Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Siebenzehntes Capitel. Von dem Nutzen der wiederkehrenden Reihen bey der Erfindung der Wurzeln der Gleichungen.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53541

Siebenzehntes Capitel.

Von dem Nutzen der wiederkehrenden Reihen bey der Erfindung der Wurzeln der Gleichungen.

§. 332.

Es hat der berühmte Daniel Bernoulli in den Commentarien der Petersburgischen Academie der Wissenschaften im dritten Bande gezeigt, was für einen großen Nutzen die wiederkehrenden Reihen bey der Erfindung der Wurzeln der Gleichungen von jeglichem Grade gewähren, indem er daselbst lehret, wie man sich den Wurzeln jeder algebraischen Gleichung, die Anzahl ihrer Dimensionen mag seyn, welche sie will, vermittelst der wiederkehrenden Reihen zu nähern im Stande ist. Da diese Erfindung häufig mit großem Vortheile angewendet werden kann, so wollen wir dieselbe jetzt genauer betrachten, und die Fälle zu bestimmen suchen, in welchen solches möglich ist. Denn oft ereignet es sich wider alle Erwartung, daß man auf diesem Wege keine von den Wurzeln der Gleichung entdeckt. Um also diese Methode nach ihrem ganzen Umfange und nach allen ihren Vortheilen kennen zu lernen, wollen wir den Grund derselben in den Eigenschaften der wiederkehrenden Reihen selbst aufsuchen.

§. 333.

Da jede wiederkehrende Reihe aus der Entwickelung eines rationalen Bruchs entspringt, so sey dieser Bruch

=

$$= \frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + ez^4 + \text{ꝛc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ꝛc.}}$$

und die daraus entspringende wiederkehrende Reihe sey

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{ꝛc.}$$

wo also die Coefficienten A, B, C, D, ꝛc. so bestimmt werden, daß

$$A = a$$
$$B = \alpha A + b$$
$$C = \alpha B + \beta A + c$$
$$D = \alpha C + \beta B + \gamma A + d$$
$$E = \alpha D + \beta C + \gamma B + \delta A + e$$
ꝛc.

Das allgemeine Glied aber, oder den Coefficienten der Potestät z^n findet man, wenn man den gegebenen Bruch in die einfachen Brüche auflöset, deren Nenner die Faktoren des Nenners $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 -$ ꝛc. sind, so wie solches im dreyzehnten Capitel gezeigt worden ist.

§. 334.

Es hängt aber die Form des allgemeinen Gliedes vorzüglich von der Natur der einfachen Faktoren des Nenners $1 - \alpha z - \beta z^3 -$ ꝛc. und davon ab, ob diese einfachen Faktoren reell oder imaginär, und ob sie insgesammt von einander verschieden, oder ob zwey oder mehrere davon einander gleich sind. Damit wir also diese verschiedenen Fälle nach der Ordnung betrachten, so wollen wir zuvörderst den Fall untersuchen, wo alle einfache Faktoren des Nenners reell und unter einander ungleich sind. Es seyen also die gesammten einfachen Faktoren des Nenners

$$(1 - pz)(1 - qz)(1 - rz)(1 - sz) \text{ ꝛc.}$$

und die einfachen Brüche, worin hiernach der gegebene Bruch aufgelöset wird, seyen

$$\frac{\mathfrak{A}}{1-pz} + \frac{\mathfrak{B}}{1-qz} + \frac{\mathfrak{C}}{1-rz} + \frac{\mathfrak{D}}{1-sz} + \text{rc.}$$

Hat man diese gefunden, so ist das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihe, die aus dem gegebenen Bruche entspringt, =

$$z^n(\mathfrak{A}p^n + \mathfrak{B}q^n + \mathfrak{C}r^n + \mathfrak{D}s^n + \text{rc.})$$

und dieses wollen wir $= Pz^n$ setzen. Es soll nemlich P der Coefficient der Potestät z^n, und die Coefficienten der folgenden Potestäten daher diese, Q, R, S, rc. seyn, so daß also die wiederkehrende Reihe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots + Pz^n + Qz^{n+1} + Rz^{n+2} + \text{rc.}$$

werden wird.

§. 335.

Nun wollen wir n als eine sehr große Zahl betrachten, oder annehmen, daß die wiederkehrende Reihe bis auf eine große Anzahl von Gliedern fortgesetzt sey. Da nun die Potestäten ungleicher Zahlen einander desto ungleicher werden, je höher man diese Potestäten nimmt, so wird alsdann auch der Unterschied unter den Potestäten $\mathfrak{A}p^n$, $\mathfrak{B}q^n$, $\mathfrak{C}r^n$, rc. so groß seyn, daß diejenige, die aus der größten von den Zahlen p, q, r, rc. entspringt, alle übrigen an Größe weit übertreffen wird, und diese übrigen gegen jene ganz verschwinden werden, wenn n eine unendlich große Zahl ist. Da also die Zahlen p, q, r, rc. einander ungleich sind, so wird, wenn wir p als die größte unter ihnen betrachten, und n unendlich groß annehmen, $P = \mathfrak{A}p^n$, für einen sehr großen Werth für n aber nur beynahe $P = \mathfrak{A}p^n$ seyn. Auf eine ähnliche Art wird aber auch $Q = \mathfrak{A}p^{n+1}$, und also $\frac{Q}{P} = p$ seyn. Wenn man daher die wiederkehrende Reihe bis zu einer beträchtlichen Anzahl von Gliedern fortgesetzt

hat,

hat, so findet man durch die Division des Coefficienten eines jeden Gliedes durch den Coefficienten des vorhergehenden Gliedes einen Werth, welcher dem Werthe der größten Zahl p nahe kommt.

§. 336.

Wenn also der Nenner des gegebenen Bruchs

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{ꝛc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ꝛc.}}$$

lauter einfache reelle und einander ungleiche Faktoren hat, so kann man aus der wiederkehrenden Reihe, die aus ihm entspringt, einen von diesen einfachen Faktoren, nemlich $1 - pz$, oder den Faktor finden, in welchem der Buchstabe p den größten Werth hat. Hierbey kommen die Coefficienten des Zählers a, b, c, d, ꝛc. nicht in Anschlag, sondern man findet, man mag diese Coefficienten annehmen wie man will, endlich eben denselben Werth des größten Buchstabens p. Ganz genau und der Wahrheit völlig gemäß erhält man zwar den Werth von p erst dann, wenn man die wiederkehrende Reihe bis ins Unendliche fortgesetzt hat; indeß wenn solches nur bis zu einer beträchtlichen Anzahl von Gliedern geschehen ist, so ergiebt sich doch der Werth von p immer genauer, je größer die Zahl der Glieder gemacht worden ist, und je mehr der Buchstabe p die übrigen q, r, s, ꝛc. an Größe übertrifft. Uebrigens ist es gleich, ob der Buchstabe p das Zeichen + oder das Zeichen — vor sich hat, weil seine Potestäten in beyden Fällen in einerley Maaße wachsen.

§. 337.

Wie man dieses zur Erfindung der Wurzeln jeder algebraischen Gleichung anwenden könne? ist leicht einzusehen, weil

weil sich, wenn man die Faktoren des Nenners $1 - \alpha z - \beta zz - \gamma z^3 - \delta z^4 -$ ꝛc. kennt, auch die Wurzeln der Gleichung

$$1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ꝛc.} = 0$$

angeben lassen. Ist z. B. $1 - pz$ ein Faktor jenes Nenners, so ist auch $z = \frac{1}{p}$ eine Wurzel dieser Gleichung. Da man also aus der wiederkehrenden Reihe die größte Zahl p findet, so erhält man auch eben dadurch die kleinste Wurzel der Gleichung $1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 -$ ꝛc. $= 0$. Oder setzt man $z = \frac{1}{x}$, so daß diese Gleichung entsteht

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \text{ꝛc.} = 0$$

so findet man auf eben diesem Wege die größte Wurzel dieser Gleichung $x = p$.

§. 338.

Ist also die Gleichung

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \text{ꝛc.} = 0$$

gegeben, und sind deren Wurzeln insgesammt reell und unter einander ungleich: so findet man die größte dieser Wurzeln auf folgende Art. Man formirt aus den Coefficienten der gegebenen Gleichung einen Bruch

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{ꝛc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ꝛc.}}$$

und entwickelt aus demselben, indem man den Zähler willkürlich annimmt, eine wiederkehrende Reihe, oder, welches eben das ist, man nimmt die ersten Glieder der wiederkehrenden Reihe nach Belieben an. Ist nun dieselbe

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1}$$

so giebt der Bruch $\frac{Q}{P}$ den Werth der größten Wurzel x in

der

der gegebenen Gleichung, und zwar desto genauer, je größer die Zahl n ist.

Erstes Exempel.

Es ist die Gleichung $xx - 3x - 1 = 0$ gegeben; man soll ihre größte Wurzel finden.

Man formire den Bruch $\frac{a + bz}{1 - 3z - zz}$, woraus, wenn man die beyden ersten Glieder 1, 2 seyn läßt, folgende wiederkehrende Reihe entspringt:

1, 2, 7, 23, 76, 251, 829, 2738, rc.

und es ist also $\frac{2738}{829}$ der Werth der größten Wurzel, näherungsweise bestimmt. In Decimal-Brüchen ist

$$\frac{2738}{829} = 3,3027744;$$

und genau ist die größte Wurzel =

$$\frac{3 + \sqrt{13}}{2} = 3,3027756$$

so daß sich hier also nur ein Unterschied von 0,000001 findet. Uebrigens ist zu bemerken, daß die Brüche $\frac{Q}{P}$ wechselsweise kleiner und größer sind als die wahre Wurzel.

Zweytes Exempel.

Es sey die Gleichung $3x - 4x^3 = \frac{1}{2}$ gegeben, deren Wurzeln die Sinus dreyer Bogen sind, die dreyfach genommen den Sinus $= \frac{1}{2}$ haben. [§. 236.]

Nachdem man die Gleichung auf diese Form, $0 = 1 - 6x * + 8x^3$, gebracht hat, so suche man, um in den ganzen Zahlen zu bleiben, die kleinste Wurzel, so daß es nicht nöthig ist, $\frac{1}{z}$ für x zu setzen. Man formire also den Bruch

$$\frac{a + bx + cxx}{1 - 6x \ * \ + 8x^3}$$

welcher, wenn man zu den drey ersten Gliedern 0, 0, 1 annimmt, weil dabey die Rechnung am leichtesten ist, und die Potestäten von x wegläßt, weil man bloß die Coefficienten braucht, folgende Reihe giebt:

0, 0, 1, 6, 36, 208, 1200, 6912, 39808, 229248.

Hieraus ergiebt sich für den näherungsweise bestimmten Werth der kleinsten Wurzel $\frac{39808}{229248} = \frac{311}{1791} = 0,1736515$. Dies sollte nun der Sinus eines Winkel von 10° seyn, er ist aber um $\frac{33}{10000000}$ zu groß, weil dieser Sinus in den Tafeln $= 0,1736482$ ist. Man findet aber diese Wurzel viel leichter, wenn man $x = \frac{1}{2}y$ setzt, wodurch man die Gleichung $1 - 3y * + y^3 = 0$ erhält. Denn behandelt man diese Gleichung auf eine ähnliche Art, so bekommt man die Reihe

0, 0, 1, 3, 9, 26, 75, 216, 622, 1791, 5157 ꝛc.

und es ist also die kleinste Wurzel derselben y ohngefähr $= \frac{1791}{5157} = \frac{199}{573} = 0,3472949$. Hieraus aber wird $x = \frac{1}{2}y = 0,1736474$, welcher Werth viel genauer ist als der vorhergehende

Drittes Exempel.

Würde von eben der Gleichung, $0 = 1 - 6x * + 8x^3$, die größte Wurzel verlangt:

so setze man $x = \frac{y}{2}$, wodurch man $y^3 * - 3y + 1 = 0$ erhält. Da nun die größte Wurzel dieser Gleichung aus einer wiederkehrenden Reihe gefunden wird, deren Beziehungshungs-Scale 0, 3, — 1, ist: so ist diese wiederkehrende Reihe, wenn man die Anfangs-Glieder derselben nach Belieben annimmt,

1, 1, 1, 2, 2, 5, 4, 13, 7, 35, 8, 98, — 11, ꝛc.

Weil man aber in dieser Reihe endlich auf negative Glieder kommt, so ist dies ein Kennzeichen, daß die gesuchte größte Wurzel negativ ist, und in der That ist $x = -$ sin. $70^\circ = -0,9396926$. Man muß daher hierauf bey den Anfangs-Gliedern Rücksicht nehmen, wie z. B. hier geschehen ist,

$1 - 2 + 4 - 7 + 14 - 25 + 49 - 89 + 172 - 316 + 605 -$ ꝛc.

Hieraus würde nun $y = \frac{-605}{316}$, und $x = \frac{-605}{632} = -0,957$, seyn, allein dieser Werth entfernt sich von dem wahren sehr.

§. 339.

Der Grund von dieser Abweichung liegt darin, weil die Wurzeln der gegebenen Gleichung sin. 10°, sin 50°, und $-$ sin. 70° sind, und die beyden größten Wurzeln derselben sich so wenig von einander unterscheiden, daß die zweyte Wurzel sin. 50° in den Potestäten, bis zu welchen die Reihe fortgesetzt worden ist, zu der größten Wurzel noch ein beträchtliches Verhältniß hat, und also nicht, gegen dieselbe gehalten, $= 0$ gesetzt werden kann. Eben daher rührt es, daß die gefundenen Werthe wechselsweise sehr viel zu groß und zu klein sind; indem z. B. wenn man

$$y = \frac{-316}{172} \text{ setzt, } x = \frac{-158}{172} = \frac{-79}{86} = 0,918$$

wird. Denn da die Potestäten der größten Wurzel wechselsweise positiv und negativ werden, so werden auch die Potestäten der zweyten Wurzel wechselsweise addirt und subtrahirt.

trahirt. Soll also diese Abweichung unmerklich werden, so muß man die Reihe bis zu einer sehr großen Anzahl von Gliedern fortsetzen.

§. 340.

Man kann sich aber auch auf die Art helfen, daß man die gegebene Gleichung durch eine geschickte Substitution auf eine solche Form bringt, daß ihre Wurzeln einander nicht mehr so nahe liegen. Setzt man z. B. in der Gleichung $0 = 1 - 6x + 8x^3$, deren Wurzeln $-\sin. 70^\circ$, $+\sin. 50^\circ$, $+\sin. 10^\circ$ sind, $x = y - 1$; so werden die Wurzeln der Gleichung $0 = 8y^3 - 24yy + 18y - 1$ folgende: $1 - \sin. 70^\circ$, $1 + \sin. 50^\circ$, $1 + \sin. 10^\circ$. Auf diese Art wird also $1 - \sin. 70^\circ$ die kleinste Wurzel, da vorhin $-\sin. 70^\circ$ die größte Wurzel war, und $1 + \sin. 50^\circ$ wird die größte, da vorher $\sin. 50^\circ$ die mittelste war; und man kann daher vermittelst dieses Kunstgriffs jede Wurzel in die größte oder kleinste Wurzel der neuen Gleichung verwandeln, und sie also auch auf dem beschriebenen Wege finden. Da überdies die Wurzel $1 - \sin. 70^\circ$ in dem gegenwärtigen Beyspiele viel kleiner ist, als die beyden übrigen, so läßt sie sich auch leicht durch eine wiederkehrende Reihe finden.

Viertes Exempel.

Die kleinste Wurzel der Gleichung $0 = 8y^3 - 24yy + 18y - 1$ zu finden, welche von 1 abgezogen den Sinus des Winkels von 70° geben wird.

Man setze $y = \frac{1}{2}z$, so daß $0 = z^3 - 6zz + 9z - 1$ werde. Da man nun die kleinste Wurzel dieser Gleichung aus einer wiederkehrenden Reihe erhält, deren Beziehungs-Scale $9, -6, +1$, ist, so wie man, um die größte Wurzel zu finden, die Beziehungs-Scale 6, — 9, + 1, annehmen müßte: so erhält man für die kleinste Wurzel die Reihe

1, 1, 1, 4, 31, 256, 2122, 17593, 145861, rc.

und es ist daher näherungsweise $z = \frac{17593}{145861} = 0{,}12061483$,

und $y = 0{,}06030741$, und $\sin. 70^\circ = 1 - y = 0{,}93969258$, welche Zahl auch noch in der letzten Zifer richtig ist. Man sieht folglich an diesem Beyspiele, was für einen großen Nutzen die Verwandlung der Gleichungen vermittelst der Substitution bey der Erfindung der Wurzeln gewähren kann, und, daß die bisher beschriebene Methode sich nicht bloß auf die Erfindung der größten oder der kleinsten Wurzel erstrecket, sondern uns auch in den Stand setzt, jede Wurzel zu finden.

§. 341.

Hat man nun irgend eine Wurzel einer gegebenen Gleichung näherungsweise gefunden, so daß z. B. die Zahl k von dem wahren Werthe derselben nur um einen sehr kleinen Theil unterschieden ist: so setze man $x - k = y$, oder $x = y + k$. Hierdurch erhält man eine Gleichung, deren kleinste Wurzel $= x - k$ ist. Sucht man nun diese Wurzel vermittelst einer wiederkehrenden Reihe, und dies ist leicht, weil die gedachte Wurzel viel kleiner als alle übrigen seyn wird: so erhält man in der Summe aus ihr und k die wahre Wurzel x für die gegebene Gleichung. Der Gebrauch dieses Kunstgriffes erstreckt sich so weit, daß man ihn selbst dann, wenn die Gleichung imaginäre Wurzeln hat, anwenden kann.

§. 342.

Vorzüglich wichtig und selbst unentbehrlich nothwendig aber wird er, wenn die gegebene Gleichung zwey einander gleiche und entgegengesetzte Wurzeln hat. Wenn nemlich eine Gleichung, deren größte Wurzel $= p$ ist, auch eine Wurzel $- p$ hat, so findet man die Wurzel p nicht, wenn man auch die wiederkehrende Reihe bis ins Unendliche fortsetzte. Um dies durch ein Beyspiel zu erläutern, so sey die Gleichung $x^3 - x^2 - 5x + 5 = 0$ gegeben, deren größte Wurzel $= \sqrt{5}$ ist, die aber auch die Wurzel $- \sqrt{5}$ hat. Wollte man hier die größte Wurzel auf dem beschriebenen Wege suchen, so müßte man nach der Beziehungs-Scale $1, + 5, - 5$ die wiederkehrende Reihe

$$1, 2, 3, 8, 13, 38, 63, 188, 313, 938, 1563, \text{rc.}$$

formiren, aber daraus würde man nirgends andere als ungleiche Quotienten erhalten. Dagegen werden hier die Quotienten aus den wechselsweise genommenen Gliedern einander gleich, wenn man jedes derselben durch das vorhergehende dividirt, und jeder giebt das Quadrat der gesuchten größten Wurzel beynahe. So ist z. B. beynahe $5 = \frac{1563}{313} = \frac{938}{188} = \frac{313}{63}$. So oft sich daher die wechselsweise genommenen Glieder einem beständigen Verhältnisse nähern, so erhält man jedesmal das Quadrat der gesuchten größten Wurzel beynahe. Die Wurzel $x = \sqrt{5}$ selbst aber findet man, wenn man $x = y + 2$ setzt, wodurch $1 - 3y - 5yy - y^3 = 0$ wird. Denn da sich die kleinste Wurzel dieser Gleichung aus der Reihe

$$1, 1, 1, 9, 33, 145, 609, 2585, 10945, \text{rc.}$$

ergiebt, so ist dieselbe beynahe $= \frac{2585}{10945} = 0,2361$ und dadurch erhält man $x = \sqrt{5} = 2,2361$, die größte Wurzel der gegebenen Gleichung.

§. 343.

§. 343.

Obgleich der Zähler des Bruchs, aus welchem man die wiederkehrende Reihe entwickelt, nach Willkühr angenommen werden kann, so trägt doch eine geschickte Wahl desselben sehr viel dazu bey, daß die gefundenen Werthe der wahren Wurzel bald sehr nahe kommen. Denn da das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihe, wenn man die Faktoren des Nenners so wie §. 334 annimmt, $=$ $z^n(Ap^n + Bq^n + Cr^n +$ 2c.) wird, und die Buchstaben A, B, C, 2c. durch den Zähler des Bruchs bestimmt werden: so kommt es auf die Wahl dieses Zählers an, ob A einen großen oder einen kleinen Werth bekommen soll; und in jenem Falle wird die größte Wurzel p schnell, in diesem aber langsam gefunden. Ja es kann dieser Zähler so genommen werden, daß A gänzlich verschwindet, und dann findet man die größte Wurzel p nie, wenn man auch die wiederkehrende Reihe ohne Ende fortsetzte. Dies geschieht, wenn der Zähler so angenommen wird, daß er selbst den Faktor $1 - pz$ enthält, denn alsdann fällt derselbe ganz aus der Rechnung weg. Wäre z. B. die Gleichung $x^3 - 6xx + 10x - 3 = 0$ gegeben, deren größte Wurzel $= 3$ ist, und formirte man daraus den Bruch

$$\frac{1 - 3z}{1 - 6z + 10z^2 - 3z^3}$$

so daß die Beziehungs-Scale der wiederkehrenden Reihe $6, -10, +3$, würde: so erhielte man die Reihe

$1, 3, 8, 21, 55, 144, 377,$ 2c.

deren Glieder sich dem Verhältnisse $1 : 3$ auf keine Weise nähern, sondern immer weiter davon entfernen. Es entspringt nemlich diese Reihe auch aus dem Buche $\frac{1}{1 - 3z + zz}$, und giebt daher die größte Wurzel der Gleichung $x^2 - 3x + 1 = 0$.

§. 344.

Endlich kann der Zähler auch auf die Art angenommen werden, daß man durch die wiederkehrende Reihe eine jede Wurzel der Gleichung findet, und dies geschiehet, wenn zu demselben das Produkt aus allen Faktoren des Nenners, den, welcher aus der gesuchten Wurzel gemacht wird, ausgenommen, gewählt wird. Setzt man z. B. in dem vorhergehenden Exempel den Zähler $= 1 - 3z + zz$, so giebt der Bruch $\frac{1 - 3z + zz}{1 - 6z + 10z^2 - 3z^3}$ die wiederkehrende Reihe 1, 3, 9, 27, 81, 243, ꝛc.; und da dies eine geometrische Reihe ist, so giebt sie sogleich zu erkennen, daß die Wurzel $= 3$ ist. Es ist nemlich jener Bruch diesem einfachen Bruche $\frac{1}{1 - 3z}$ gleich. Wenn man also die Anfangs-Glieder der wiederkehrenden Reihe, welche man nach Willkühr annehmen kann, auf eine solche Art wählt, daß sie eine geometrische Reihe ausmachen, deren Exponent einer von den Wurzeln der gegebenen Gleichung gleich ist, so erhellet hieraus, daß alsdann die ganze wiederkehrende Reihe eine geometrische Progression wird, und die gedachte Wurzel giebt, wenn sie gleich weder die größte noch die kleinste ist.

§. 345.

Damit man also nicht, indem man die größte oder die kleinste Wurzel sucht, durch die wiederkehrende Reihe wider Erwarten auf eine andere Wurzel geführt werde: so muß man den Zähler auf eine solche Art annehmen, daß er mit dem Nenner keinen Faktor gemein hat. Da nun dieses

ses statt findet, wenn man die Einheit zum Zähler macht, so hat man alsdann jedesmal für das erste Glied der Reihe, 1, und daraus allein muß man denn auch nach der Beziehungs-Scale alle übrigen Glieder suchen. Auf diese Art findet man also jedesmal, so wie man sichs vorgesetzt hat, entweder die größte oder die kleinste Wurzel. Soll z. B. die größte Wurzel der Gleichung $y^3 * - 3y + 1 = 0$ gefunden werden, so entspringt aus der Beziehungs-Scale 0, + 3, — 1, wenn man von 1 anfängt, die Reihe

$$1 - 0 + 3 - 1 + 9 - 6 + 28 - 27 + 90 - 109 + 297 - 517$$
$$+ 1000 - 1848 + 3517 - 6544 + \text{ꝛc.}$$

welche sich offenbar einem beständigen Quotienten nähert, und zu erkennen giebt, daß die größte Wurzel negativ und beynahe $= \frac{-6544}{3517} = -1,860676$ ist. Eigentlich ist sie $= -1,86793852$; allein der Grund, warum man sich hier dem wahren Werthe so langsam nähert, ist bereits oben angeführt worden, und liegt darin, weil die zweyte Wurzel nicht viel kleiner als die größte und zugleich positiv ist.

§. 346.

Aus dem, was bisher entweder allgemein oder bey den Exempeln bemerkt worden ist, erhellet der große Nutzen, welchen die wiederkehrenden Reihen bey der Erfindung der Wurzeln der Gleichungen haben, sehr deutlich. Und da dabey die Kunstgriffe, wodurch man die Rechnung zusammenziehen, und sich seinem Ziele schneller nähern kann, zugleich mit angezeigt worden sind, so würde nichts weiter hinzuzusetzen übrig seyn, wofern nicht die Fälle, wenn die gegebene Gleichung entweder gleiche oder imaginäre Wurzeln hat, besonders betrachtet werden müßten. Wir wollen also annehmen, daß der Nenner des Bruchs

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{rc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{rc.}}$$

den Faktor $(1 - pz)^2$ habe, und die übrigen Faktoren $1 - qz$, $1 - rz$, rc. seyn lassen. Entwickelt man den Bruch in eine wiederkehrende Reihe, so ist das allgemeine Glied dieser Reihe $= z^n ((n + 1) \mathfrak{A} p^n + \mathfrak{B} p^n + \mathfrak{C} q^n + \text{rc.})$ Soll nun der Werth bestimmt werden, welchen dieses allgemeine Glied für einen sehr großen Werth für n erhalten wird, so müssen zwey Fälle von einander unterschieden werden, davon der eine statt findet, wenn p größer als die übrigen Buchstaben q, r, rc. ist, und der andere, wenn p nicht die größte Wurzel giebt. Im ersten Falle, wo p zugleich die größte Wurzel ist, können die Glieder $\mathfrak{B} p^n + \mathfrak{C} q^n$ + rc. wegen der Größe des Coefficienten $n + 1$ nicht so schnell gegen $\mathfrak{A} p^n$ verschwinden, als vorhin; und im zweyten, wenn q größer als p ist, kann auch $(n + 1) \mathfrak{A} p^n$ gegen $\mathfrak{B} q^n$ nur langsam verschwinden, und es wird daher die Erforschung der größten Wurzel hier sehr beschwerlich.

Erstes Exempel.

Es sey die Gleichung $x - 3xx + 4 = 0$ gegeben, deren größte Wurzel 2 zweymal vorkommt.

Man suche diese größte Wurzel auf die vorhin beschriebene Art durch die Entwickelung des Bruchs

$$\frac{1}{1 - 3z * + 4z^3}$$

welcher die wiederkehrende Reihe

1, 3, 9, 23, 57, 135, 313, 711, 1593, rc.

giebt, worin jedes Glied, durch das vorhergehende dividirt, eine Zahl giebt, die größer als die 2 ist. Der Grund

hiervon

hiervon ist aus dem allgemeinen Gliede leicht einzusehen. Denn läßt man in demselben die Glieder $\mathfrak{B} p^n$, $\mathfrak{C} q^n$, ꝛc. weg, so ist das Glied, welches zu der Potestät z^n gehört, $= (n + 1) \mathfrak{A} p^n + \mathfrak{B} p^n$, und das folgende $= (n + 2) \mathfrak{A} p^{n+1}$ $\mathfrak{B} p^{n+1}$. Dividirt man aber das letzte von diesen Gliedern durch das erste, so wird $\frac{(n+2)\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{(n+1)\mathfrak{A} + \mathfrak{B}} p$ größer als p, wofern nicht n eine unendliche Größe erreicht hat.

Zweytes Exempel.

Es sey die Gleichung $x^3 - xx - 5x - 3 = 0$ gegeben, deren größte Wurzel $= 3$, und die beyden übrigen $= -1$ sind.

Man suche die größte Wurzel vermittelst einer wiederkehrenden Reihe, deren Beziehungs-Scale $1, + 5, + 3,$ ist. Diese Reihe ist

1, 1, 6, 14, 47, 135, 412, 1228, ꝛc.

und man findet daraus den Werth 3 deswegen sehr bald, weil die Potestäten der kleinern Wurzel $- 1$, wenn man sie auch mit $n + 1$ multiplicirt, dennoch sehr bald gegen die Potestäten von 3 verschwinden.

Drittes Exempel.

Wenn aber die Gleichung $x^3 + xx - 8x - 12 = 0$ gegeben würde, deren Wurzeln $3, -2, -2,$ sind, so würde man die größte Wurzel viel langsamer finden. Denn man erhielte daraus die Reihe

1, − 1, 9, − 5, 65, 3, 457, 347, 3345, 4915, ꝛc.

welche man noch sehr weit fortsetzen müßte, wenn man daraus erkennen wollte, daß die aus ihr sich ergebende Wurzel $= 3$ sey.

§. 347.

Auf eine ähnliche Art würde, wenn drey Faktoren einander gleich, und der eine also $(1 - pz)^3$, und die übrigen $1 - qz$, $1 - rz$, ꝛc. wären, das allgemeine Glied der wiederkehrenden Reihe $= z^n\left(\frac{(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2}\mathfrak{A}p^n + (n+1)\mathfrak{B}p^n + \mathfrak{C}p^n + \mathfrak{D}q^n + \mathfrak{E}r^n + \text{ꝛc.}\right)$ seyn. Wenn nun p die größte Wurzel und n eine so große Zahl wäre, daß die Potestäten q^n, r^n, ꝛc. gegen p^n verschwänden, so würde man aus der wiederkehrenden Reihe die Wurzel =

$$\frac{\frac{1}{2}(n+2)(n+3)\mathfrak{A} + (n+2)\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\mathfrak{A} + (n+1)\mathfrak{B} + \mathfrak{C}}\,p$$

erhalten, welche aber nur alsdann, wenn n die möglich größte und gleichsam eine unendlich große Zahl wäre, der Wahrheit gemäß seyn kann. Es ist aber jener Werth =

$$p + \frac{(n+2)\mathfrak{A} + \mathfrak{B}}{\frac{1}{2}(n+1)(n+2)\mathfrak{A} + (n+1)\mathfrak{B} + \mathfrak{C}} \times p$$

Wenn aber p nicht die größte Wurzel ist, so ist die Findung derselben noch mit weit mehr Schwierigkeiten verknüpft; und es ist daher leicht einzusehen, daß die Auflösung der Gleichungen vermittelst der wiederkehrenden Reihen, wenn diese Gleichungen gleiche Wurzeln enthalten, bey weitem so vortheilhaft nicht ist, als wenn die Wurzeln derselben alle einander ungleich sind.

§. 348.

Nun wollen wir untersuchen, wie die ohne Ende fortgesetzte wiederkehrende Reihe beschoffen seyn wird, wenn der Nenner des Bruchs imaginäre Faktoren hat. Angenommen also, daß der Nenner des Bruchs

$$\frac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{ꝛc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ꝛc.}}$$

die

die reellen Faktoren $1 - qz$, $1 - rz$, ꝛc. und außerdem folgenden zwey imaginaire Faktoren in sich enthaltenden trinomischen Faktor, $1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz$, habe: so ist, wenn man die aus dem Bruche entspringende wiederkehrende Reihe folgende,

$$A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \ldots\ldots + Pz^n + Qz^{n+1}$$

seyn läßt, nach dem oben Angemerkten, der Coefficient

$$P = \frac{\mathfrak{A}.\sin.(n+1)\phi + \mathfrak{B}\sin.n\phi}{\sin.\phi}p^n + \mathfrak{C}q^n + \mathfrak{D}r^n + \text{ꝛc.}$$

Ist daher p kleiner als eine der folgenden Zahlen q, r, ꝛc, so daß die größte Wurzel der Gleichung

$$x^m - \alpha x^{m-1} - \beta x^{m-2} - \gamma x^{m-3} - \text{ꝛc.} = 0$$

eine reelle Größe ist: so findet man dieselbe vermittelst der wiederkehrenden Reihe eben so, als wenn gar keine imaginäre Wurzeln da wären.

§. 349.

Wenn also die imaginären Wurzeln so beschaffen sind, daß das Produkt aus je zweyen, die einen reellen Faktor geben, nicht größer ist, als das Quadrat der größten Wurzel: so legen dieselben der Erfindung dieser größten Wurzel kein Hinderniß in den Weg. Ist aber das gedachte Produkt dem Quadrate der größten Wurzel gleich, oder gar größer als dasselbe: so findet man auf dem erklärten Wege nichts, weil die Potestät p^n gegen die gleichmannige Potestät der größten Wurzel nie verschwindet, wenn man auch die Reihe ohne Ende fortsetzte. Es wird nicht überflüssig seyn, dieses mit einigen Exempeln zu erläutern.

Erstes Exempel.

Es sey die Gleichung $x^3 - 2x - 4 = 0$ gegeben, um die größte Wurzel derselben zu finden.

Da sich diese Gleichung in die beyden Faktoren $(x - 2)(xx + 2x + 2)$ auflösen läßt, so hat sie außer der reellen Wurzel 2 noch zwey imaginäre Wurzeln, deren Produkt $= 2$, also kleiner ist, als das Quadrat der reellen Wurzel; und man ist daher im Stande, diese reelle Wurzel auf dem bisher erklärten Wege zu finden. Man formire also nach der Beziehungs-Scale 0, + 2, + 4, die wiederkehrende Reihe

1, 0, 2, 4, 4, 16, 24, 48, 112, 192, 416, 832, ꝛc.

aus welcher sich die reelle Wurzel 2 hinlänglich zu erkennen giebt.

Zweytes Exempel.

Es sey die Gleichung $x^3 - 4xx + 8x - 8 = 0$ gegeben, welche die reelle Wurzel 2 hat, und worin das Produkt der beyden übrigen imaginären Wurzeln $= 4$, und also dem Quadrate der reellen Wurzel gleich ist.

Man suche also die Wurzel durch eine wiederkehrende Reihe, und um solches auf eine bequeme Art thun zu können, so setze man $x = 2y$, indem man dadurch die Gleichung $y^3 - 2yy + 2y - 1 = 0$ erhält. Hieraus ergiebt sich nun die Reihe,

1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, 0, 0, 1, 2, 2, 1, ꝛc.

allein da darin immer eben dieselben Glieder wiederkehren, so läßt sich daraus weiter nichts schließen, als entweder, daß die größte Wurzel nicht reell sey, oder, daß die Gleichung zwey imaginäre Wurzeln habe, deren Produkt dem Quadrate der reellen Wurzel gleich oder noch größer als dasselbe ist.

Drittes Exempel.

Endlich sey die Gleichung $x^3 - 3xx + 4x - 2 = 0$ gegeben, deren reelle Wurzel $= 1$ ist, und deren imaginäre

näre Wurzeln, mit einander multiplicirt, das Produkt 2 hervorbringen.

Wenn man hier nach der Beziehungs-Scale 3, — 4, + 2, eine wiederkehrende Reihe formirt, so erhält man

1, 3, 5, 5, 1, — 7, — 15, — 15 + 1, 33, 65, 65, 1 ꝛc.

Allein, da die Glieder dieser Reihe bald positiv bald negativ sind, so läßt sich daraus die reelle Wurzel 1 keinesweges finden. Dergleichen Abwechselungen sind allezeit ein Kennzeichen, daß die Wurzeln, welche sich aus der Reihe ergeben sollen, imaginär sind; so wie in dem gegenwärtigen Exempel die imaginären Wurzeln in der That größer als die reelle 1 sind.

§. 350.

Es sey also in dem allgemeinen Bruche das Produkt zweyer imaginären Wurzeln pp größer als das Quadrat irgend einer reellen Wurzel, so daß die übrigen Poteståten q^n, r^n, ꝛc. gegen p^n verschwinden, wenn n eine unendlich große Zahl wird. In diesem Falle ist

$$P = \frac{\mathfrak{A}.\sin.(n+1)\phi + \mathfrak{B}.\sin.n\phi}{\sin.\phi} p^n, \text{ und}$$

$$Q = \frac{\mathfrak{A}.\sin.(n+2)\phi + \mathfrak{B}.\sin.(n+1)\phi}{\sin.\phi} p^{n+1}, \text{ und also}$$

$$\frac{Q}{P} = \frac{\mathfrak{A}.\sin.(n+2)\phi + \mathfrak{B}.\sin.(n+1)\phi}{\mathfrak{A}.\sin.(n+1)\phi + \mathfrak{B}.\sin.n\phi.} p$$

Allein dieser Ausdruck bekommt nie einen beständigen Werth, wenn gleich n unendlich groß wird, denn die Sinus der Winkel bleiben immer in einem hohen Grade veränderlich, so daß sie bald positiv bald negativ werden.

§. 351.

Wenn man indeß die Brüche $\frac{R}{Q}$, $\frac{S}{R}$, auf eine ähnliche Art bestimmt, und daraus die Buchstaben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ eliminirt,

minirt, so fällt auch n aus der Rechnung weg; denn man findet alsdann $Ppp + R = 2Qp.\cos.\phi$, woraus sich $\cos.\phi = \frac{Ppp + R}{2Qp}$ ergiebt, und auf eine ähnliche Art wird $\cos.\phi = \frac{Qpp + S}{2Rp}$. Vergleicht man aber diese beyden Werthe mit einander, so erhält man

$$p = \sqrt{\frac{RR - QS}{QQ - PR}}, \text{ und}$$

$$\cos.\phi = \frac{QR - PS}{2\sqrt{(QQ - PR)(RR - QS)}}.$$

Hat man daher die wiederkehrende Reihe so weit fortgesetzt, daß die Potestäten der übrigen Wurzeln gegen p^n verschwinden, so kann man auf diese Art den trinomischen Faktor $1 - 2pz.\cos.\phi + ppzz$ finden.

§. 352.

Da diese Rechnung Ungeübten Schwierigkeit machen könnte, so will ich dieselbe hier ganz hersetzen. Aus dem gefundenen Werthe von $\frac{Q}{P}$ erhält man

$\mathfrak{A}Pp.\sin.(n+2)\phi + \mathfrak{B}Pp.\sin.(n+1)\phi = \mathfrak{A}Q.\sin.(n+1)\phi + \mathfrak{B}.Q.\sin.n\phi.$ und daraus wird

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{Q.\sin.n\phi - Pp.\sin.(n+1)\phi}{Pp.\sin.(n+2)\phi - Q.\sin.(n+1)\phi}.$$

Auf eine ähnliche Art ist

$$\frac{\mathfrak{A}}{\mathfrak{B}} = \frac{R.\sin.(n+1)\phi - Qp.\sin.(n+2)\phi}{Qp.\sin.(n+3)\phi - R.\sin.(n+2)\phi}.$$

Vergleicht man nun diese beyden Werthe mit einander, so wird

$$0 = QQp.\sin.n\phi.\sin.(n+3)\phi - QR.\sin.n\phi.\sin.(n+2)\phi -$$

P

$$PQpp.\sin.(n+1)\varphi.\sin.(n+3)\varphi - QQp.\sin.(n+1)\varphi.\sin.(n+2)\varphi +$$
$$QR.\sin.(n+1)\varphi.\sin.(n+1)\varphi + PQpp.\sin.(n+1)\varphi.\sin.(n+2)\varphi.$$

Da aber

$$\sin.a.\sin.b. = \tfrac{1}{2}.\cos.(a-b) - \tfrac{1}{2}\cos.(a+b)$$

ist, so wird

$$o = \tfrac{1}{2}QQp.(\cos.3\varphi - \cos.\varphi) + \tfrac{1}{2}QR.(1 - \cos.2\varphi) + \tfrac{1}{2}PQpp.(1 - \cos.2\varphi.)$$

und daraus ergiebt sich, wenn man durch $\frac{1}{2}Q$ dividirt,

$$(Ppp + R)(1 - \cos.2\varphi) = Qp.(\cos.\varphi - \cos.3\varphi)$$

Nun ist

$$\cos.\varphi = \cos.2\varphi.\cos.\varphi + \sin.2\varphi.\sin.\varphi, \text{ und}$$
$$\cos.3\varphi = \cos.2\varphi.\cos.\varphi - \sin.2\varphi.\sin.\varphi; \text{ folglich}$$
$$\cos.\varphi - \cos.3\varphi = 2\sin.2\varphi.\sin.\varphi = 4(\sin.\varphi)^2.\cos.\varphi, \text{ und}$$
$$1 - \cos.\varphi = 2(\sin.\varphi)^2.$$

Also wird

$$Ppp + R = -2Qp.\cos.\varphi, \text{ und}$$
$$\cos.\varphi = \frac{Ppp+R}{2Qp}, \text{ desgleichen}$$
$$\cos.\varphi = \frac{Qpp+S}{2Rp}.$$

Hieraus aber fließen die obigen Werthe, nemlich

$$p = \sqrt{\frac{RR-QS}{QQ-PR}}, \text{ und}$$
$$\cos.\varphi = \frac{QR-PS}{2\sqrt{(QQ-PR)(RR-QS)}}.$$

§. 353.

Wenn der Nenner des Bruchs, nach welchem man die wiederkehrende Reihe formiret, mehrere, einander gleiche, trinomische Faktoren hat, so wird die Erfindung der Wur-

zeln

zeln noch viel ungewisser, wovon man sich durch die Betrachtung der Form des oben gegebenen allgemeinen Gliedes überzeugen kann. Ist indeß irgend eine reelle Wurzel schon beynahe bekannt, so kann man durch die Verwandlung der Gleichung den Werth eben derselben Wurzel immer genauer finden. Setzt man nemlich x der Summe aus dem schon gefundenen Werthe und y gleich, und sucht man die kleinste Wurzel dieser neuen Gleichung: so erhält man, wenn man dieselbe zu der vorhin gefundenen addirt, den wahren Werth von x.

Exempel.

Es sey die Gleichung $x^3 - 3xx + 5x - 4 = 0$ gegeben, von welcher man daraus, daß, für $x = 1$, $x^3 - 3xx + 5x - 4 = -1$ wird, weiß, daß die eine Wurzel derselben beynahe $= 1$ ist.

Man setze also $x = 1 + y$, so wird $1 - 2y - y^3 = 0$. Um nun die kleinste Wurzel dieser Gleichung zu finden, formire man nach der Beziehungs-Scale 2, 0, + 1, die wiederkehrende Reihe

1, 2, 4, 9, 20, 44, 97, 214, 472, 1041, 2296, rc.

Hieraus erhält man die kleinste Wurzel y beynahe $= \frac{1041}{2296} = 0,453397$, und also $x = 1,453397$. Diesen Werth würde man schwerlich auf einem andern Wege so bald und so genau gefunden haben.

§. 354.

Wenn sich aber irgend eine wiederkehrende Reihe immer mehr einer geometrischen Progression nähert, so läßt sich auch aus dem Gesetze der Progression sogleich und auf eine leichte Art erkennen, von was für einer Gleichung der

Quo-

Quotient, den man durch die Division irgend eines Gliedes durch das vorhergehende erhält, eine Wurzel seyn werde. Es seyen P, Q, R, S, T, ꝛc. sehr weit vom Anfange entfernte Glieder einer wiederkehrenden Reihe, und von der Art, daß man sie als Glieder einer geometrischen Progression betrachten kann. Ferner sey $T = \alpha S + \beta R + \gamma Q + \delta P$, oder es sey die Beziehungs-Scale, $\alpha, + \beta, + \gamma, + \delta$. Setzt man nun den Werth des Bruchs $\frac{Q}{P} = x$, so wird $\frac{R}{P} = xx$, und $\frac{S}{P} = x^3$, und $\frac{T}{P} = x^4$. Durch die Substitution dieser Werthe in der vorhergehenden Gleichung aber erhält man

$$x^4 = \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + \delta$$

und es ist daher einleuchtend, daß $\frac{Q}{P}$ endlich eine Wurzel der gefundenen Gleichung geben wird. Eben dieses lehrt aber auch die vorhergehende Methode, und zugleich, daß der Bruch $\frac{Q}{P}$ die größte Wurzel giebt.

§. 355.

Auch kann man von dieser Methode die Wurzeln zu finden selbst bey unbegrenzten Gleichungen öfters mit Nutzen Gebrauch machen. Um dies zu zeigen, so sey die Gleichung

$$\frac{1}{2} = z - \frac{z^3}{6} + \frac{z^5}{120} - \frac{z^7}{5040} + \text{ꝛc.}$$

gegeben, deren kleinste Wurzel z den Bogen 30° oder den sechsten Theil des halben Umfanges eines Kreises giebt. Man bringe also die gegebene Gleichung auf die Form

$$1 - 2z + \frac{z^3}{3} - \frac{z^5}{60} + \frac{z^7}{2520} - \text{ꝛc.} = 0$$

und

und formire daraus ein wiederkehrende Reihe. Die Beziehungs-Scale geht hier ohne Ende fort, und ist

$$2,\ 0,\ -\frac{1}{3},\ 0,\ +\frac{1}{60},\ 0,\ -\frac{1}{2520},\ 0,\ \text{ꝛc.}$$

die wiederkehrende Reihe selbst aber

$$1,\ 2,\ 4,\ \frac{23}{3},\ \frac{44}{3},\ \frac{1681}{60},\ \frac{2408}{45},\ \text{ꝛc.}$$

und folglich beynahe

$$z = \frac{1681 \cdot 45}{2408 \cdot 60} = \frac{1681 \cdot 3}{2408 \cdot 4} = \frac{5043}{9632} = 0,52356.$$

Da sich nun aus dem bekannten Verhältnisse der Peripherie zu Durchmesser

$$z = 0,523598$$

ergiebt, so weicht der gefundene Werth von dem wahren nur um 0,00003 ab. Es ist aber das ein sehr vortheilhafter Umstand bey der gegebenen Gleichung, daß alle ihre Wurzeln reell sind, und daß sich außerdem zwischen der kleinsten und den übrigen Wurzeln ein beträchtlicher Unterschied findet. Da sich dieser Umstand sehr selten bey den unendlichen Gleichungen ereignet, so ist die beschriebene Methode auch nur selten zur Erfindung ihrer Wurzeln zu brauchen.