Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

I. Zusätze zum ersten Capitel.

I.

Zusätze zum ersten Capitel.

A. Inhalt des ersten Capitels.

Euler beschäftiget sich in diesem Capitel mit dem Begriffe und den Arten der Funktionen. Da der Begriff der Funktion die Begriffe der beständigen und der veränderlichen Größe voraussetzt, so schickt er gleich im Anfange die Erklärungen dieser beyden Gattungen der Größen voraus, und theilt darauf den Begriff der Funktion auf die Art mit, daß er nicht nur die Funktion erklärt, sondern auch bemerkt, zu was für einer Gattung der Größen dieselbe gehört. Was die Arten der Funktionen betrifft, so redet Euler davon in der Ordnung, in welcher man sie bey der Eintheilung der Funktionen entdeckt. Man kann nemlich zuvörderst bey der Eintheilung der Funktionen jede Funktion entweder an und für sich betrachten, oder mehrere unter einander vergleichen. Im ersten Falle bietet sich wieder ein doppelter Theilungsgrund dar; denn es unterscheiden sich die Funktionen theils nach den Operationen, durch welche die veränderliche Größe in ihnen mit beständigen Größen verbunden ist, theils nach dem Werthe, welchen sie bey Bestimmung der in ihnen enthaltenen veränderlichen Größe bekommen. Wenn die Funktionen nach den Operationen eingetheilt werden sollen, durch welche ihre veränderliche Größe mit beständigen Größen verbunden ist: so kann man ihre Arten entweder nach den einzelnen Operationen, oder nach den Gattungen derselben festsetzen. Im ersten Falle giebt es so viele Arten der Funktionen, als es einzelne Operationen giebt, durch welche Größen mit einander verbunden werden können. Im andern Falle aber sind die Funktionen entweder algebraische oder transcendente, und die algebraischen wieder entweder rationale oder irrationale Funktionen; endlich lassen sich die rationalen Funktionen noch in ganze und gebrochene, und die irrationalen in entwickelte und in verwickelte Funktionen eintheilen. Bey der Eintheilung der Funktionen nach dem Werthe, welchen sie bey Bestimmung der in ihnen enthaltenen veränderlichen Größe bekommen, findet ebenfalls ein zwiefacher Fall statt, indem man dabey einmal den Werth, den die Funktionen erhalten, wenn man für ihre veränderliche Größe irgend eine absolute beständige Größe setzt, betrachten, oder zweytens auf denjenigen sehen kann, den sie bekommen, wenn man für ihre veränderliche Größe nach einander zwey gleich große entgegengesetzte Größen setzt. Im ersten Falle sind die Funktionen entweder einförmig oder vielförmig, und das entweder nach allen ihren Werthen, oder bloß nach den reellen. Im andern Falle werden die Funktionen in gerade und in ungerade Funktionen getheilt. Was endlich zweytens die Eintheilung der Funktionen anlanget, wobey mehrere mit einander verglichen werden, so sind dabey die Funktionen theils einander ähnlich oder nicht, und hier läßt sich leicht einsehen, daß bloß von den ähnlichen gesprochen zu werden braucht.

Man kann also den Inhalt dieses Capitels in folgende Tabelle bringen.

Von den Funktionen überhaupt.

1. Begriff der Funktion, §. 1—5.
   a. Vorbereitende Erklärungen, §. 1—3.
      α. der beständigen Größe, §. 1.
      β. der veränderlichen Größe, §. 2. 3.
   b. Begriff der Funktion selbst, §. 4. 5.
      α. Erklärung der Funktion, §. 4.
      β. Anmerkung über die Art der Größe, zu welcher die Funktion gehört, §. 5.
2. Arten der Funktionen, §. 6 —— 26.
   a. wenn die Funktionen an und für sich betrachtet werden, §. 6 —— 25.
      α. in Ansehung der Operationen, durch welche die veränderliche Größe in denselben mit beständigen Größen verbunden ist, §. 6—9, und zwar
         aa. in Ansehung einzelner Operationen, §. 6.
         bb. in Ansehung der Gattungen dieser Operationen, §. 7—9.
            αα. Algebraische Funktionen, §. 8.
               aaa. Rationale, §. 8.
                  ααα. ganze } §. 9.
                  βββ. gebrochene } §. 9.
               bbb. Irrationale, §. 8.
                  ααα. entwickelte } §. 8.
                  βββ. verwickelte } §. 8.
            ββ. Transcendente Funktionen, §. 7.
      β. in Ansehung des Werthes, welchen die Funktionen bey Bestimmung der in ihnen enthaltenen veränderlichen Größe bekommen, §. 10 —— 25.
         aa. wenn für die veränderliche Größe der Funktionen irgend eine absolute beständige Größe gesetzt wird, §. 10—17.

αα. hieraus entstehende Arten der Funktionen, §. 10 — 15.
aaa. wenn jeder auf diesem Wege sich ergebende Werth der Funktionen in Betrachtung gezogen wird, §. 10 — 14.
ααα. Einförmige Funktionen, §. 10.
βββ. Vielförmige Funktionen, §. 10 — 14.
1. besondere Arten davon, §. 11 — 13.
a. zweyförmige, §. 11.
b. dreyförmige, §. 12.
c. vierförmige, §. 13.
2. vielförmige überhaupt, §. 10. 14.
bbb. wenn bloß die möglichen Werthe genommen werden §. 15. Vielförmige Funktionen, die wie einförmige oder zweyförmige gebraucht werden.
ββ. das Bisherige voraussetzende Erweiterung des Begriffs der Funktion, §. 16. 17.
bb. wenn für die veränderliche Größe der Funktionen nach einander zwey gleich große entgegengesetzte Größen gesetzt werden, §. 18 — 25.
αα. gerade Funktionen, §. 18 — 20.
aaa. Begriff der geraden Funktion, §. 18. 19.
ααα. überhaupt, §. 18.
βββ. insbesondere der einförmigen und vielförmigen, §. 18. 19.
bbb. Kennzeichen der geraden Funktion, §. 20.
ββ. ungerade Funktionen, §. 21 — 25.
aaa. Begriff der ungeraden Funktion, §. 21.
bbb. Entstehungsarten der geraden und ungeraden Funktionen aus einander. §. 22. 23.
ccc. Kennzeichen ungerader Funktionen. §. 24. 25.

b. Wenn

b. Wenn die Funktionen in Vergleichung mit einander betrachtet werden, §. 26. Begriff der ähnlichen Funktionen.

Uebrigens ist hier noch zu bemerken, daß die Funktionen auch nach der Anzahl der in ihnen vorkommenden veränderlichen Größen in Funktionen einer, und in Funktionen zweyer oder mehrer veränderlicher Größen eingetheilt werden können. Da aber Euler in dem Capitel, wovon die vorhergehende Tabelle den Inhalt ausführlich darstellt, nur von den Funktionen überhaupt reden wollte: so hatte er dieser Eintheilung nicht nöthig zu gedenken, und konnte bey den Funktionen einer veränderlichen Größe stehen bleiben. Von den Funktionen zweyer oder mehrerer veränderlicher Größen handelt das fünfte Capitel.

B. Ueber die Methode

aus zwey Gleichungen, die eine unbekannte Größe mit einander gemein haben, eine Gleichung zu finden, worin diese unbekannte Größe nicht enthalten ist.

Zu §. 17.

1. Newton giebt in seiner Arithmetica universali, nachdem er S. 57—61 von dieser Methode überhaupt geredet, und die bekannten Regeln für die leichtern Fälle mitgetheilt und erklärt hat, S. 62 und 63 folgende besondere, einige schwerere Fälle betreffende, Regeln:

1) Wenn

$$axx + bx + c = 0, \text{ und } fxx + gx + h = 0$$

ist, so erhält man durch die Wegschaffung der gemeinschaftlichen Größe x folgende Gleichung:

$$(ah - bg - 2cf) \times ah + (bh - cg) \times bf + (agg + cff) \times c = 0.$$

2) Wenn

$$ax^3 + bxx + cx + d = 0, \text{ und } fxx + gx + h = 0.$$

ist, so ist die Gleichung, welche man durch die Wegschaffung der unbekannten Größe x bekommt, folgende:

$$(ah - bg - 2cf) \times ahh + (bh - cg - 2df) \times bfh + (ch - dg)$$
$$(agg + cff) + (3agh + bgg + dff) \times df = 0$$

3) Wenn

$ax^4 + bx^3 + cxx + dx + e = 0$, und $fxx + gx + h = 0$

ist, so giebt die Wegschaffung von x die Gleichung:

$$(ah - bg - 2cf) \times ah^3 + (bh - cg - 2df) \times bfhh + (agg + cff) \times (chh - dgh + egg - 2efh) + (3agh + bgg + dff) \times dfh + (2ahh + 3bgh - dfg + eff) \times eff - (bg - 2ah) \times efgg = 0$$

4) Wenn

$ax^3 + bxx + cx + d = 0$, und $fx^3 + gxx + hx + k = 0$

ist, so bekommt man durch die Wegschaffung der gemeinschaftlichen Größe x die Gleichung:

$$(ah - bg - 2cf) \times (adhh - achk) + (ak + bh - cg - 2df) \times bdfh - (ak + bh + 2cg + 3df) \times aakk + (cdh - ddg - cck + 2bdk) \times (agg + cff) + (3agh + bgg + dff - 3afk) \times ddf - (3ak - bh + cg + df) \times bcfk + (bk - 2dg) \times bbfk - (bbk - 3adh - cdf) \times agk = 0.$$

2. Die Art und Weise, wie Newton diese Regeln gefunden, findet man zwar am angeführten Orte nicht bemerkt, indeß erhält man sie unter andern aus den allgemeinen Gleichungen, zu welchen sie gehören, wenn man aus denselben die Größe x nach den bekannten Regeln wegschaft. So ergiebt sich z. B. die erste Regel, wenn man

$axx + bx + c = 0$ in $afxx + bfx + cf = 0$, und

$fxx + gx + h = 0$ in $afxx + agx + ah = 0$ verwandelt, aus diesen beyden Gleichungen durch die Subtraction

$$(bf - ag)\,x + cf - ah = 0 \text{ macht}$$

hieraus $x = \dfrac{ah - cf}{bf - ag}$ entwickelt, und diesen Werth von x in die Gleichung $axx + bx + c = 0$ bringt. Da nemlich wegen des gefundenen Werthes von x,

$$x^2 = \frac{aahh - 2ahfc + ccff}{(bf - ag)^2}$$

ist, so erhält man dadurch die Gleichung

$$\frac{(aahh - 2ahfc + ccff)a}{(bf - ag)^2} + \frac{(ah - cf)b}{bf - ag} + c = 0$$

oder

$$\frac{a^3hh - 2aahfc + accff + abbfh - bbffc - aabgh + abcfg + bbffc - 2abcfg + aacgg}{=}$$

$$aahh - 2ahfc + ccff + bbfh - abgh - bcfg + acgg$$

$$=$$

$$(ah - bg - 2fc) \times ah + (bh - cg) \times bf + (agg + cff) \times c = 0.$$

3. Den Gebrauch dieser Regeln zeigt Newton an folgenden Beyspielen:

a. Soll aus den Gleichungen $xx + 5x - 3yy = 0$, und $3xx - 2xy + 4 = 0$ die Größe x weggeschaft werden: so setzt man in der ersten Regel $a = 1$, $b = 5$, $c = -3yy$, $f = 3$, $g = -2y$ und $h = 4$. Dadurch bekommt man

$$(4 + 10y + 18yy) \times 4 + (20 - 6y^3) \times 15 + (4yy - 27yy) \times -3yy = 0$$

oder

$$16 + 40y + 72yy + 300 - 90y^3 + 69y^4 = 0$$

b. Soll man aus den Gleichungen, $y^3 - xyy - 3x = 0$, und $yy + xy - xx + 3 = 0$, die Größe y wegschaffen: so setzt man in der zweyten Regel $a = 1$, $b = -x$, $c = 0$, $d = -3x$; $f = 1$, $g = x$, $h = -xx + 3$, und $x = y$. Alsdann wird

$$(3 - xx + xx)(9 - 6xx + x^4) + (-3x + x^3 + 6x)(-3x + x^3) + 3xx \times xx + (9x - 3x^3 - x^3 - 3x) \times -3x = 0$$

oder

$$27 - 18xx + 3x^4 - 9xx + x^6 + 3x^4 - 18x^2 + 12x^4 = 0$$

oder

$$x^6 + 18x^4 - 45xx + 27 = 0.$$

4. Euler lehrt in seiner Nouvelle méthode d'éliminer ꝛc. einen andern Weg, diese Regeln zu finden. Er ist folgender.

a. Wenn

$$A + Bz = 0, \text{ und } a + bz = 0$$

ist, so wird, wenn man die erste Gleichung mit b und die andern mit B multiplicirt, und das letzte Produkt von dem ersten abzieht,

$$Ab - Ba = 0$$

Eben dieses findet man, wenn man die erste Gleichung mit a, und die andern mit A multiplicirt, das erste Produkt von dem zweyten abzieht, und die daher entspringende Gleichung $Abz - Baz = 0$ durch z dividirt.

b. Wenn

$$A + Bz + Czz = 0, \text{ und } a + bz + czz = 0$$

ist, so ist die Differenz zwischen der ersten Gleichung mit c und der andern mit C multiplicirt,

$$Ac - Ca + (Bc - Cb)z = 0$$

so wie die Differenz eben dieser Gleichungen, nachdem man die erste mit a und die andere mit A multiplicirt, die Differenz selbst aber durch z dividirt hat,

$$Ba - Ab + (Ca - Ac)z = 0$$

Auf diese Art hat man also zwey Gleichungen gefunden, aus welchen sich die unbekannte Größe z nach a wegschaffen läßt. Es wird aber alsdann

$$(Ac - Ca)(Ca - Ac) - (Bc - Cb)(Ba - Ab) = 0$$

oder

$$AAcc - 2ACac + CCaa + BBac - ABbc - BCab + ACbb = 0$$

c. Wenn

c. Wenn

$A + Bz + Czz + Dz^3 = 0$, und $a + bz + czz + dz^3 = 0$ ist, so wird, wenn man die erste Gleichung mit d und die andere mit D multiplicirt, und das letzte Produkt von dem ersten abzieht,

$$Ad - Da + (Bd - Db)z + (Cd - Dc)zz = 0$$

Multiplicirt man hingegen die erste Gleichung mit a und die andere mit A, so ist die Differenz zwischen beyden durch z dividirt,

$$Ba - Ab + (Ca - Ac)z + (Da - Ad)zz = 0$$

Man hat also zwey Gleichungen, aus welchen sich die unbekannte Größe z nach b wegschaffen läßt, und es ist leicht einzusehen, daß man auf eine ähnliche Art zwey biquadratische Gleichungen auf zwey cubische, und überhaupt jede zwey Gleichungen von irgend einem Grade auf zwey Gleichungen von einem niedrigern Grade zurückführen kann. Fährt man aber in dieser Reduktion fort, so kommt man endlich nothwendig auf eine Gleichung, in welcher die Größe z nicht mehr enthalten ist.

d. Um sich aber die Wegschaffung der Größe z aus den beyden cubischen Gleichungen $A + Bz + Czz + Dz^3 = 0$, und $a + bz + czz + dz^3 = 0$ zu erleichtern, so setze man

$$Ad - Da = A' \qquad aB - bA = a'$$
$$Bd - Db = B' \qquad aC - cA = b'$$
$$Cd - Dc = C' \qquad aD - dA = c'$$

Hierdurch verwandeln sich die bey c gefundenen quadratischen Gleichungen in folgende:

$$A' + B'z + C'zz = 0, \text{ und } a' + b'z + c'zz = 0.$$

Ferner setze man

$$A'c' - C'a' = A'' \qquad a'B' - b'A' = a''$$
$$B'c' - C'b' = B'' \qquad a'C' - c'A' = b''$$

um dadurch die beyden einfachen Gleichungen

$$A'' - B''z = 0, \text{ und } a'' - b''z = 0$$

zu erhalten, welche folgende von z befreyte Gleichung geben

$$A''b'' - B''a'' = 0.$$

e. Zählt man nun aber die Buchstaben A, B, C, D, a, b, c, d, welche in jedem Gliede in einander multiplicirt sind: so enthalten die Ausdrücke A', B', C', a', b', c' zwey, und die Ausdrücke A'', B'', a'', b'' vier Dimensionen, so daß also die Gleichung $A''b'' - B''a''$ eine Gleichung von 8 Dimensionen, oder jedes ihrer Glieder ein Produkt aus acht Größen ist. Entwickelt man indeß diese Gleichung, so findet sich, daß sie sich durch $Ad - Da$ theilen, und folglich, wenn man wirklich dividirt, in eine Gleichung von sechs Dimensionen verwandeln läßt, welche folgende ist:

$$(Ad - Da)^3 + (Ac - Ca)^2 (Cd - Dc) - 2(Ab - Ba)(Ad - Da)(Cd - Dc) + (Bd - Db)^2 (Ab - Ba) - (Ab - Ba)(Bc - Cb)(Cd - Dc) = 0$$
$$- (Ad - Da)(Ac - Ca)(Bd - Db)$$

f. Wenn zwey Gleichungen vom vierten Grade gegeben sind, so führt diese Methode auf eine Gleichung von 16 Dimensionen, die sich aber, weil sie durch eine Formel von 8 Dimensionen theilbar ist, auf eine Gleichung von 8 Dimensionen zurückführen läßt. Auf eine ähnliche Art verhält es sich mit den folgenden höhern Gleichungen.

5. Außerdem macht Euler in der angeführten Abhandlung noch eine neue Methode der Wegschaffung einer unbekannten Größe aus zweyen Gleichungen bekannt, welche sich auf eine genauere Bestimmung des Begriffs der Elimination gründet. Ueberlegt man nemlich, daß man, wenn sich jede Gleichung vollkommen auflösen ließe, zur Wegschaffung einer zweyen Gleichungen gemeinschaftlichen Größe aus denselben überall den Weg einschlagen könnte, daß man die wegzuschaffende Größe aus beyden Gleichungen suchte, und aus dem auf diese Art gefundenen doppelten Werthe der-

derselben eine neue Gleichung machte: so sieht man bald, daß das Geschäfte der Elimination eigentlich in nichts anderm besteht, als in der Erfindung eines solchen Verhältnisses zwischen den in den gegebenen Gleichungen außer der wegzuschaffenden enthaltenen Größen, wobey die gedachten Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel haben. Soll also z. B. aus den Gleichungen

$$zz + Pz + Q = 0, \text{ und } z^3 + pzz + qz + r = 0$$

z weggeschafft werden, so gebe man beyden Gleichungen die Wurzel ω, wodurch denn $z - \omega$ ein beyden Gleichungen gemeinschaftlicher Faktor wird. Ferner ist alsdann

$$zz + Pz + Q = (z - \omega)(z + \mathfrak{A})$$

$$z^3 + pzz + qz + r = (z - \omega)(zz + az + b) \text{ und also}$$

$$(zz + Pz + Q)(zz + az + b) = (z^3 + pzz + qz + r)(z + \mathfrak{A}).$$

Entwickelt man nun diese Produkte, so ergeben sich aus der Vergleichung derselben folgende Gleichungen:

$$\text{I. } P + a = p + \mathfrak{A}; \qquad \text{III. } Q + Pa + b = q + p\mathfrak{A};$$

$$\text{II. } Pb + Qa = q\mathfrak{A} + r; \quad \text{IV. } Qb = r\mathfrak{A}.$$

Aus diesen Gleichungen lassen sich nicht nur die drey neuen Buchstaben $\mathfrak{A}$, a und b leicht bestimmen, sondern dann auch eine Gleichung finden, die das Verhältniß ausdruckt, welches die Größen P, Q, p, q, r zu einander haben müssen, wenn die gegebenen Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel haben sollen. Es folgt nemlich aus I.

$$\mathfrak{A} = P - p + a$$

und aus II.

$$b = q + p\mathfrak{A} - Q - Pa, \text{ oder } b = q + Pp - pp + pa - Q - Pa.$$

Setzt man nun diese Werthe in III. so bekommt man

$$Pq + PPp - Ppp - PQ + P(p - P)a + Qa = Pq - pq + qa +$$

oder

$$Pp(P - p) + pq - PQ - r = P(P - p)a - (Q - q)a$$

woraus denn

$$a = \frac{Pp(P-p) + pq - PQ - r}{P(P-p)-(Q-q)} = p - \frac{Q(P-p)-r}{P(P-p)-(Q-q)}$$

wird. Eben diese Werthe, in IV gebracht, geben

$$Qq + PQp - Qpp - QQ + Q(p-P)a = r(P-p) + ra$$

oder

$$a = \frac{Qp(P-p)-Q(Q-q)-r(P-p)}{Q(P-p)+r} = p - \frac{Q(Q-q)-Pr}{Q(P-p)+r}$$

Es ist also

$$\frac{Q(P-p)+r}{P(P-p)-(Q-q)} = \frac{Q(Q-q)+Pr}{Q(P-p)+r}, \text{ oder}$$

$$Q(P-p)(Pq-Qp) + 2Qr(P-p) + Pr(Q-q) - PPr(P-p) + Q(Q-q)^2 + rr = 0$$

6. Nunmehr ist auch leicht einzusehen, wie man die unbekannte Größe z aus zwey Gleichungen von jeglichem Grade wegschaffen kann. Denn soll man aus den beyden Gleichungen

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + Rz^{m-3} + Sz^{m-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + rz^{n-3} + sz^{n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

eine neue Gleichung machen, worin z nicht mehr enthalten ist: so ist das eben so viel, als, man soll das Verhältniß zwischen den Coefficienten $P, Q, R,$ ꝛc. $p, q, r,$ ꝛc. bestimmen, wobey die gegebenen Gleichungen eine gemeinschaftliche Wurzel oder einen gemeinschaftlichen Faktor haben. Es sey also $z-\omega$ der gemeinschaftliche Faktor. Alsdann wird

$$z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \text{ꝛc.} = (z-\omega)(z^{m-1} + \mathfrak{A}z^{m-2} + \mathfrak{B}z^{m-3} + \text{ꝛc.})$$

$$z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \text{ꝛc.} = (z-\omega)(z^{n-1} + az^{n-2} + bz^{n-3} + \text{ꝛc.})$$

Macht man nun hieraus die Gleichung

$$(z^m + Pz^{m-1} + Qz^{m-2} + \text{ꝛc.})(z^{n-1} + az^{n-2} + bz^{n-3} + \text{ꝛc.}) = (z^n + pz^{n-1} + qz^{n-2} + \text{ꝛc.})(z^{m-1} + \mathfrak{A}z^{m-2} + \mathfrak{B}z^{m-3} + \text{ꝛc.})$$

und entwickelt man die auf beyden Seiten derselben stehenden

den Produkte: so erhält man daraus, da die ersten Glieder in beyden Hälften einander gleich werden, $m+n-1$ Gleichungen zur Bestimmung der Buchstaben A, B, C, ꝛc. Da nun die Zahl der Buchstaben A, B, C, ꝛc. $m-1$, und die Zahl der Buchstaben a, b, c, ꝛc. $n-1$, und also die Anzahl aller dieser Buchstaben $m+n-2$ ist: so reichen zu ihrer Bestimmung eben so viele Gleichungen hin. Da man also noch eine Gleichung mehr hat, so gelangt man endlich zu einer Gleichung, worin keiner von den Buchstaben A, B, C, ꝛc., a, b, c, ꝛc. enthalten ist, und da auch z nicht darin vorkommt, so ist dieses die gesuchte Gleichung.

7. Diese Eulerische Eliminations-Methode verdient auch deswegen gemerkt zu werden, weil man dadurch zur Auflösung folgender Aufgabe vorbereitet wird: Es sind zwey unbestimmte algebraische Gleichungen gegeben; man soll die Bestimmungen finden, bey welchen diese Gleichungen zwey oder mehrere Wurzeln mit einander gemein haben. Uebrigens giebt Euler selbst zu, daß diese Methode, bloß als Eliminations-Methode betrachtet, nicht immer den übrigen vorzuziehen sey.