrsätze.

Eine jede Zahl n läßt sich auf so viel Arten in m ungleiche Theile theilen, als man die Zahl $n - \frac{m(m-1)}{2}$ in m gleiche oder ungleiche Theile zerfällen kann.

Eine jede Zahl n läßt sich auf so viel Arten in m gleiche oder ungleiche Theile theilen, als man die Zahl $n + \frac{m(m-1)}{2}$ in m ungleiche Theile zerfällen kann.

§. 316.

Auf wie viel Arten aber eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann? solches läßt sich durch Formirung wiederkehrender Reihen finden. Man hat nemlich zu diesem Endzwecke den Bruch

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots\ldots(1-x^m)}$$

zu entwickeln, und die daraus entspringende wiederkehrende Reihe bis zu dem Gliede Nx^n fortzusetzen, denn der Coefficient dieses Gliedes N zeigt an, auf wie viel Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann. Indeß ist dieser Weg mit viel Beschwerlichkeiten verknüpft, sobald m und n nur einigermaßen große Zahlen sind; denn die Beziehungs-Scale, welche man aus dem durch die Multiplication entwickelten Nenner erhält, besteht alsdann aus sehr vielen Gliedern, und es ist daher sehr mühsam, die Reihe bis zu einer beträchtlichen Anzahl von Gliedern fortzusetzen.

§. 317.

Man erleichtert sichs aber sehr, wenn man zuvörderst die einfachern Fälle entwickelt, indem der Fortgang von diesen zu den zusammengesetztern leicht ist. Es sey das allgemeine

meine Glied der Reihe, welche aus diesem Bruche

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)}$$

entspringt, $= Nx^n$, und das allgemeine Glied der Reihe, welche dieser Bruch

$$\frac{x^m}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^m)}$$

giebt, $= Mx^n$, wo der Coefficient M anzeigt, auf wie viel Arten die Zahl $n - m$ aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann. Subtrahirt man also diesen letzten Ausdruck von dem vorhergehenden, so bleibt

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\ldots\ldots(1-x^{m-1})}$$

und das allgemeine Glied der hieraus entspringenden Reihe ist $(N - M)x^n$, und der Coefficient $N - M$ zeigt an, auf wie viel Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, ... $(m - 1)$ durch die Addition hervorgebracht werden kann.

§. 318.

Hieraus fließt also folgende Regel:

Wenn

L die Menge der Arten, auf welche die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, ... $(m - 1)$,

M die Menge der Arten, auf welche die Zahl $n - m$ aus den Zahlen 1, 2, 3, ... m, und

N die Menge der Arten, auf welche die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann, bedeutet: so ist, wie wir gesehen haben,

$L = N - M$, und folglich $N = L + M$.

Wenn man also bereits die Menge der Arten, auf welche die

die Zahlen n und $n - m$, und zwar jene aus den Zahlen 1, 2, 3, ... $(m - 1)$, und diese aus den Zahlen 1, 2, 3, ... m durch die Addition hervorgebracht werden, kennet: so findet man daraus durchs Addiren, auf wie viel Arten die Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann. Vermittelst dieses Lehrsatzes kann man von den einfachern Fällen, die keine Schwierigkeit haben, stufenweise zu den zusammengesetztern fortgehen; und auf diese Art ist die am Ende dieses Capitels befindliche Tabelle berechnet worden, deren Gebrauch folgender ist.

Will man wissen, auf wie viel Arten die Zahl 50 in 7 ungleiche Theile getheilt werden kann: so nehme man in der ersten Vertical-Reihe die Zahl $50 - \frac{7 \cdot 8}{2} = 22$, und in der obersten Horizontal-Reihe die römische Zahl VII. Die Zahl 522, die in der Tabelle neben jener und unter dieser steht, zeigt die verlangte Menge an.

Will man hingegen wissen, auf wie viel Arten die Zahl 50 in 7 gleiche oder ungleiche Theile getheilt werden kann: so nehme man in der erstern Vertical-Reihe die Zahl $50 - 7 = 43$. Die in eben der Horizontal-Reihe in der 7ten Vertical-Reihe stehende Zahl 8946 ist diejenige, welche man suchet.

§. 319.

Die Vertical-Reihen dieser Tabelle sind zwar wiederkehrende Reihen, allein sie stehen gleichwohl mit den natürlichen Zahlen, den Trigonal- den Pyramidal-Zahlen rc. in einer sehr genauen Verbindung, und es wird nicht undienlich seyn, selbige hier etwas ausführlicher zu untersuchen. Da nemlich

45	[illegible]	[illegible]
46	64370	71505558
47	74331	82884754
48	85711	95947273
49	98609	110793525
50	113287	127784226
51	129883	147059943
52	148702	169027589
53	169919	193880931
54	193906	222118155
55	220877	253981276
56	251274	290076823
57	285373	330694154
58	323689	376577220
59	366566	428104820

Werthe der Zahl n	XIII	XIV	∞
0	1	1	1
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	5	5	5
5	7	7	7
6	11	11	11

Tabelle

zu Seite 348 und 611, welche die Werthe von n^{*m*} S. 608 Absatz 1 enthält.

Werthe der Zahl m.

Werthe der Zahl n	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	1	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	1	3	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	1	3	5	6	7	7	7	7	7	7	7	7
6	1	4	7	9	10	11	11	11	11	11	11	11
7	1	4	8	11	13	14	15	15	15	15	15	15
8	1	5	10	15	18	20	21	22	22	22	22	22
9	1	5	12	18	23	26	28	29	30	30	30	30
10	1	6	14	23	30	35	38	40	41	42	42	42
11	1	6	16	27	37	44	49	52	54	55	56	56
12	1	7	19	34	47	58	65	70	73	75	76	77
13	1	7	21	39	57	71	82	89	94	97	99	100
14	1	8	24	47	70	90	105	116	123	128	131	133
15	1	8	27	54	84	110	131	146	157	164	169	172
16	1	9	30	64	101	136	164	186	201	212	219	224
17	1	9	33	72	119	163	201	230	252	267	278	285
18	1	10	37	84	141	199	248	288	318	340	355	366
19	1	10	40	94	164	235	300	352	393	423	445	460
20	1	11	44	108	192	282	364	434	488	530	560	582
21	1	11	48	120	221	331	436	525	598	653	695	725
22	1	12	52	136	255	391	522	638	732	807	863	905
23	1	12	56	150	291	454	618	764	887	984	1060	1116
24	1	13	61	169	333	532	733	919	1076	1204	1303	1380
25	1	13	65	185	377	612	860	1090	1291	1455	1586	1686
26	1	14	70	206	427	709	1009	1297	1549	1761	1930	2063
27	1	14	75	225	480	811	1175	1527	1845	2112	2331	2503
28	1	15	80	249	540	931	1367	1807	2194	2534	2812	3036
29	1	15	85	270	603	1057	1579	2104	2592	3015	3370	3655
30	1	16	91	297	674	1206	1824	2462	3060	3590	4035	4401
31	1	16	96	321	748	1360	2093	2857	3589	4242	4802	5262
32	1	17	102	351	831	1540	2400	3319	4206	5013	5788	6290
33	1	17	108	378	918	1729	2738	3828	4904	5888	6751	7476
34	1	18	114	411	1014	1945	3120	4417	5708	6912	7972	8877
35	1	18	120	441	1115	2172	3539	5066	6615	8070	9373	10489
36	1	19	127	478	1226	2432	4011	5812	7657	9418	11004	12384
37	1	19	133	511	1342	2702	4526	6630	8824	10936	12866	14552
38	1	20	140	551	1469	3009	5102	7564	10156	12690	15021	17084
39	1	20	147	588	1602	3331	5731	8588	11648	14663	17475	19978
40	1	21	154	632	1747	3692	6430	9749	13338	16928	20298	23334
41	1	21	161	672	1898	4070	7190	11018	15224	19466	23501	27156
42	1	22	169	720	2062	4494	8033	12450	17354	22367	27169	31570
43	1	22	176	764	2233	4935	8946	14012	19720	25608	31316	36578
44	1	23	184	816	2418	5427	9953	15765	22380	29292	36043	42333
45	1	23	192	864	2611	5942	11044	17674	25331	33401	41373	48849
46	1	24	200	920	2818	6510	12241	19805	28629	38047	47420	56297
47	1	24	208	972	3034	7104	13534	22122	32278	43214	54218	64707
48	1	25	217	1033	3266	7760	14950	24699	36347	49037	61903	74287
49	1	25	225	1089	3507	8442	16475	27493	40831	55494	70515	85067
50	1	26	234	1154	3765	9192	18138	30588	45812	62740	80215	97299
51	1	26	243	1215	4033	9975	19928	33940	51294	70760	91058	111036
52	1	27	252	1285	4319	10829	21873	37638	57358	79725	103226	126560
53	1	27	261	1350	4616	11720	23961	41635	64015	89623	116792	143948
54	1	28	271	1425	4932	12692	26226	46031	71362	100654	131970	163540
55	1	28	280	1495	5260	13702	28652	50774	79403	112804	148847	185425
56	1	29	290	1575	5608	14800	31275	55974	88252	126299	167672	210005
57	1	29	300	1650	5969	15944	34082	61575	97922	141136	188556	237405
58	1	30	310	1735	6351	17180	37108	67696	108527	157564	211782	268099
59	1	30	320	1815	6747	18467	40340	74280	120092	175586	237489	302196
60	1	31	331	1906	7166	19858	43819	81457	132751	195491	266006	
61	1	31	341	1991	7599	21301	47527	89162	146520	217280	297495	
62	1	32	352	2087	8056	22856	51508	97539	161554	241279	332337	
63	1	32	363	2178	8529	24473	55748	106522	177884	267507	370733	
64	1	33	374	2280	9027	26207	60289	116263	195666	296320	413112	
65	1	33	385	2376	9542	28009	65117	126692	214944	327748	459718	
66	1	34	397	2484	10083	29941	70281	137977	235899	362198	511045	
67	1	34	408	2586	10642	31943	75762	150042	258569	399705	567377	
68	1	35	420	2700	11229	34085	81612	163069	283161	440725	629281	
69	1	35	432	2808	11835	36308	87816	176978	309729	485315	697097	

Werthe der Zahl m.

Werthe der Zahl n	XIII	XIV	XV	XVI	XVII	XVIII	XIX	XX	∞
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	2	2
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3
4	5	5	5	5	5	5	5	5	5
5	7	7	7	7	7	7	7	7	7
6	11	11	11	11	11	11	11	11	11
7	15	15	15	15	15	15	15	15	15
8	22	22	22	22	22	22	22	22	22
9	30	30	30	30	30	30	30	30	30
10	42	42	42	42	42	42	42	42	42
11	56	56	56	56	56	56	56	56	56
12	77	77	77	77	77	77	77	77	77
13	101	101	101	101	101	110	101	101	101
14	134	135	135	135	135	135	135	135	135
15	174	175	176	176	176	176	176	176	176
16	227	229	230	231	231	231	231	231	231
17	290	293	295	296	297	297	297	297	297
18	373	378	381	383	384	385	385	385	385
19	471	478	483	486	488	489	490	490	490
20	597	608	615	620	623	625	626	627	627
21	747	762	773	780	785	788	790	791	792
22	935	957	972	983	990	995	998	1000	1002
23	1158	1188	1210	1225	1236	1243	1248	1251	1255
24	1436	1478	1508	1530	1545	1556	1563	1568	1575
25	1763	1819	1861	1891	1913	1928	1939	1946	1958
26	2164	2241	2297	2339	2369	2391	2406	2417	2436
27	2637	2738	2815	2871	2913	2943	2965	2980	3010
28	3210	3345	3446	3523	3579	3621	3651	3673	3718
29	3882	4057	4192	4293	4370	4426	4468	4498	4565
30	4691	4920	5096	5231	5332	5409	5465	5507	5604
31	5635	5928	6158	6334	6469	6570	6647	6773	6842
32	6761	7139	7434	7665	7841	7976	8077	8154	8349
33	8073	8551	8932	9228	9459	9635	9770	9871	10143
34	9624	10232	10715	11098	11395	11626	11802	11937	12310
35	11424	12186	12801	13287	13671	13968	14199	14375	14883
36	13542	14499	15272	15892	16380	16765	17062	17293	17977
37	15988	17176	18148	18928	19551	20040	20425	20722	21637
38	18847	20325	21535	22518	23303	23928	24412	24803	26015
39	22142	23961	25469	26694	27684	28472	29092	29588	31185
40	25971	28212	30073	31603	32839	33834	34624	35251	37338
41	30366	33104	35401	37292	38837	40080	41078	41869	44583
42	35452	38797	41612	43951	45464	47420	48668	49668	53174
43	41269	45326	48772	51643	54012	55940	57503	58754	63261
44	47968	52888	57080	60603	63516	65907	67846	69414	75175
45	55610	61538	66634	70927	74506	77449	79851	81801	89134
46	64370	71509	77667	82898	87268	90889	93854	96271	105558
47	74331	82882	90316	96650	101982	106408	110059	113039	124754
48	85711	95943	104875	112540	119009	124418	128886	132559	147273
49	98609	110795	121510	130738	138579	145149	150614	155112	173525
50	113287	127786	140587	151685	161144	169120	175767	181274	204226
51	129883	147059	162331	175618	187013	196648	204725	211528	239943
52	148702	169027	187175	203067	216738	228364	238134	246288	281589
53	169919	193880	215415	243343	250723	264691	276493	286364	320931
54	193906	222118	247587	270105	289656	306421	320620	332557	386155
55	220877	253981	284054	310748	334051	354091	371153	385528	451276
56	251274	290071	325472	357075	384759	408687	429112	446405	526823
57	285373	330699	372311	409603	442442	470914	495332	516054	614154
58	323689	376577	425349	469300	508137	541971	571069	595872	715220
59	366566	428104	485184	536827	582691	622771	657395	686983	831820

15	15	15	15
22	22	22	22
30	30	30	30
42	42	42	42
56	56	56	56
77	77	77	77
110	101	101	101
135	135	135	135
176	176	176	176
231	231	231	231
297	297	297	297
385	385	385	385
489	490	490	490
625	626	627	627
788	790	791	792
995	998	1000	1002
1243	1248	1251	1255
1556	1563	1568	1575
1928	1939	1946	1958
2391	2406	2417	2436
2943	2965	2980	3010
3621	3651	3673	3718
4426	4468	4498	4565
5409	5465	5507	5604
6570	6647	6773	6842
7976	8077	8154	8349
9635	9770	9871	10143
11626	11802	11937	12310
13968	14199	14375	14883
16765	17062	17293	17977
20040	20425	20722	21637
23928	24412	24803	26015
28472	29092	29588	31185
33834	34624	35251	37338
40080	41078	41869	44583
47420	48668	49668	53174
55940	57503	58754	63261
65907	67846	69414	75175
77449	79854	81801	89134

nemlich der Bruch $\frac{1}{(1-x)(1-xx)}$ diese Reihe

$$1 + x + 2x^2 + 2x^3 + 3x^4 + 3x^5 + \text{etc.}$$

und der Bruch $\frac{x}{(1-x)(1-xx)}$ also folgende Reihe

$$x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 3x^6 + \text{etc.}$$

giebt: so erhält man, wenn man diese beyden Reihen addirt,

$$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + 6x^5 + 7x^6 + \text{etc.}$$

oder die Reihe, welche durch die Division aus dem Bruche $\frac{1+x}{(1-x)(1-xx)} = \frac{1}{(1-x)^2}$ entsteht; und hieraus erhellet, daß die Zahlen in den Gliedern dieser letzten Reihe die Reihe der natürlichen Zahlen geben. Wenn man daher aus der zweyten Reihe der Tabelle immer zwey und zwey Zahlen nimmt, und dieselben addirt, so erhält man die Reihe der natürlichen Zahlen, wobey $x = 1$ ist.

$$1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + 6 + 6 + \text{etc.}$$
$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + \text{etc.}$$

Umgekehrt findet man aus der Reihe der natürlichen Zahlen die erste Reihe, wenn man jedes Glied derselben von jedem folgenden Gliede der unter ihr stehenden Reihe abzieht.

§. 320.

Die dritte Vertical-Reihe entspringt aus dem Bruche $\frac{1}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)}$. Da nun $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{(1+x)(1+x+xx)}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)}$ ist, so ist offenbar, daß man durch die Addition je drey und dreyer Glieder dieser Reihe, und durch die abermalige Addition je zwey und zweyer Glie-

der

der der durch die erste Addition erhaltenen Reihe die Trigonal-Zahlen bekommen werde. Dies bestätiget sich durch folgendes Exempel

$1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 12 + 14 + 16 + 19 +$ ꝛc.
$1 + 2 + 4 + 6 + 9 + 12 + 16 + 20 + 25 + 30 + 36 + 42 + 49 +$ ꝛc.
$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + 66 + 78 + 91 +$ ꝛc.

Umgekehrt sieht man hier auch, wie die oben stehende Reihe aus der Reihe der Trigonal-Zahlen erhalten werden kann.

§. 321.

Auf eine ähnliche Art ist auch, da die vierte Vertical-Reihe aus dem Bruche $\frac{1}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)}$ entspringt, $\frac{(1+x)(1+x+xx)(1+x+xx+x^3)}{(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)} = \frac{1}{(1-x)^4}$.
Wenn also in der vierten Vertical-Reihe je vier und vier Glieder addirt, ferner in der auf diese Art gefundenen Reihe die Summen je drey und dreyer Glieder gesucht, endlich in der hierdurch entstandenen Reihe immer je zwey und zwey Glieder zusammengenommen werden: so entspringt daraus die Reihe der Pyramidal-Zahlen, wie folgendes Exempel zeigt.

$1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 15 + 18 + 23 + 27 +$ ꝛc.
$1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + 23 + 31 + 41 + 53 + 67 + 83 +$ ꝛc.
$1 + 3 + 7 + 13 + 22 + 34 + 50 + 70 + 95 + 125 + 161 + 203 +$ ꝛc.
$1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + 165 + 220 + 286 + 364 +$ ꝛc.

Auf eine ähnliche Art führt die fünfte Vertical-Reihe zu den Pyramidal-Zahlen von der zweyten Ordnung, die sechste zu denen von der dritten Ordnung, ꝛc.

§. 322.

Umgekehrt kann man aus den figurirten Zahlen die Reihen finden, welche in der Tabelle vorkommen, und zwar

zwar durch die Operationen welche die folgenden Exempel zu erkennen geben.

1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + ꝛc.
1 + 1 + 2 + 2 + 3 + 3 + 4 + 4 + 5 + 5 + ꝛc. II

---

1 + 3 + 6 + 10 + 15 + 21 + 28 + 36 + 45 + 55 + ꝛc.
1 + 2 + 4 + 6 + 9 + 12 + 16 + 20 + 25 + 30 + ꝛc.
1 + 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 7 + 8 + 10 + 12 + ꝛc. III

---

1 + 4 + 10 + 20 + 35 + 56 + 84 + 120 + 165 + 220 + ꝛc.
1 + 3 + 7 + 13 + 22 + 34 + 50 + 70 + 95 + 125 + ꝛc.
1 + 2 + 4 + 7 + 11 + 16 + 23 + 31 + 41 + 53 + ꝛc.
1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 6 + 9 + 11 + 15 + 18 + ꝛc. IV

---

1 + 5 + 15 + 35 + 70 + 126 + 210 + 330 + 495 + 715 + ꝛc.
1 + 4 + 11 + 24 + 46 + 80 + 130 + 200 + 295 + 420 + ꝛc.
1 + 3 + 7 + 14 + 25 + 41 + 64 + 95 + 136 + 189 + ꝛc.
1 + 2 + 4 + 7 + 12 + 18 + 27 + 38 + 53 + 71 + ꝛc.
1 + 1 + 2 + 3 + 5 + 7 + 10 + 13 + 18 + 23 + ꝛc. V

ꝛc.

Hier enthalten die ersten Reihen allenthalben die figurirten Zahlen, und wenn man von einem jeden Gliede derselben das vorhergehende Glied der zweyten Reihe abzieht, so bekommt man die zweyte Reihe. Zieht man ferner von einem jeden Gliede dieser zweyten Reihe die Summe der beyden vorhergehenden Glieder der dritten Reihe ab, so erhält man dadurch die dritte Reihe. Auf eben diese Art findet man, wenn man fortfährt, von jedem Gliede der vorhergehenden Reihe die Summe von drey, vier fünf vorhergehenden Gliedern ꝛc. der folgenden Reihe abzuziehen, die übrigen Reihen, bis man auf eine Reihe kommt, die von

1

$1 + 1 + 2$ anfängt, welches denn jedesmal die in der Tabelle enthaltene Reihe ist.

§. 323.

Die Vertical-Reihen der Tabelle fangen alle auf einerley Art an, und haben immer mehrere Glieder mit einander gemein; woraus erhellet, daß sie im Unendlichen durchaus mit einander übereinstimmen werden. Man erhält aber für die ∞ste Vertical-Reihe diejenige Reihe, die aus dem Bruche

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\text{ ꝛc.}}$$

entspringt; und da diese eine wiederkehrende Reihe ist, so kommt es vorzüglich auf die Betrachtung des Nenners an, um daraus die Beziehungs-Scale zu finden. Multiplicirt man aber die Faktoren des Nenners nach und nach mit einander, so kommt

$$1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26}$$
$$- x^{35} - x^{40} + x^{51} + \text{ꝛc.}$$

und untersucht man diese Reihe genau, so findet sich, daß darin keine andere Potestäten von x vorkommen als solche, die unter der allgemeinen Form $\frac{3nn \pm n}{2}$ begriffen sind, und daß die gedachten Potestäten, wenn n eine ungerade Zahl ist, negativ, wenn aber n eine gerade Zahl ist, positiv sind.

§. 324.

Da also die Beziehungs-Scale

$+1, +1, 0, 0, -1, 0, -1, 0, 0, 0, 0, +1, 0, 0, +, 1, 0, 0,$ ꝛc.

ist, so ist die wiederkehrende Reihe, die aus dem Bruche

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)(1-x^7)\ \text{rc.}}$$

entspringt, folgende:

$$1+x+2x^2+3x^3+5x^4+7x^5+11x^6+15x^7+22x^8+$$
$$30x^9+42x^{10}+56x^{11}+77x^{12}+101x^{13}+135x^{14}+$$
$$176x^{15}+231x^{16}+297x^{17}+385x^{18}+490x^{19}+$$
$$627x^{20}+792x^{21}+1002x^{22}+1250x^{23}+1570x^{24}+\text{rc.}$$

In dieser Reihe zeigt jeder Coefficient an, auf wie viel Arten der Exponent der Potestät von x, zu welcher er gehört, aus den ganzen Zahlen durch die Addition hervorgebracht werden kann. So läßt sich die Zahl 7 auf funfzehn Arten durch die Addition hervorbringen.

$7=7$	$7=4+2+1$	$7=3+1+1+1+1$
$7=6+1$	$7=4+1+1+1$	$7=2+2+2+1$
$7=5+2$	$7=3+3+1$	$7=2+2+1+1+1$
$7=5+1+1$	$7=3+2+2$	$7=2+1+1+1+1+1$
$7=4+3$	$7=3+2+1+1$	$7=1+1+1+1+1+1+1$

§. 325.

Wenn man aber dies Produkt

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6)\ \text{rc.}$$

entwickelt, so erhält man die Reihe:

$$1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+5x^7+6x^8+$$
$$8x^9+10x^{10}+\text{rc.}$$

und darin zeigt jeder Coefficient an, auf wie viel Arten der Exponent der Potestät von x, zu welcher er gehört, durch die Addition ungleicher Zahlen entstehen kann. So läßt sich die Zahl 9 auf acht Arten durch die Addition ungleicher Zahlen hervorbringen.

$9=9$	$9=6+2+1$
$9=8+1$	$9=5+4$
$9=7+2$	$9=5+3+1$
$9=6+3$	$9=4+3+2$

§. 326.

Um diese Formen mit einander zu vergleichen, so sey

$$P = (1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6) \text{ etc.}$$

und

$$Q = (1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)(1+x^5)(1+x^6) \text{ etc.}$$

Alsdann ist

$$PQ = (1-x^2)(1-x^4)(1-x^6)(1-x^8)(1-x^{10})(1-x^{12}) \text{ etc.}$$

Da nun alle diese Faktoren in P enthalten sind, so dividire man P durch PQ, wodurch man

$$\frac{1}{Q} = (1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9) \text{ etc.}$$

und also

$$Q = \frac{1}{(1-x)(1-x^3)(1-x^5)(1-x^7)(1-x^9) \text{ etc.}}$$

erhält. Entwickelt man aber diesen Bruch, so ergiebt sich daraus eine Reihe, in welcher der Coefficient eines jeden Gliedes anzeigt, auf wie viel Arten der Exponent der in diesem Gliede befindlichen Potestät von x aus den ungeraden Zahlen durch die Addition hervorgebracht werden kann. Da nun dieser Ausdruck demjenigen gleich ist, den wir in dem vorhergehenden §. betrachtet haben, so folgt hieraus der Lehrsatz:

Auf eben so viel Arten, als sich eine gegebene Zahl aus allen ganzen aber unter einander ungleichen Zahlen durch die Addition hervorbringen läßt, auf eben so viel Arten läßt sich diese Zahl auch durch die Addition der einander entweder gleichen oder ungleichen ungeraden Zahlen erhalten.

§. 327.

Da also, wie wir vorhin gesehen haben,

$$P = 1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - x^{35} - x^{40} + \text{ etc.}$$

ist,

ist, so wird, wenn man xx anstatt x setzt,

$$PQ = 1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{24} - x^{30} + x^{44} + x^{52} - \text{etc.}$$

und also, wenn man diese Formel durch jene dividirt, $Q =$

$$\frac{1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{24} - x^{30} + \text{etc.}}{1 - x - x^2 + x^5 + x^7 - x^{12} - x^{15} + x^{22} + x^{26} - \text{etc.}}$$

Es ist daher auch Q eine wiederkehrende Reihe, die aus der Reihe $\frac{1}{P}$ entsteht, wenn man dieselbe mit $1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - x^{24} - \text{etc.}$ multiplicirt. Da nemlich aus §. 324.

$$\frac{1}{P} = 1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + \text{etc.}$$

ist, so wird diese Reihe, wenn man sie mit

$$1 - x^2 - x^4 + x^{10} + x^{14} - \text{etc.}$$

multiplicirt, in folgende,

$$\begin{aligned} &1 + x + 2x^2 + 3x^3 + 5x^4 + 7x^5 + 11x^6 + 15x^7 + 22x^8 + 30x^9 + \text{etc.} \\ &\quad - x^2 - x^3 - 2x^4 - 3x^5 - 5x^6 - 7x^7 - 11x^8 - 15x^9 - \text{etc.} \\ &\quad\quad - x^4 - x^5 - 2x^6 - 3x^7 - 5x^8 - 7x^9 - \text{etc.} \end{aligned}$$

oder in diese,

$$1 + x + x^2 + 2x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 4x^6 + 5x^7 + 6x^8 + 8x^9 + \text{etc.} = Q$$

verwandelt. Wenn daher die Formation der Zahlen durch die Addition gleicher sowohl als ungleicher Zahlen bekannt ist: so kann man daraus die Formation der Zahlen durch die Addition der ungeraden Zahlen herleiten.

§. 328.

Nun sind noch einige merkwürdige Fälle von dieser Art zu betrachten übrig, deren Entwickelung bey der Untersuchung der Natur der Zahlen nicht ohne allen Nutzen ist. Man erwäge also folgenden Ausdruck:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32}) \text{ etc.}$$

in welchem jeder folgende Exponent von x das Doppelte des vorhergehenden ist. Entwickelt man denselben, so findet man die Reihe

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+ \text{ etc.};$$

da es aber zweifelhaft seyn kann, ob diese Reihe bis ins Unendliche nach dem Gesetze der geometrischen Progressionen fortgehe, so wollen wir dieselbe weiter untersuchen. Es sey also

$$P=(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16}) \text{ etc.}$$

und die Reihe, die sich hieraus durch die Entwickelung der Faktoren ergiebt, sey

$$P=1+\alpha x+\beta x^2+\gamma x^3+\delta x^4+\varepsilon x^5+\zeta x^6+\eta x^7+\vartheta x^8+ \text{ etc.}$$

Hier fällt in die Augen, daß, wenn man xx anstatt x setzt, das Produkt

$$(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)(1+x^{16})(1+x^{32}) \text{ etc.} = \frac{P}{1+x}$$

und, wenn man in der angenommenen Reihe eben die Veränderung vornimmt,

$$\frac{P}{1+x} = 1+\alpha x^2+\beta x^4+\gamma x^6+\delta x^8+\varepsilon x^{10}+\zeta x^{12}+ \text{ etc.}$$

seyn wird. Multiplicirt man nun aber durch $1+x$, so wird

$$P=1+x+\alpha x^2+\alpha x^3+\beta x^4+\beta x^5+\gamma x^6+\gamma x^7+\delta x^8+\delta x^9+ \text{ etc.}$$

und vergleicht man diesen Werth von P mit dem obigen, so wird

$$\alpha=1;\ \beta=\alpha;\ \gamma=\alpha;\ \delta=\beta;\ \varepsilon=\beta;\ \zeta=\gamma;\ \eta=\gamma; \text{ etc.}$$

Es sind daher alle Coefficienten der angenommenen Reihe $=1$, und es giebt folglich auch das Produkt P, wenn man selbiges entwickelt, die geometrische Reihe

$$1+x+x^2+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+x^8+ \text{ etc.}$$

§. 329.

§. 329.

Da also hier alle Potestäten von x, aber jede nicht mehr als einmal vorkommt, so folgt aus der Form des Produkts $(1 + x)(1 + x^2)(1 + x^4)(1 + x^8)$ ꝛc. daß sich eine jede ganze Zahl aus den Gliedern der durch 2 aufsteigenden geometrischen Progression 1, 2, 4, 8, 16, 32, ꝛc. und zwar so, daß man jedes davon nur einmal nimmt, durch die Addition hervorbringen läßt, und daß solches nur auf eine einzige Art geschehen kann. Man kennt diese Eigenschaft beym Wägen. Hat man nemlich Gewichte von 1, 2, 4, 8, 16, 32 ꝛc. ℔, so kann man damit, vorausgesetzt, daß keine Theile vom ℔ vorkommen, jede Last wägen. So kann man mit diesen zehn Gewichten 1 ℔, 2 ℔, 4 ℔, 8 ℔, 16 ℔, 32 ℔, 64 ℔, 128 ℔, 256 ℔, 512 ℔ jede Last bis zu 1024 ℔, und wenn noch ein Gewicht von 1024 ℔ hinzukommt, jede Last bis zu 2048 ℔ wägen.

§. 330.

Man pflegt aber in den Anleitungen zum Wägen außerdem auch zu zeigen, wie man mit noch weniger Gewichten, davon nemlich jedes größere dreymal größer ist, als das zunächst kleinere, oder mit 1, 3, 9, 27, 81, ꝛc. ℔, jede Last wägen könne, wenn dabey keine Brüche vom ℔ vorkommen. Hierbey werden aber die Gewichte nicht in die eine Wagschale allein, sondern, so wie es die Umstände erfordern, bald in die eine bald in die andere gelegt. Es gründet sich also dieses Verfahren auf den Satz, daß man aus den Gliedern einer durch 3 aufsteigenden geometrischen Progression 1, 3, 9, 27, 81, ꝛc. wenn man dieselben bald zu einander addirt bald von einander subtrahirt, alle Zahlen hervorbringen kann. Es ist nemlich

$1 = 1$	$5 = 9 - 3 - 1$	$9 = 9$
$2 = 3 - 1$	$6 = 9 - 3$	$10 = 9 + 1$
$3 = 3$	$7 = 9 - 3 + 1$	$11 = 9 + 3 - 1$
$4 = 3 + 1$	$8 = 9 - 1$	$12 = 9 + 3$

ꝛc.

§. 331.

Um den Grund hiervon zu zeigen betrachte ich das unendliche Produkt

$$(x^{-1} + 1 + x^{1})(x^{-3} + 1 + x^{3})(x^{-9} + 1 + x^{9})(x^{-27} + 1 + x^{-27}) \text{ꝛc.}$$

welches entwickelt keine andere Potestäten von x enthält, als solche, deren Exponenten aus den Zahlen 1, 3, 9, 27, 81, ꝛc. durch die Addition und Subtraction hervorgebracht werden können. Ob aber darin alle Potestäten von x und zugleich jede nicht mehr als einmal vorkomme? erforsche ich so. Es sey

$$P = \text{ꝛc.} + cx^{-3} + bx^{-2} + ax^{-1} + 1 + \alpha x^{1} + \beta x^{2} + \gamma x^{3} + \delta x^{4} + \varepsilon x^{5} + \text{ꝛc.}$$

so ist klar, daß, wenn man x^3 anstatt x setzt,

$$\frac{P}{x^{-1} + 1 + x^{1}} = bx^{-6} + ax^{-3} + 1 + \alpha x^{3} + \beta x^{6} + \gamma x^{9} + \text{ꝛc.}$$

und folglich

$$P = \text{ꝛc.} + ax^{-4} + ax^{-3} + ax^{-2} + x^{-1} + 1 + x + \alpha x^{2} + \alpha x^{3} + \alpha x^{4} + \beta x^{5} + \beta x^{6} + \beta x^{7} + \text{ꝛc.}$$

seyn wird. Vergleicht man aber diesen Ausdruck mit dem angenommenen, so findet man

$$\alpha = 1;\ \beta = \alpha;\ \gamma = \alpha;\ \delta = \alpha;\ \varepsilon = \beta;\ \zeta = \beta;\ \text{ꝛc. und}$$
$$a = 1;\ b = a;\ c = a;\ d = a;\ e = b;\ \text{ꝛc.}$$

Es ist folglich

$$P = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6 + x^7 + \text{rc.}$$
$$+ x^{-1} + x^{-2} + x^{-3} + x^{-4} + x^{-5} + x^{-6} + x^{-7} + \text{rc.}$$

und man erkennet hieraus, daß alle Potestäten von x sowohl die mit positiven als die mit negativen Exponenten vorkommen, so wie auch, daß man alle Zahlen aus den Zahlen einer durch 3 aufsteigenden geometrischen Progression durch die Addition und Subtraction hervorbringen kann, und endlich, daß man solches auf nicht mehr als auf eine Art zu thun im Stande ist.