Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

Achtzehntes Capitel. Von den continuirlichen Brüchen.

Achtzehntes Capitel.

Von den continuirlichen Brüchen.

§. 356.

Da ich in den vorhergehenden Capiteln, sowohl von den unendlichen Reihen als von den Produkten, die aus einer unendlichen Anzahl von Faktoren bestehen, gehandelt habe, so glaube ich hier, auch noch von einer dritten Art unendlicher Ausdrücke, oder von den continuirlichen Brüchen etwas sagen zu müssen. Denn obgleich die Theorie dieser Brüche noch sehr unvollkommen ist; so ist doch das keinem Zweifel unterworfen, daß die Analysis des Unendlichen daraus einst sehr wichtige Vortheile wird ziehen können. Verschiedene Proben, die ich davon gegeben habe, machen solches in einem hohen Grade wahrscheinlich. Vorzüglich aber gewähret diese Lehre der Arithmetik und der gemeinen Algebra manche auf keine Weise zu verachtende Hülfsmittel; und diese sind es, die ich mir in dem gegenwärtigen Capitel kürzlich anzuzeigen und auseinander zu setzen vorgenommen habe.

§. 357.

Ich verstehe aber unter einem continuirlichen Bruche einen Bruch, dessen Nenner aus einer ganzen Zahl und einem Bruche besteht, dessen Nenner abermals ein Aggregat aus einer ganzen Zahl und einem Bruche von ähnlicher Art ist, es mag nun diese Beschaffenheit immerfort ohne Ende statt finden, oder irgendwo aufhören. Dergleichen continuirliche Brüche sind z. B.

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \text{etc.}}}}}} \quad \text{oder} \quad a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \text{etc.}}}}}}$$

In dem ersten sind alle Zähler der darin enthaltenen Brüche Einheiten, und diese Art werde ich vorzüglich betrachten, in dem andern aber sind diese Zähler die Zahlen überhaupt.

§. 358.

Nachdem also die Form der continuirlichen Brüche beschrieben worden ist, so ist das Nächste, worauf wir zu sehen haben, die Art und Weise, den Werth der continuirlichen Brüche auf die gewöhnliche Art auszudrucken. Um dieselbe desto leichter kennen zu lernen, wollen wir stufenweise gehen, und jene Brüche anfänglich bey dem ersten, dann bey dem zweyten, dann bey dem dritten der in ihnen enthaltenen Brüche etc. abbrechen. Auf diese Art ist klar, daß seyn wird

$$a = a$$

$$a + \frac{1}{b} = \frac{ab + 1}{b}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c}} = \frac{abc + a + c}{bc + 1}$$

$$a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d}}} = \frac{abcd + ab + ad + cd + 1}{bcd + b + d}$$

$$a+\cfrac{1}{b+\cfrac{1}{c+\cfrac{1}{d+\cfrac{1}{e}}}}=\frac{abcde+abe+ade+cde+abc+a+c+e}{bcde+be+de+bc+1}$$

ꝛc.

§. 359.

Obgleich das Gesetz, nach welchem der Zähler und Nenner in diesen auf die gewöhnliche Art ausgedruckten Brüchen aus den Buchstaben a, b, c, d, ꝛc. formirt werden, nicht leicht zu erkennen ist: so sieht man doch bey einiger Aufmerksamkeit bald, wie ein jeder dieser Brüche aus den vorhergehenden gemacht werden kann. Es ist nemlich jeder Zähler ein Aggregat aus dem letzten Zähler, nachdem man denselben mit einem neuen Buchstaben multiplicirt hat, und aus dem vorletzten Zähler, so wie er ist genommen; und eben so verhält es sich mit den Nennern. Schreibt man also die Buchstaben a, b, c, d, ꝛc. nach der Ordnung hin, so kann man daraus die gefundenen Brüche auf folgende Art formiren:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab+1}{b}; & \frac{abc+a+c}{bc+1}; & \frac{abcd+ab+ad+cd+1}{bcd+b+d} \end{array}$$

Jeder Zähler wird hier gefunden, wenn man den unmittelbar vorhergehenden Zähler durch den darüber stehenden Anzeiger multiplicirt, und zu dem Produkte den darauf folgenden Zähler addirt. Eben dieses Gesetz gilt auch für die Nenner. Damit man aber diese Regel vom Anfang an zum Grunde legen könne, so habe ich den Bruch $\frac{1}{0}$ vorgesetzt; denn ob derselbe gleich nicht aus dem continuirlichen Bruche entspringt, so macht er doch das Progressions Gesetz deutlicher. Es stellt übrigens ein jeder Bruch den Werth des continuirlichen Bruchs bis zu dem Buchstaben, der über dem vor ihm hergehenden steht, diesen aber mit eingeschlossen, dar.

§. 360.

Auf eine ähnliche Art giebt die andere Gattung der continuirlichen Brüche,

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \text{ꝛc.}}}}}},$$

je nachdem man sie hier oder dort abbricht, folgende Werthe:

$$a = a$$

$$a + \frac{\alpha}{b} = \frac{ab + \alpha}{b}$$

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c}} = \frac{abc + \beta a + \alpha c}{bc + \beta}$$

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d}}} = \frac{abcd + \beta ad + \alpha cd + \gamma ab + \alpha\gamma}{bcd + \beta d + \gamma b}$$

ꝛc.

und jeder dieser Brüche läßt sich aus den beyden vorhergehenden auf folgende Art finden:

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \frac{1}{0}; & \frac{a}{1}; & \frac{ab + \alpha}{b}; & \frac{abc + \beta a + \alpha c}{bc + \beta}; & \frac{abcd + \beta ad + \alpha cd + \gamma ab + \alpha\gamma}{bcd + \beta d + \gamma b} \\ \alpha & \beta & \gamma & \delta & \varepsilon \end{array}$$

§. 361.

Man setzt nemlich über die zu formirenden Brüche die Anzeiger a, b, c, d, ꝛc., und unter sie, diese, α, β, γ, δ, ꝛc. Ferner setzt man in die Stelle des ersten Bruchs $\frac{1}{0}$, und in die Stelle des zweyten $\frac{a}{1}$. Ist dies geschehen, so findet man jeden der folgenden Brüche, wenn man den Zähler des letzten von den vorhergehenden Brüchen mit dem darüber stehenden, und den Zähler des vorletzten Bruchs mit dem hierunter stehenden Anzeiger multiplicirt, und beyde Produkte zusammen addirt; wo denn das Aggregat der Zähler des folgenden Bruchs ist. Auf eine ähnliche Art ist der Nenner ein Aggregat aus dem letzten Nenner durch den darüber stehenden, und aus dem vorletzten Nenner durch den hierunter stehenden Anzeiger multiplicirt. Ein jeder von den auf diese Art gefundenen Brüchen aber stellt den Werth des continuirlichen Bruchs bis zu dem Nenner, der über dem vorhergehenden Bruche steht, doch diesen mit eingeschlossen, dar.

§. 362.

Wenn man daher diese Brüche so weit fortsetzt, als der continuirliche Bruch Anzeiger giebt, so findet man in dem letzten Bruche den wahren Werth des continuirlichen Bruchs. Die vorhergehenden Brüche aber nähern sich diesem wahren Werthe immer mehr und mehr, und geben daher eine sehr gute Näherung. Angenommen nemlich, daß der wahre Werth des contuirlichen Bruchs

$$a + \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \text{ꝛc.}}}}} = x$$

sey; so ist offenbar, daß der erste Bruch $\frac{1}{0}$ größer ist als x; der zweyte hingegen $\frac{a}{1}$ ist kleiner als x, der dritte $a + \frac{\alpha}{b}$ ist wieder größer, der vierte wieder kleiner, und so sind diese Brüche auch ferner wechselsweise größer und kleiner als x. Außerdem fällt auch bald in die Augen, daß jeder folgende Bruch dem wahren Werthe von x näher kommt, als jeder der vorhergehenden, und man erhält daher auf diese Art den Werth von x näherungsweise sehr schnell und mit vieler Bequemlichkeit. Dies findet selbst dann statt, wenn der continuirliche Bruch ohne Ende fortgeht, wofern nur die Zähler α, β, γ, δ, ꝛc. nicht zu sehr wachsen. Wenn alle diese Zähler lauter Einheiten sind, dann ist diese Näherung gar keiner Unbequemlichkeit unterworfen.

§. 363.

Damit der Grund von dieser Näherung zu dem wahren Werthe des continuirlichen Bruchs mit mehrerer Deutlichkeit erkannt werden möge, so wollen wir die Unterschiede der gefundenen Brüche betrachten. Den ersten, $\frac{1}{0}$, bey Seite gesetzt, so ist der Unterschied zwischen dem zweyten und dritten $= \frac{\alpha}{b}$; der Unterschied zwischen dem dritten und vierten $= \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)}$; der Unterschied zwischen dem vierten und fünften $= \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)}$, ꝛc. Es wird daher der Werth des continuirlichen Bruchs durch eine gewöhnliche Reihe von Gliedern auf die Art ausgedruckt, daß

$$x = a + \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} - \text{ꝛc.}$$

ist,

ist, und diese Reihe bricht allezeit ab, wenn der continuirliche Bruch nicht ins Unendliche fortläuft.

§. 364.

Wir finden hier also eine Art, einen jeden continuirlichen Bruch in eine Reihe von Gliedern mit abwechselnden Zeichen zu verwandeln, wenn das erste Glied des Bruchs, a, verschwindet. Denn wenn

$$x = \cfrac{\alpha}{b + \cfrac{\beta}{c + \cfrac{\gamma}{d + \cfrac{\delta}{e + \cfrac{\varepsilon}{f + \text{rc.}}}}}}$$

ist: so ist nach dem, was wir vorhin gefunden haben,

$$x = \frac{\alpha}{b} - \frac{\alpha\beta}{b(bc+\beta)} + \frac{\alpha\beta\gamma}{(bc+\beta)(bcd+\beta d+\gamma b)} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{(bcd+\beta d+\gamma b)(bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta)} + \text{rc.}$$

Wenn daher α, β, γ, δ, rc. keine immer größer werdende Zahlen, sondern z. B. lauter Einheiten sind, die Buchstaben im Nenner aber, a, b, c, d, rc. ganze positive Zahlen bedeuten, so wird der Werth des continuirlichen Bruchs durch eine in einem hohen Grade convergirende Reihe ausgedruckt.

§. 365.

Dies wohl erwogen, so läßt sich auch jede Reihe mit abwechselnden Gliedern in einen continuirlichen Bruch verwandeln, oder es läßt sich ein continuirlicher Bruch finden, dessen Werth der Summe jener Reihe gleich ist. Es sey z. B. diese Reihe

$$x = A - B + C - D + E - F + \text{rc.}$$

gegeben; so ist, wenn man die Glieder dieser Reihe mit der Reihe, die aus dem continuirlichen Bruche entstand, vergleicht,

$$A = \frac{\alpha}{b}; \qquad \text{und also} \qquad \alpha = Ab$$

$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{bc+\beta}; \qquad \beta = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma b}{bcd+\beta d+\gamma b}; \qquad \gamma = \frac{Cd(bc+\beta)}{b(B-C)}$$

$$\frac{D}{C} = \frac{\delta(bc+\beta)}{bcde+\beta de+\gamma be+\delta bc+\beta\delta}; \; \delta = \frac{De(bcd+\beta d+\gamma b)}{(bc+\beta)(C-D)}$$

rc.

Da aber $\beta = \frac{Bbc}{A-B}$ ist, so wird $bc+\beta = \frac{Abc}{A-B}$, und also

$\gamma = \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$. Ferner wird $bcd+\beta d+\gamma b =$

$$(bc+\beta)d+\gamma b = \frac{Abcd}{A-B} + \frac{ACbcd}{(A-B)(B-C)} = \frac{ABbcd}{(A-B)(B-C)}$$

folglich $\frac{bcd+\beta d+\gamma b}{bc+\beta} = \frac{Bd}{B-C}$, und $\delta = \frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$.

Auf eine ähnliche Art findet man $\varepsilon = \frac{CEef}{(C-D)(D-E)}$, rc.

§. 366.

Damit dies Gesetz desto deutlicher werde, so sey

$P = b$

$Q = bc + \beta$

$R = bcd + \beta d + \gamma b$

$S = bcde + \beta de + \gamma be + \delta bc + \beta\delta$

$T = bcdef +$ rc.

$V = bcdefg +$ rc.

Also

Alsdann ist nach dem Gesetze, nach welchem diese Ausdrücke formirt werden,

$$Q = Pc + \beta$$
$$R = Qd + \gamma P$$
$$S = Re + \delta Q$$
$$T = Sf + \varepsilon R$$
$$V = Tg + \zeta S$$
$$\text{etc.}$$

§. 367.

Da nun, wenn man diese Buchstaben gebraucht,

$$x = \frac{\alpha}{P} - \frac{\alpha\beta}{PQ} + \frac{\alpha\beta\gamma}{QR} - \frac{\alpha\beta\gamma\delta}{RS} + \frac{\alpha\beta\gamma\delta\varepsilon}{ST} - \text{etc.}$$

ist: so wird, weil wir $x = A - B + C - D + E - \text{etc.}$ gesetzt haben,

$$A = \frac{\alpha}{P}; \quad \text{und also} \quad \alpha = AP$$
$$\frac{B}{A} = \frac{\beta}{Q}; \qquad \beta = \frac{BQ}{A}$$
$$\frac{C}{B} = \frac{\gamma P}{R}; \qquad \gamma = \frac{CR}{BP}$$
$$\frac{D}{C} = \frac{\delta Q}{S}; \qquad \delta = \frac{DS}{CQ}$$
$$\frac{E}{D} = \frac{\varepsilon R}{T}; \qquad \varepsilon = \frac{ET}{DR}$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.}$$

Nimmt man aber die Differenzen, so hat man

$$A - B = \frac{\alpha(Q-\beta)}{PQ} = \frac{\alpha c}{Q} = \frac{APc}{Q}$$
$$B - C = \frac{\alpha\beta(R-\gamma P)}{PQR} = \frac{\alpha\beta d}{PR} = \frac{BQd}{R}$$
$$C - D = \frac{\alpha\beta\gamma(S-\delta Q)}{QRS} = \frac{\alpha\beta\gamma e}{QS} = \frac{CRe}{S}$$

$$D-E = \frac{\alpha\beta\gamma\delta(T-\varepsilon R)}{RST} = \frac{\alpha\beta\gamma\delta f}{RT} = \frac{DSf}{T}$$

$$\text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.} \qquad \text{ꝛc.}$$

Wenn man also je zwey und zwey mit einander multiplicirt, so wird

$$(A-B)(B-C) = ABcd.\frac{P}{R}; \text{ und } \frac{R}{P} = \frac{ABcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$(B-C)(C-D) = BCde.\frac{Q}{S}; \text{ und } \frac{S}{Q} = \frac{BCed}{(B-C)(C-D)}$$

$$(C-D)(D-E) = CDef.\frac{R}{T}; \text{ und } \frac{T}{R} = \frac{CDef}{(C-D)(D-E)}$$

$$\text{ꝛc.}$$

Da nun $P = b$; $Q = \frac{\alpha c}{A-B} = \frac{Abc}{A-B}$ ist, so wird

$$\alpha = Ab$$

$$\beta = \frac{Bbc}{A-B}$$

$$\gamma = \frac{ACcd}{(A-B)(B-C)}$$

$$\delta = \frac{BDde}{(B-C)(C-D)}$$

$$\varepsilon = \frac{CEef}{(C-D)(D-E)}$$

$$\text{ꝛc.}$$

§. 368.

Hat man nun die Werthe der Zähler α, β, γ, δ, ꝛc. gefunden, so kann man die Nenner b, c, d, e, ꝛc. nach Belieben annehmen; doch ist es gut, sie so zu wählen, daß man, wenn man für sie ganze Zahlen gesetzt hat, auch für α, β, γ, δ, ꝛc. ganze Zahlen erhalte. Dies hängt aber auch von der Natur der Zahlen A, B, C, D, ꝛc. ab, je nach-

nachdem dieselben ganze Zahlen oder Brüche sind. Wenn sie ganze Zahlen sind, so geschiehet dem Verlangten ein Genüge, wenn man

$b = 1$	setzt	$\alpha = A$
$c = A - B$		$\beta = B$
$d = B - C$	denn alsdann	$\gamma = AC$
$e = C - D$		$\delta = BD$
$f = D - E$	wird	$\varepsilon = CE$
ꝛc.		ꝛc.

Wenn daher

$$x = A - B + C - D + E - F + \text{ꝛc.}$$

ist: so kann man den Werth von x auf folgende Art durch einen continuirlichen Bruch ausdrucken:

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{B}{A - B + \cfrac{AC}{B - C + \cfrac{BD}{C - D + \cfrac{CE}{D - E + \text{ꝛc.}}}}}}$$

§. 369.

Wenn aber alle Glieder der Reihe Brüche sind, so daß

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{B} + \frac{1}{C} - \frac{1}{D} + \frac{1}{E} - \text{ꝛc.}$$

ist, so hat man für α, β, γ, δ, ꝛc. folgende Werthe:

$$\alpha = \frac{b}{A}; \quad \beta = \frac{Abc}{B - A}; \quad \gamma = \frac{B^2cd}{(B - A)(C - B)};$$

$$\delta = \frac{C^2de}{(C - B)(D - C)}; \quad \varepsilon = \frac{D^2ef}{(D - C)(E - D)}; \text{ ꝛc.}$$

Man setze also

$b = A$;	folglich	$\alpha = 1$
$c = B - A$;		$\beta = AA$
$d = C - B$;		$\gamma = BB$
$e = D - C$;		$\delta = CC$
ꝛc.		

und

und alsdann giebt x folgenden continuirlichen Bruch:

$$x = \cfrac{1}{A + \cfrac{AA}{B - A + \cfrac{BB}{C - B + \cfrac{CC}{D - C + \text{etc.}}}}}$$

Erstes Exempel.

Es soll die unendliche Reihe

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \text{etc.}$$

in einen continuirlichen Bruch verwandelt werden.

Es ist also $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 4$, etc. und da der Werth der gegebenen Reihe $= l2$ ist, so ist also

$$l2 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{4}{1 + \cfrac{9}{1 + \cfrac{16}{1 + \cfrac{25}{1 + \text{etc.}}}}}}}$$

Zweytes Exempel.

Es soll die unendliche Reihe

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \text{etc.}$$

worin π die Peripherie eines Kreises bedeutet, dessen Durchmesser $= 1$ ist, in einen continuirlichen Bruch verwandelt werden.

Setzt man für A, B, C, D, etc. die Zahlen 1, 3, 5, 7, etc. so erhält man

$$\frac{\pi}{4} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{ꝛc.}}}}}}$$

und hieraus durch die Umkehrung

$$\frac{4}{\pi} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \text{ꝛc.}}}}}$$

Dies ist die Reihe, die Brouncker für die Quadratur des Kreises erfunden hat.

Drittes Exempel.

Es sey die unendliche Reihe

$$x = \frac{1}{m} - \frac{1}{m+n} + \frac{1}{m+2n} - \frac{1}{m+3n} + \text{ꝛc.}$$

in einen continuirlichen Bruch zu verwandeln.

Da hier $A = m$; $B = m + n$; $C = m + 2n$; ꝛc. ist, so erhält man

$$x = \cfrac{1}{m + \cfrac{mm}{n + \cfrac{(m+n)^2}{n + \cfrac{(m+2n)^2}{n + \cfrac{(m+3n)^2}{n + \text{ꝛc.}}}}}}$$

und daraus wird durch die Umkehrung des Bruchs

$$\frac{1}{x} - m = \cfrac{mm}{n + \cfrac{(m+n)^2}{n + \cfrac{(m+2n)^2}{n + \cfrac{(m+3n)^2}{n + \text{ꝛc.}}}}}$$

Viertes Exempel.

Da wir oben §. 178 gefunden haben, daß

$$\frac{\pi\cos.\frac{m\pi}{n}}{n.\sin.\frac{m\pi}{n}} = \frac{1}{m} - \frac{1}{n-m} + \frac{1}{n+m} - \frac{1}{2n-m} - \frac{1}{2n+m} - \text{ꝛc.}$$

ist, so hat man, wenn man diesen Werth in einen continuirlichen Bruch verwandeln will, $A = m$; $B = n - m$; $C = n + m$; $D = 2n - m$; ꝛc. Es wird daher

$$\frac{\pi\cos.\frac{m\pi}{n}}{n.\sin.\frac{m\pi}{n}} = \cfrac{1}{m + \cfrac{mm}{n-2m + \cfrac{(n-m)^2}{2m + \cfrac{(n+m)^2}{n-2m + \cfrac{(2n-m)^2}{2m + \text{ꝛc.}}}}}}$$

§. 370.

Wenn die gegebene Reihe in continuirlichen Faktoren fortgehet, so daß

$$x = \frac{1}{A} - \frac{1}{AB} + \frac{1}{ABC} - \frac{1}{ABCD} + \frac{1}{ABCDE} - \text{ꝛc.}$$

ist: so entstehen folgende Bestimmungen:

$$\alpha = \frac{b}{A};\ \beta = \frac{bc}{B-1};\ \gamma = \frac{Bcd}{(B-1)(C-1)};$$

$$\delta = \frac{Cde}{(C-1)(D-1)};\ \varepsilon = \frac{Def}{(D-1)(E-1)};\ \text{ꝛc.}$$

Man setze also

$b = A$;	folglich	$\alpha = 1$
$c = B - 1$;		$\beta = A$
$d = C - 1$;		$\gamma = B$
$e = D - 1$;		$\delta = C$
$f = E - 1$;		$\varepsilon = D$

ꝛc.

Als-

Alsdann wird

$$x = \cfrac{1}{A + \cfrac{A}{B - 1 + \cfrac{B}{C - 1 + \cfrac{C}{D - 1 + \cfrac{D}{E - 1 + \text{etc.}}}}}}$$

Erstes Exempel.

Da wir oben gesehen haben, daß, wenn e eine Zahl bedeutet, deren Logarithme = 1 ist,

$$\frac{1}{e} = 1 - \frac{1}{1} + \frac{1}{1.2} - \frac{1}{1.2.3} + \frac{1}{1.2.3.4} - \text{etc.}$$

oder

$$1 - \frac{1}{e} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1.2} + \frac{1}{1.2.3} - \frac{1}{1.2.3.4} + \text{etc.}$$

ist: so erhält man aus dieser Reihe einen continuirlichen Bruch, wenn man $A = 1$, $B = 2$, $C = 3$, $D = 4$, etc. setzt. Es wird nemlich alsdann

$$1 - \frac{1}{e} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \text{etc.}}}}}}}$$

und hieraus, wenn man umkehrt, und die unähnlichen Glieder im Anfange wegschaft,

$$\frac{1}{e - 1} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{2 + \cfrac{3}{3 + \cfrac{4}{4 + \cfrac{5}{5 + \text{etc.}}}}}}$$

Zweytes

Zweytes Exempel.

Da der Cosinus eines Bogens, der dem Halbmesser gleich ist,

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2.12} - \frac{1}{2.12.30} + \frac{1}{2.12.30.56} - \text{rc.}$$

ist: so wird, wenn man $A = 1$, $B = 2$, $C = 12$, $D = 30$, $E = 56$, rc. und den Cosinus des Bogens, der dem Halbmesser gleich ist, $= x$ setzt

$$x = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{12}{29 + \cfrac{30}{55 + \text{rc.}}}}}}$$

oder

$$\frac{1}{x} - 1 = \cfrac{1}{1 + \cfrac{2}{11 + \cfrac{12}{29 + \cfrac{30}{55 + \text{rc.}}}}}$$

§. 371.

Es sey außerdem die Reihe mit einer geometrischen verbunden, oder

$$x = A - Bz + Cz^2 - Dz^3 + Ez^4 - Fz^5 + \text{rc.}$$

so wird

$$\alpha = Ab;\ \beta = \frac{Bbcz}{A - Bz};\ \gamma = \frac{ACcdz}{(A - Bz)(B - Cz)};$$

$$\delta = \frac{BDdez}{(B - Cz)(C - Dz)};\ \varepsilon = \frac{CEefz}{(C - Dz)(D - Ez)};\ \text{rc.}$$

Man setze also

b

$b = 1$	und also	$\alpha = A$	
$c = A - Bz$		$\beta = Bz$	
$d = B - Cz$		$\gamma = ACz$	
$e = C - Dz$		$\delta = BDz$	
	ꝛc.		

so wird

$$x = \cfrac{A}{1 + \cfrac{Bz}{A - Bz + \cfrac{ACz}{B - Cz + \cfrac{BDz}{C - Dz + \text{ꝛc.}}}}}$$

§. 372.

Um aber diesen Fall allgemeiner zu machen, so sey

$$x = \frac{A}{L} - \frac{By}{Mz} + \frac{Cy^2}{Nz^2} - \frac{Dy^3}{Oz^3} + \frac{Ey^4}{Pz^4} - \text{ꝛc.}$$

Hier erhält man durch angestellte Vergleichung

$$\alpha = \frac{Ab}{L};\ \beta = \frac{BLbcy}{AMz - BLy};\ \gamma = \frac{ACM^2cdyz}{(AMz - BLy)(BNz - CMy)};$$

$$\delta = \frac{BDN^2deyz}{(BNz - CMy)(COz - DNy)};\ \text{ꝛc.}$$

Nun nehme man b, c, d, ꝛc. auf folgende Art:

$b = L;$	so wird	$\alpha = A$
$c = AMz - BLy;$		$\beta = BLLy$
$d = BNz - CMy;$		$\gamma = ACM^2yz$
$e = COz - DNy;$		$\delta = BDN^2yz$
$f = DPz - EOy;$		$\varepsilon = CEO^2yz$
ꝛc.		ꝛc.

Folglich ist der continuirliche Bruch, durch welchen die gegebene Reihe ausgedrückt werden kann,

$$x = \cfrac{A}{L + \cfrac{BLLy}{AMz - BLy + \cfrac{ACMMyz}{BNz - CMy + \cfrac{BDNNyz}{COz - DNy + \text{ꝛc.}}}}}$$

§. 373.

Hat endlich die gegebene Reihe folgende Gestalt:

$$x = \frac{A}{L} - \frac{ABy}{LMz} + \frac{ABCy^2}{LMNz^2} - \frac{ABCDy^3}{LMNOz^3} + \text{ꝛc.}$$

so wird

$$\alpha = \frac{Ab}{L};\ \beta = \frac{Bbcy}{Mz - By};\ \gamma = \frac{CMcdyz}{(Mz-By)(Nz-Cy)};$$

$$\delta = \frac{DNdeyz}{(Nz-Cy)(Oz-Dy)};\ \varepsilon = \frac{EOefyz}{(Oz-Dy)(Pz-Ey)};$$

ꝛc.

Um also diese Werthe in ganzen Zahlen zu erhalten, setze man

$b = Lz;$	so wird	$\alpha = Az$
$c = Mz - By;$		$\beta = BLyz$
$d = Nz - Cy;$		$\gamma = CMyz$
$e = Oz - Dy;$		$\delta = DNyz$
$f = Pz - Ey;$		$\varepsilon = EOyz$
ꝛc.		ꝛc.

Demnach wird die gegebene Reihe in folgenden continuirlichen Bruch

$$x = \cfrac{Az}{Lz + \cfrac{BLyz}{Mz - By + \cfrac{CMyz}{Nz - Cy + \cfrac{DNyz}{Oz - Dy + \text{ꝛc.}}}}}$$

oder, damit das Progressions-Gesetz vom Anfang an in die Augen falle, in diesen

$$\frac{Az}{x} - Ay = Lz - Ay + \cfrac{BLyz}{Mz - By + \cfrac{CMyz}{Nz - Cy + \cfrac{DNyz}{Oz - Dy + \text{ꝛc.}}}}$$

verwandelt.

§. 374.

Auf diese Art lassen sich unzählige ohne Ende fortgehende continuirliche Brüche von der Art finden, daß man ihren wahren Werth angeben kann. Denn da die unendlichen Reihen, die wir oben betrachtet haben und deren Summen bekannt sind, hierzu gebraucht werden können: so kann man eine jede von diesen Reihen in einen continuirlichen Bruch verwandeln, dessen wahrer Werth der Summe jener Reihe gleich seyn muß. Die Beyspiele, die bereits betrachtet worden sind, zeigen die Art und Weise hiervon hinlänglich; allein es wäre zu wünschen, daß man eine Methode erfinden möchte, durch welche sich der Werth eines gegebenen continuirlichen Bruchs unmittelbar darstellen oder angeben ließe. Denn obgleich jeder continuirliche Bruch in eine unendliche Reihe verwandelt, und die Summe dieser Reihe nach den oben erklärten Methoden gesucht werden kann: so werden denn doch diese Reihen gemeiniglich so zusammengesetzt, daß man daraus ihre obschon sehr einfache Summe kaum zu erforschen im Stande ist.

§. 375.

Damit man deutlich einsehe, daß es continuirliche Brüche gebe, deren Werth aus andern Quellen sehr leicht erhalten werden kann, ob man gleich denselben aus den unendlichen Reihen, worin man die Brüche verwandelt, auf keine Weise zu erforschen im Stande ist: so wollen wir diesen continuirlichen Bruch

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{etc.}}}}}$$

be-

betrachten, dessen Nenner insgesammt einander gleich sind. Denn formiren wir daraus auf die oben erklärte Art die Brüche

$$0,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,$$
$$\frac{1}{0},\ \frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ \frac{5}{12},\ \frac{12}{29},\ \frac{29}{70},\ \text{rc.}$$

so bekommen wir daher folgende Reihe:

$$x = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2.5} + \frac{1}{5.12} - \frac{1}{12.29} + \frac{1}{29.70} - \text{rc.}$$

oder, wenn wir immer zwey und zwey Glieder mit einander verbinden, diese:

$$x = \frac{2}{1.5} + \frac{2}{5.29} + \frac{2}{29.169} + \text{rc.}$$

oder

$$x = \frac{1}{2} - \frac{2}{2.12} - \frac{2}{12.70} - \text{rc.}$$

Da überdem

$$x = \begin{cases} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2.2.5} + \frac{1}{2.5.12} - \frac{1}{2.12.29} + \text{rc.} \\ + \frac{1}{4} - \frac{1}{2.2.5} + \frac{1}{2.5.12} - \frac{1}{2.12.29} + \text{rc.} \end{cases}$$

ist: so wird auch

$$x = \frac{1}{4} + \frac{1}{1.5} - \frac{1}{2.12} + \frac{1}{5.29} - \frac{1}{12.70} + \text{rc.},$$

allein so sehr diese Reihen auch convergiren, so ist man doch nicht im Stande, ihre Summe aus ihrer Form abzuleiten.

§. 376.

Für dergleichen continuirliche Brüche aber, in welchen entweder alle Nenner einander gleich sind, oder immer eben dieselben Nenner wiederkehren, so daß ein solcher Bruch, nachdem man davon vom Anfang an einige Glieder abgeschnitten hat, doch noch dem ganzen Bruche gleich ist, giebt es eine sehr leichte Art, den Werth derselben zu finden. So ist in dem Exempel des vorhergehenden §, wo

$$x = \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{rc.}}}}}$$

war, $x = \frac{1}{2+x}$, folglich $xx + 2x = 1$, und $x + 1 = \sqrt{2}$, so daß also der Werth des angeführten continuirlichen Bruchs $= \sqrt{2} - 1$ ist. Die Brüche aber, welche wir vorhin aus dem continuirlichen Bruche abgeleitet haben, nähern sich diesem Werthe unaufhörlich, und das so schnell, daß wohl schwerlich eine schnellere Art, diesen irrationalen Werth durch Rational-Zahlen näherungsweise auszudrucken, wird entdeckt werden können. Es ist nemlich ohne einen eben beträchtlichen Fehler $\sqrt{2} - 1 = \frac{29}{70}$. Denn zieht man die Wurzel wirklich aus, so ist

$$\sqrt{2} - 1 = 0{,}41421356236, \text{ und}$$

$$\frac{29}{70} = 0{,}41428571428$$

so daß der Fehler bloß die Hunderttausendtheile angeht.

§. 377.

So wie die continuirlichen Brüche einen sehr bequemen Weg an die Hand geben, sich dem Werthe der $\sqrt{2}$ zu nähern: so läßt sich dergleichen daraus auch für die Wurzeln anderer Zahlen herleiten. Es sey zu dem Ende

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}}}$$

wo also $x = \frac{1}{a + x}$, und $xx + ax = 1$, und also $x = -\frac{1}{2}a + \sqrt{(1 + \frac{1}{4}aa)} = \frac{\sqrt{(aa+4)} - a}{2}$ wird. Es dient daher dieser Bruch zur Erfindung der Quadrat-Wurzeln aus den Zahlen, die unter die Form $aa + 4$ gehören. Setzt man also für a nach und nach die Zahlen, 1, 2, 3, 4, etc. so findet man $\sqrt{5}$; $\sqrt{2}$; $\sqrt{13}$; $\sqrt{5}$; $\sqrt{29}$; $\sqrt{10}$; $\sqrt{53}$; etc. wenn man nemlich diese Wurzeln auf ihre einfachste Form zurückführt. Es ist folglich

$$\begin{array}{llllll} 1, & 1, & 1, & 1, & 1, & 1, \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{5}, & \frac{5}{8}, \text{ etc.} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 2, & 2, & 2, & 2, & 2, & 2, \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{2}{5}, & \frac{5}{12}, & \frac{12}{29}, & \frac{29}{70}, \text{ etc.} = \sqrt{2}-1 \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 3, & 3, & 3, & 3, & 3, & 3, \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{3}, & \frac{3}{10}, & \frac{10}{33}, & \frac{33}{109}, & \frac{109}{360}, \text{ etc.} = \frac{\sqrt{13}-3}{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 4, & 4, & 4, & 4, & 4, & 4, \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{4}, & \frac{4}{17}, & \frac{17}{72}, & \frac{72}{305}, & \frac{305}{1292}, \text{ etc.} = \sqrt{5}-2 \end{array}$$

etc.

Hierbey ist zu bemerken, daß die Näherung desto schneller erfolgt, je größer a ist. So ist in dem letzten Exempel $\sqrt{5}$ =

$= 2\frac{305}{1292}$, wobey der Irrthum geringer ist, als $\frac{1}{1292 \cdot 5473}$.

Es ist aber 5473 der Nenner des folgenden Bruchs $\frac{1292}{5473}$.

§. 378.

Auf diese Art aber können bloß die Wurzeln solcher Zahlen gefunden werden, die Summen zweyer Quadrate sind. Um daher dieses Näherungs-Mittel auch auf andere Zahlen auszudehnen, so sey

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \text{ꝛc.}}}}}}}$$

Alsdann wird

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + x}} = \frac{b + x}{ab + 1 + ax}$$

und folglich

$$axx + abx = b, \text{ und}$$

$$x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}bb + \frac{b}{a}\right)} = \frac{-ab + \sqrt{(aabb + 4ab)}}{2a}$$

Vermittelst dieser Formel lassen sich die Quadrat-Wurzeln aller Zahlen finden. Setzt man z. B. $a = 2$, $b = 7$; so wird $x = \frac{-14 + \sqrt{14 \cdot 18}}{4} = \frac{-7 + 3\sqrt{7}}{2}$; und diesen Werth von x erhält man in den Brüchen

$$\begin{array}{cccccc} 2, & 7, & 2, & 7, & 2, & 7, \\ \frac{0}{1}, & \frac{1}{2}, & \frac{7}{15}, & \frac{15}{32}, & \frac{112}{239}, & \frac{239}{510}, \text{ ꝛc.} \end{array}$$

Es ist daher beynahe $\frac{-7 + 3\sqrt{7}}{2} = \frac{239}{510}$, und $\sqrt{7} = \frac{2024}{765} = 2,6457516$. Dieser Werth weicht von dem wahren $2,64575131$ noch nicht um $\frac{3}{10000000}$ ab.

§. 379.

Nun wollen wir ferner

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{a + \text{etc.}}}}}}}}$$

setzen, woraus

$$x = \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + x}}} = \cfrac{1}{a + \cfrac{c + x}{bx + bc + 1}} = \frac{bx + bc + 1}{(ab + 1)x + abc + a + c}$$

wird. Hieraus aber fließt

$$(ab + 1)xx + (abc + a - b + c)x = bc + 1, \text{ und}$$

$$x = \frac{-abc - a + b - c + \sqrt{((abc + a + b + c)^2 + 4)}}{2(ab + 1)}$$

Allein da die Größe unter dem Wurzel-Zeichen in diesem Ausdrucke wieder die Summe zweyer Quadrate ist, so kann man denselben bey der Extraction der Quadrat-Wurzeln nicht weiter gebrauchen, als wo man sich schon der ersten Formel bedienen konnte. Eben so reicht die Formel, welche man findet, wenn man die vier Buchstaben a, b, c, d, in den

den Nennern des continuirlichen Bruchs wiederkehren läßt, nicht weiter als die zweyte, welche nur zwey Buchstaben enthält, ꝛc.

§. 380.

Da man sich also der continuirlichen Brüche mit so vielem Vortheile zur Extraction der Quadrat-Wurzel bedienen kann: so werden dieselben auch bey der Auflösung der quadratischen Gleichungen mit Nutzen gebraucht werden können; so wie solches auch schon aus der Rechnung erhellt, indem x durch eine unreine quadratische Gleichung bestimmt wird. Es kann aber auch umgekehrt die Wurzel jeder quadratischen Gleichung sehr leicht auf folgende Art durch einen continuirlichen Bruch dargestellt werden. Es sey die Gleichung

$$xx = ax + b$$

gegeben. Da man daraus

$$x = a + \frac{b}{x}$$

erhält, so setze man in dem letzten Gliede anstatt x den schon gefundenen Werth desselben, wo denn

$$x = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{x}}$$

wird. Fährt man auf diesem Wege weiter fort, so ist der Werth von x, durch einen ohne Ende fortlaufenden continuirlichen Bruch ausgedruckt,

$$x = a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \cfrac{b}{a + \text{ꝛc.}}}}$$

Allein da die Zähler b keine Einheiten sind, so läßt sich davon kein bequemer Gebrauch machen.

§. 381.

Um nun den Nutzen der continuirlichen Brüche in der Arithmetik zu zeigen, so ist zuvörderst zu bemerken, daß ein jeder gewöhnlicher Bruch in einen continuirlichen Bruch verwandelt werden kann. Ist z. B. der Bruch $x = \frac{A}{B}$ gegeben, und darin A größer als B, so dividire man A durch B, wo denn der Quotient a und der Rest C seyn mag. Nun dividire man durch diesen Rest C den vorhergehenden Divisor B, und der Quotient sey b und der Rest D, den man nun wieder durch den vorhergehenden Divisor C dividiren muß. Auf diese Art setze man diese Operation, welche man gewöhnlich bey der Reduction der Brüche auf die kleinsten Zahlen anwendet, um den größten gemeinschaftlichen Faktor von A und B zu finden, fort, bis nichts mehr übrig bleibt. Hier ist ein Beyspiel:

B) A (a
   C) B (b
      D) C (c
         E) D (d
            F ꝛc.

Nun ist, wegen der Natur der Division,

$$A = aB + C;\ \text{also}\ \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B}$$

$$B = bC + D;\quad \frac{B}{C} = b + \frac{D}{C};\quad \frac{C}{B} = \frac{1}{b + \frac{D}{C}}$$

$$C = cD + E;\quad \frac{C}{D} = c + \frac{E}{D};\quad \frac{D}{C} = \frac{1}{c + \frac{E}{D}}$$

$$D = dE + F;\quad \frac{D}{E} = d + \frac{F}{E};\quad \frac{E}{D} = \frac{1}{d + \frac{F}{E}}$$

ꝛc. ꝛc. ꝛc.

Setzt

Setzt man daher die folgenden Werthe in die vorhergehenden, so wird

$$x = \frac{A}{B} = a + \frac{C}{B} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{D}{C}} = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{E}{D}}}$$

und demnach wird endlich x durch die gefundenen Buchstaben a, b, c, d, ꝛc. allein auf folgende Art ausgedruckt:

$$x = a + \cfrac{1}{b + \cfrac{1}{c + \cfrac{1}{d + \cfrac{1}{e + \cfrac{1}{f + \text{ꝛc.}}}}}}$$

Erstes Exempel.

Es sey der Bruch $\frac{1461}{59}$ gegeben, welcher auf folgende Art in einen continuirlichen Bruch verwandelt wird, dessen Zähler lauter Einheiten sind. Man stelle zuvörderst die Operation an, wodurch der gröszte gemeinschaftliche Divisor der Zahlen 59 und 1461 gesucht zu werden pflegt.

```
59)1461(24
   118
   ---
    281
    236
    ---
     45)59(1
        45
        --
        14)45(3
           42
           --
            3)14(4
              12
              --
               2)3(1
                 2
                 -
                 1)2(2
                   2
                   -
                   0
```

Aus diesen Quotienten wird alsdann

$$\frac{1461}{59} = 24 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2}}}}}$$

Zweytes Exempel.

Auch die Decimal-Brüche können auf diese Art verwandelt werden. Denn ist z. B.

$$\sqrt{2} = 1,41421356 = \frac{141421356}{100000000},$$

gegeben, so stellt man zuvörderst folgende Operation an

100000000	141421356	1
82842712	100000000	2
17157288	41421356	2
14213560	34314567	2
2943728	7106780	2
2438648	5887456	2
505080	1219324	2
418728	1010160	2
ꝛc.	209364	

Da nun aus dieser Operation erhellet, daß jeder Nenner $= 2$ ist, so hat man

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \text{ꝛc.}}}}}$$

und

und die Beschaffenheit dieses Ausdrucks ist bereits aus dem Obigen bekannt.

Drittes Exempel.

Vorzüglich verdient die Zahl e, deren Logarithme $= 1$, und die selbst $= 2{,}718281828459$ ist, unsere Aufmerksamkeit. Da man daraus $\frac{e-1}{2} = 0{,}8591409142295$ findet, so giebt dieser Bruch, wenn man ihn auf die vorhergehende Art behandelt, folgende Quotienten:

8591409142295	10000000000000	1
8451545146224	8591409142295	6
139863996071	1408590857704	10
139312557916	1398639960710	14
551438155	9950896994	18
550224488	9925886790	22
1213667	25010204	

2c.

und setzt man diese Rechnung, wenn man den Werth von e nimmt, noch weiter fort, so findet man diese Quotienten,

1, 6, 10, 14, 18, 22, 26, 30, 34, 2c.

die, wenn man den ersten wegläßt, eine arithmetische Progression ausmachen. Es ist daher

$$\frac{e-1}{2} = \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{6 + \cfrac{1}{10 + \cfrac{1}{14 + \cfrac{1}{18 + \cfrac{1}{22 + \text{2c.}}}}}}}$$

In

In der Analysis des Unendlichen läßt sich dieser Bruch weiter untersuchen.

§. 382.

Da man aus dergleichen Ausdrücken Brüche ableiten kann, die sich dem wahren Werthe dieser Ausdrücke sehr schnell nähern; so kann man sich dieser Methode bedienen, um Decimal-Brüche in gewöhnliche Brüche zu verwandeln, die sich von jenen nur um einen unbeträchtlichen Theil unterscheiden. Ja, wenn ein Bruch, gegeben ist, dessen Zähler und Nenner sehr große Zahlen sind, so kann man dafür einen andern Bruch, dessen Zähler und Nenner aus kleinern Zahlen bestehen, finden, der zwar dem gegebenen Bruche nicht vollkommen gleich, aber doch auch nicht merklich von ihm unterschieden ist. Und so läßt sich jene Wallisische Aufgabe auflösen, worin verlangt wird, daß man Brüche finden soll, die durch kleinere Zahlen ausgedruckt werden, und den Werth des in größern Zahlen gegebenen Bruchs so genau erschöpfen, als es durch Zahlen, die nicht größer sind, geschehen kann. Die Brüche, welche wir auf dem beschriebenen Wege finden, nähern sich dem Werthe des continuirlichen Bruchs, aus welchem sie abgeleitet worden, so sehr, daß keine andere, die nicht aus größern Zahlen bestehen, sich ihm mehr nähern können.

Erstes Exempel.

Es soll das Verhältniß des Durchmessers zum Umkreise durch so kleine Zahlen ausgedruckt werden, daß solches auf keine genauere Art geschehen kann, wofern man nicht größere Zahlen nimmt.

Wenn man den bekannten Decimal-Bruch

3,1415926535 ꝛc.

auf die beschriebene Art durch eine fortgesetzte Division entwickelt, so erhält man die Quotienten,

3, 7, 15, 1, 292, 1, 1, ꝛc.

und daraus ergeben sich folgende Brüche,

$$\frac{1}{0},\ \frac{3}{1},\ \frac{22}{7},\ \frac{333}{106},\ \frac{355}{113},\ \frac{103993}{33102},\ \text{ꝛc.}$$

Der zweyte zeigt schon an, daß sich der Durchmesser zur Peripherie wie 1 : 3 verhalte, und genauer kann dies Verhältniß durch keine andere als durch größere Zahlen ausgedruckt werden. Der dritte Bruch giebt das Archimedeische Verhältniß 7 : 22; und der fünfte das vom Metius, welches der Wahrheit schon so nahe kommt, daß der Fehler weniger als $\frac{1}{113 \cdot 33102}$ beträgt. Uebrigens sind diese Brüche wechselsweise zu groß und zu klein.

Zweytes Exempel.

Man soll das Verhältniß eines Tages zum mittlern Sonnenjahre in den möglich kleinsten Zahlen ausdrucken.

Da dieses Jahr 365 T., 5 St., 48′, 55″ enthält, so besteht es aus $365\frac{20935}{86400}$ Tagen. Entwickelt man nun diesen Bruch, als worauf es allein ankommt, so findet man die Quotienten

4, 7, 1, 6, 1, 2, 2, 4

und aus ihnen folgende Brüche

$$\frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{7}{29},\ \frac{8}{33},\ \frac{55}{227},\ \frac{63}{260},\ \frac{181}{747},\ \text{ꝛc.}$$

Die

Die Stunden, Minuten und Secunden, welche das Jahr über 365 Tage enthält, machen also in 4 Jahren ohngefehr einen Tag, und darauf gründet sich die Einrichtung des Julianischen Calenders. Genauer gerechnet, so entstehen daraus in 33 Jahren 8 Tage, oder in 747 Jahren 181 Tage, so daß also in vier hundert Jahren 97 Tage zu viel herauskommen. Da also der Julianische Calender in diesem Zeitraume 100 Tage einschaltet, so verwandelt der Gregorianische in vier hundert Jahren drey Schaltjahre in gemeine Jahre.

Ende des ersten Buchs.