Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

II. Zusätze zum zweyten Capitel.

II.

Zusätze zum zweyten Capitel.

A. Inhalt des zweyten Capitels.

Dieses Capitel hängt mit dem zunächst folgenden aufs genaueste zusammen, welches auch am Ende des 27sten §. von Eulern selbst bemerkt worden ist. Es redet aber Euler darin zuvörderst von den beyden ersten Arten der Verwandlung der Funktionen, so, daß er dieselben nach ihrer Beschaffenheit und der Absicht, warum sie vorgenommen werden, kurz beschreibt, und dann betrachtet er die Umformung der Funktionen ohne Substitution ausführlicher. Diese Untersuchung zerfällt in zwey Theile; der erste beschäftiget sich mit den ganzen, und der andere mit den gebrochenen Funktionen. Die Verwandlung der ganzen Funktionen, die hier betrachtet wird, besteht lediglich in der Auflösung dieser Funktionen in Faktoren, und davon redet Euler so, daß er zuerst überhaupt die Beschaffenheit dieser Verwandlung, und die Art, wie sie zu Stande gebracht werden kann, beschreibt, und darauf insbesondere die Frage beantwortet: In was für und in wie viel reelle Faktoren jede ganze Funktion aufgelöset werden kann? Bey den gebrochenen Funktionen ferner wird zuerst die Auflösung der unächten gebrochenen Funktionen in eine ganze und in eine ächte gebrochene Funktion, und zweytens die Auflösung der ächten gebrochenen Funktionen in Partial-

Brüche betrachtet. Bey diesem zweyten Stücke wird erstlich von solchen Brüchen geredet, deren Nenner aus lauter einfachen und einander ungleichen Faktoren bestehen; dann folgen diejenigen, die unter die Form $\frac{P}{(p-qz)^n}$ gehören, in welcher die höchste Potestät von z in dem Zähler P eine niedrigere Potestät ist, als die höchste Potestät eben dieser z im Nenner; und endlich wird von solchen Brüchen gesprochen, deren Nenner aus beyden Arten von Faktoren bestehen.

Tabellarisch dargestellt ist also der Inhalt des zweyten Capitels folgender:

Von der Umformung der Funktionen.

1. Vorläufig von den beyden zunächst zu betrachtenden Arten der Verwandlung der Funktionen überhaupt, §. 27.
2. Von einer jeden dieser Verwandlungsarten der Funktionen insbesondere §. 28. bis zu Ende des dritten Capitels.
   - a. Von der Umformung der Funktionen, §. 28 — 46. a.
     - α. der ganzen Funktionen, §. 28 — — 37. Auflösung derselben in Faktoren.
       - aa. überhaupt, §. 28 — 29.
         - αα. Beschaffenheit und Nutzen dieser Verwandlungsart, §. 28.
         - ββ. Art und Weise, wie sie zu Stande gebracht wird. §. 29.
       - bb. Auflösung derselben in reelle Faktoren, oder Bestimmung der Art und der Anzahl der reellen Faktoren, worin jede ganze Funktion aufgelöset werden kann, §. 30 — 37, und zwar
         - αα. der reellen doppelten Faktoren, die statt der einfachen imaginären genommen werden können. §. 30 — 32.

aaa. vorläufige Anmerkung über die Anzahl der imaginären Faktoren in einer ganzen Funktion und der Beschaffenheit des Produkts aus allen, §. 30.

bbb. die gedachte Bestimmung selbst, §. 31—32.

ααα. wenn die Funktion ein Produkt aus vier, §. 31.

βββ. wenn dieselbe ein Produkt aus irgend einer geraden Anzahl imaginärer Faktoren ist, §. 32.

ββ. der reellen einfachen Faktoren, §. 33—37.

aaa. ein vorläufiger Satz §. 33.

bbb. die erwähnte Bestimmung selbst, §. 34—37.

ααα. bey solchen Funktionen, in welchen der Exponent der höchsten Potestät von x eine ungerade Zahl ist §. 34. 35.

βββ. bey solchen Funktionen, worin eben dieser Exponent eine gerade Zahl ist. §. 36. 37.

1. überhaupt, §. 36.

2. wenn die beständige Größe der Funktion negativ ist, §. 37.

β. der gebrochenen Funktionen, §. 38— —46. a.

aa. Auflösung der unächten gebrochenen Funktionen in eine ganze und in eine ächte gebrochene Funktion. §. 38.

bb. Auflösung der ächten gebrochenen Funktionen in Partial-Brüche, §. 39—46. a.

αα. solcher Funktionen, deren Nenner aus lauter ungleichen Faktoren bestehen, §. 39—41.

aaa. wenn der Nenner ein Produkt aus zwey Faktoren ist, die keinen gemeinschaftlichen Divisor haben, §. 39.

bbb. wenn

bbb. wenn der Nenner ein Produkt aus lauter einfachen ungleichen Faktoren ist, §. 40. 41.

ααα. von der Auflösung dieser Brüche in Partial-Brüche überhaupt, §. 40.

βββ. wie man zu einem gegebenen Faktor des Nenners den zugehörigen Partial-Bruch findet, §. 41.

ββ. solcher Funktionen, deren Nenner aus lauter gleichen Faktoren zusammengesetzt sind, §. 42.

γγ. solcher Funktionen, deren Nenner Produkte aus zusammengesetzten und einfachen Faktoren sind. §. 43 — 46. a.

aaa. Auflösung dieser Funktionen in Ansehung des zusammengesetzten Faktors ihres Nenners, §. 43 — 45.

ααα. wenn derselbe $(p-qz)^2$ §. 43.

βββ. wenn derselbe $(p-qz)^3$ §. 44.

γγγ. wenn derselbe $(p-qz)^n$ ist, §. 45.

bbb. Auflösung derselben in Ansehung aller Faktoren ihres Nenners. §. 46. a.

Die Untersuchungen des gegenwärtigen Capitels sind in dem neunten und zwölften Capitel eben dieses Buchs weiter fortgesetzt, und die Auflösung der Brüche von Eulern außerdem in dem letzten Capitel des zweyten Theils seiner Differential-Rechnung auf eine sehr vortheilhafte Art erleichtert und erweitert worden.

B. Ueber die Auflösbarkeit jeder ganzen rationalen Funktion in reelle, einfache entweder oder doppelte Faktoren.

Zu §. 31. 32.

1. Da Euler im neunten Capitel den Satz: Jede ganze rationale Funktion läßt sich in reelle, einfache entweder oder

doppelte, Faktoren auflösen; oder: Man kann die imaginären Faktoren jeder ganzen rationalen Funktion zu zwey und zwey auf die Art verbinden, daß ihr Produkt reell wird; als einen ausgemachten Satz anführt, selbigen aber gleichwohl weder hier noch bis zu der angeführten Stelle sonst wo in dem gegenwärtigen Werke bewiesen hat: so verdient ein Auszug aus den in der Anmerkung zum letzten der vorstehenden §§. angeführten Recherches sur les racines imaginaires des équations auch aus diesem Grunde hier einen Platz. Es beweiset nemlich Euler in diesen Recherches bis §. 63. den angeführten Satz von den Gleichungen, und was hier von den Gleichungen gilt, gilt bekannter Maaßen auch von den Funktionen, auf folgende Art.

2. Zuvörderst schickt er nach einigen anderweitigen Betrachtungen von §. 20 — 26 drey Lehrsätze voraus. Der erste ist mit dem §. 34. 35, der andere mit dem §. 36, und der dritte mit dem §. 37. des ersten Buchs der Einleitung in die Analysis des Unendlichen übereinstimmend, und die Beweise, die er dafür giebt, sind die in den Anmerkungen zu den angeführten §§. mitgetheilten. Auf diese Lehrsätze gründet er darauf von §. 27 an den Beweis der Auflösbarkeit jeder ganzen rationalen Gleichung, deren Coefficienten lauter reelle Größen sind, in reelle, einfache entweder oder doppelte, Faktoren, durch folgende Schlüsse.

3. Jede Gleichung vom vierten Grade, wie

$$x^4 + Ax^3 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

läßt sich allemal in zwey reelle doppelte Faktoren auflösen.

Setzt man $x = y - \frac{1}{4}A$, so verwandelt sich die gegebene Gleichung in eine Gleichung von eben dem Grade, worin das zweyte Glied fehlt. Angenommen also, daß das zweyte Glied bereits fehle, und daß also die Gleichung

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

in

in zwey reelle doppelte Faktoren aufzulösen sey: so fällt in die Augen, nicht nur, daß diese Faktoren folgende Form

$$(xx + ux + \alpha)(xx - ux + \beta) = 0$$

haben müssen, sondern auch, daß sie reell seyn werden, wenn u, α und β reell sind. Vergleicht man nun aber das angeführte Produkt mit der gegebenen Gleichung, so wird

$$B = \alpha + \beta - uu;\ C = (\beta - \alpha)u;\ D = \alpha\beta,$$

und hieraus fließet,

$$\alpha + \beta = B + uu;\ \beta - \alpha = \frac{C}{u};$$ so wie hieraus

$$2\beta = uu + B + \frac{C}{u};$$ und $$2\alpha = uu + B - \frac{C}{u}.$$

Ferner ist $4\alpha\beta = 4D$, und folglich

$$u^4 + 2Buu + BB - \frac{CC}{uu} = 4D$$

oder

$$u^6 + 2Bu^4 + (BB - 4D)uu - CC = 0.$$

Da nun das absolute Glied dieser Gleichung, $-CC$, nothwendiger Weise negativ ist, so hat die Gleichung zum wenigsten zwey reelle Wurzeln (Einl. B. 1. Cap. 2. §. 37.) und nimmt man eine davon für u, so werden auch α und β, und folglich auch die beyden angenommenen doppelten Faktoren $xx + ux + \alpha$ und $xx - ux + \beta$ der Gleichung $x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$ reell.

4. Verbindet man mit diesem Satze die Behauptungen des 30sten §. des ersten Buchs der Einleitung in die Analysis des Unendlichen, so erhellet, daß auch jede Gleichung von jeglichem Grade, die nicht mehr als vier einfache imaginäre Faktoren hat, in lauter reelle Faktoren aufgelöset, werden kann. Es ist demnach jede Gleichung vom fünften Grade, weil sie als ein Ausdruck, worin der Exponent der höchsten Potestät der unbekannten Größe eine ungerade

Zahl ist, nach Einl. B. 1. Cap. 2. §. 34 nothwendig einen reellen einfachen Faktor hat, in lauter reelle, einfache entweder oder doppelte Faktoren auflösbar.

5. Die Stärke des angeführten Beweises beruhet darauf, daß die unbekannte Größe u durch eine Gleichung vom 6ten Grade bestimmt wird, deren absolutes Glied nothwendiger Weise negativ ist. Daß dieses so seyn müsse, läßt sich auch ohne die Gleichung selbst aufzusuchen erkennen. Angenommen nemlich, daß die Wurzeln der Gleichung

$$x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$$

folgende seyen,

$$x = a, \; x = b, \; x = c, \; x = d;$$

so lehrt der bloße Anblick dieser Gleichung, daß

$$a + b + c + d = 0$$

seyn muß. Läßt man ferner $xx - ux + \beta$ jeden doppelten Faktor derselben bedeuten, oder setzt man $xx - ux + \beta = 0$, so ist ausgemacht, daß u die Summe jedes Paars von den Wurzeln a, b, c, und d ist. Betrachtet man also u als unbekannt, so hat dasselbe so viel Werthe, als es verschiedene Combinationen der Buchstaben a, b, c, d, zu zweyen giebt; und da die Anzahl dieser Combinationen $= \frac{4 \cdot 3}{1 \cdot 2} = 6$ ist, so hat u sechs Werthe und nicht mehr. Es wird also u durch eine Gleichung vom 6ten Grade bestimmt, deren Wurzeln folgende sind.:

$$\text{I. } u = a + b; \quad \text{II. } u = a + c; \quad \text{III. } u = a + d;$$
$$\text{IV. } u = c + d; \quad \text{V. } u = b + d; \quad \text{VI. } u = b + c.$$

Nun ist $a + b + c + d = 0$, und wenn man also die drey ersten Wurzeln

$$\text{I. } u = p; \quad \text{II. } u = q; \quad \text{III. } u = r$$

setzt, so werden die drey übrigen

$$\text{IV. } u = -p; \quad \text{V. } u = -q; \quad \text{VI. } u = -r,$$

so

so daß also auch jeder Werth von u, negativ genommen, ebenfalls ein Werth von u ist. Nachdem man auf diese Art alle sechs Wurzeln kennen gelernt hat, so ist die Gleichung, aus welcher sich alle finden lassen:

$$(u-p)(u-q)(u-r)(u+p)(u+q)(u+r)=0, \text{ oder}$$
$$(uu-pp)(uu-qq)(uu-rr)=0,$$

welches eine Gleichung vom 6ten Grade ist, worin alle ungeraden Potestäten von u fehlen, gerade so, als wir dieselbe vorhin gefunden haben. Aber außerdem ist darin auch das letzte oder beständige Glied nothwendiger Weise negativ, weil es $= -pp.-qq.-rr = -ppqqrr$ und also ein Quadrat mit dem Zeichen $-$ ist. Es hat folglich diese Gleichung nothwendig zwey reelle Wurzeln, und setzt man die eine davon für u, so erhält man dadurch den doppelten Faktor der gegebenen Gleichung reell.

6. Wollte man hiergegen einwenden, daß daß Quadrat ppqqrr, weil die Wurzeln a, b, c, d, imaginäre Größen sind, nicht nothwendiger Weise positiv sey: so läßt sich dieser Einwurf auf folgende Art widerlegen. Da

$$a+b+c+d=0$$
$$ab+ac+ad+bc+bd+cd=B$$
$$abc+abd+acd+bcd=C, \text{ und}$$
$$abcd=D$$

ist, und B, C und D reelle Größen sind: so ist auch das Produkt

$$pqr=(a+b)(a+c)(a+d)$$

da es sich aus den Größen B, C und D bestimmen läßt, reell. Es ist nemlich

$$pqr=(a+b)(a+c)(a+d)=aaa+aab+aac+aad$$
$$+abc+abd+acd+bcd=aa(a+b+c+d)$$
$$+abc+abd+acd+bcd=C.$$

7. Jede Gleichung vom 8ten Grade läßt sich allemal in zwey reelle Faktoren vom vierten Grade auflösen.

Bringt man das zweyte Glied weg, so erhält die gegebene Gleichung folgende Form:

$$x^8 + Bx^6 + Cx^5 + Dx^4 + Ex^3 + Fx^2 + Gx + H = 0,$$

und die beyden Faktoren derselben vom vierten Grade lassen sich auf folgende Art ausdrucken:

$$x^4 + ux^3 + \alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$$
$$x^4 - ux^3 + \delta x^2 + \varepsilon x + \zeta = 0.$$

Macht man nun das Produkt aus diesen beyden Faktoren der gegebenen Gleichung gleich, so bekommt man 7 Gleichungen, oder eben so viel, als man unbekannte Coefficienten $u, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$, hat. Aus diesen Gleichungen kann man nun nach und nach, und zwar, wie bekannt ist, ohne Ausziehung der Wurzeln, die Buchstaben $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \varepsilon, \zeta$ wegschaffen, so daß die Werthe derselben insgesammt durch die bekannten Größen B, C, D, E, F, G, H und die unbekannte Größe u reell ausgedruckt werden, und man kommt also endlich zu einer Gleichung, die außer u lauter bekannte Größen enthält. Hieraus muß nun u bestimmt werden, und ist sein Werth reell, so werden auch die Werthe der Buchstaben α, β, γ, 2c. und folglich auch die angenommenen Faktoren vom vierten Grade reell werden.

Es kommt also nunmehr auf die Erfindung der Gleichung an, aus welcher sich der Werth von u bestimmen läßt. Da nun u überhaupt die Summe jeglicher vier Wurzeln der gegebenen Gleichung ausdruckt, und die Anzahl dieser Wurzeln = 8 ist: so hat u so viel verschiedene Werthe, als sich acht Größen zu vier combiniren lassen, oder $\frac{8.7.6.5}{1.2.3.4} = 70$, und es wird folglich u durch eine Gleichung vom 70sten Grade bestimmt. Setzt man ferner einen

Werth

Werth von $u = p$, so ist p die Summe von vier Wurzeln der gegebenen Gleichung, und also die Summe der übrigen vier $= - u$, weil die Summe von allen $= 0$ ist. Ist daher $u - p$ ein Faktor der gedachten Gleichung vom 70sten Grade, so ist auch $u + p$ ein Faktor derselben, und also $uu - pp$ ein doppelter Faktor eben dieser Gleichung. Es wird demnach die Gleichung, aus welcher sich u bestimmen läßt, 35 Faktoren von der Form $uu - pp$ haben, oder ein Produkt aus 35 Faktoren von folgender Art seyn:

$$(uu - pp)\ (uu - qq)\ (uu - rr)\ (uu - ss) \text{ ꝛc.}$$

Ferner wird das letzte oder das absolute Glied dieser Gleichung ein Produkt aus 35 negativen Quadraten, und also selbst negativ, nemlich $- pp\,qq\,rr\,ss$ ꝛc. Es läßt sich nemlich die Wurzel dieses Quadrats, $pqrs$ ꝛc. aus den Buchstaben B, C, D, ꝛc. bestimmen, und sie ist daher reell, und folglich ihr Quadrat $ppqqrrss$ ꝛc. eine positive Größe. Da also der unbekannte Coefficient u durch eine Gleichung vom 70sten Grade bestimmt wird, deren letztes Glied nothwendiger Weise negativ ist, so hat diese Gleichung zum wenigsten zwey reelle Werthe, und einen davon für u genommen, so erhält man einen reellen Faktor vom vierten Grade für die gegebene Gleichung, und es läßt sich daher dieselbe in zwey reelle Faktoren vom vierten Grade auflösen.

8. Da jeder Faktor vom vierten Grade in zwey reelle doppelte Faktoren aufgelöset werden kann, so läßt sich nunmehr auch jede Gleichung vom achten Grade in vier reelle Faktoren vom zweyten Grade auflösen.

Ferner ist nun klar, daß jede Gleiche vom 9ten Grade in einen einfachen und in vier doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden kann.

Endlich kann auch jede Gleichung vom 6ten oder 7ten Grade in einfache oder doppelte reelle Faktoren aufgelöset werden, weil man daraus durch die Multiplication mit xx oder x eine Gleichung vom 8ten Grade machen kann.

9. Aber werden auch, wenn u reell ist, die übrigen Coefficienten α, β, γ, δ, ꝛc. insgesammt reell werden? Hiervon kann man sich auf folgende Art überzeugen. Man betrachte u als eine bekannte Größe, so daß man also eine Gleichung mehr hat, als unbekannte Größen zu bestimmen sind. Dann schaffe man von diesen Größen, so weit es ohne Extraction der Wurzel angeht, eine nach der andern weg, und wenn man dies gethan hat, so wird eine gewisse Anzahl von Gleichungen übrig bleiben, und die Anzahl der unbekannten Größen wird um 1 kleiner seyn. Angenommen, daß noch einige unbekannte Größen zu bestimmen sind, davon jede in den Gleichungen als eine Potestät vorkommt, so kann man von diesen Gleichungen immer je zwey auf eine solche Art mit einander verbinden, daß man daraus endlich eine Gleichung findet, worin die unbekannte Größe nur eine Dimension hat, und die unbekannte Größe aus dieser Gleichung also auch rational bestimmen. Auf diese Art gelangt man endlich zu zwey Gleichungen, worin die letzte unbekannte Größe enthalten ist, und da mag denn die Potestät dieser unbekannten Größe seyn, welche sie will, so kann man aus jenen Gleichungen nach bekannten Regeln der Algebra allemal eine Gleichung finden, worin die unbekannte Größe nur in der ersten Potestät vorkommt, und woraus sie sich also durch einen rationalen Ausdruck bestimmen läßt. Setzt man nun diesen Werth in die bereits gefundenen Werthe der übrigen Coefficienten, so erhält man für sie rationale Bestimmungen, und es werden folglich, wenn u reell ist, auch alle übrigen Coefficienten nothwendiger Weise reell.

10. Jede

10. Jede Gleichung vom 16ten Grade läßt sich allemal in zwey reelle doppelte Faktoren vom 8ten Grade auflösen.

Nach der Wegschaffung des zweyten Gliedes hat die gedachte Gleichung folgende Form:

$$x^{16} + Bx^{14} + Cx^{13} + Dx^{12} + \text{ꝛc.} \ldots\ldots = 0,$$

so daß die Anzahl ihrer Coefficienten B, C, D, ꝛc. $= 15$ ist, und die beyden Faktoren vom 8ten Grade, worin diese Gleichung sich auflösen läßt, sind:

$$x^8 + ux^7 + \alpha x^6 + \beta x^5 + \gamma x^4 + \delta x^3 + \varepsilon x^2 + \zeta x + \eta = 0$$
$$x^8 - ux^7 + \vartheta x^6 + \iota x^5 + \varkappa x^4 + \lambda x^3 + \mu x^2 + \nu x + \xi = 0.$$

Macht man also das Produkt aus diesen beyden Faktoren der gegebenen Gleichung gleich, so bekommt man 15 Gleichungen, aus welchen man die Buchstaben u, α, β, γ, δ, ꝛc. zu bestimmen suchen muß, und da die Anzahl dieser unbekannten Größen ebenfalls $= 15$ ist, so ist die Aufgabe bestimmt. Betrachtet man nun zuvörderst u als eine bekannte Größe, so hat man eine Gleichung mehr, als unbekannte Größen α, β, γ, δ, ꝛc. zu bestimmen sind, und man ist daher im Stande, die Werthe von diesen Größen durch die Größen u, B, C, D, E, ꝛc. anzugeben, ohne daß man dabey die Extraction der Wurzeln anzuwenden hat. Es werden demnach die Werthe von α, β, γ, δ, ꝛc. rational werden, und daher auch, wenn u einen reellen Werth hat, reelle Größen seyn. Es kommt folglich jetzt alles bloß darauf an, zu zeigen, daß man allemal im Stande sey, einen reellen Werth für u zu finden.

Um dieses zu beurtheilen betrachte man die Gleichung zwischen u und den bekannten Größen B, C, D, E, ꝛc., zu welcher man durch die Wegschaffung aller übrigen unbekannten Größen α, β, γ, δ, ꝛc. gelangt, und worin u, da es überhaupt die Summe jeder 8 Wurzeln von den 16 Wurzeln

der

der gegebenen Gleichung bedeutet, auf die Potestät steigen muß, deren Exponent $= \frac{16 \cdot 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8}$ $= 12870$ ist. Es wird also u durch eine Gleichung von dem 12870sten Grade bestimmt, und da die Summe aller 16 Wurzeln der gegebenen Gleichung $= 0$ ist, so wird, wenn man irgend eine Summe von 8 von diesen Wurzeln, d. h. $u = p$ setzt, die Summe der übrigen 8 Wurzeln $= -p$, und folglich auch $-p$ ein Werth von u seyn. Man kann daher diese Gleichung auch als ein Produkt aus $\frac{1}{2}.12870 = 6435$ Faktoren von dieser Form $uu - pp$ betrachten, oder dafür

$$(uu - pp)(uu - qq)(uu - rr)(uu - ss) \text{ ꝛc.} = 0$$

setzen, so daß die Anzahl dieser Faktoren $= 6435$ ist. Da nun dies eine ungerade Zahl ist, und das letzte oder absolute Glied der Gleichung $= -pp\,qq\,rr\,ss$ ꝛc. wird, die Wurzel daraus aber, nemlich $p\,q\,r\,s$ ꝛc. aus den Buchstaben B, C, D, E, ꝛc. auf eine solche Art bestimmt werden kann, daß es eine rationale und eben deswegen auch reelle Funktion davon ist: so ist das letzte Glied der Gleichung, wodurch u bestimmt wird, nothwendiger Weise negativ, und es hat daher u zum wenigsten zwey reelle Werthe, die denn, für u gesetzt, die beyden gesuchten reellen Faktoren vom achten Grade für die gegebene Gleichung hervorbringen.

11. Da sich also nach 7 und 8 jede Gleichung vom achten Grade in vier reelle Faktoren vom 2ten Grade auflösen läßt, so kann man nunmehr auch jede Gleichung vom 16ten Grade in ein Produkt aus 8 doppelten reellen Faktoren verwandeln, und da jede Gleichung vom 17ten Grade zum wenigsten einen reellen einfachen Faktor hat, so kann man sie außerdem auch noch in acht doppelte reelle Faktoren auf-

lösen.

lösen. Eben so ist nunmehr jede Gleichung, die zu einem niedrigern als dem 16ten Grade gehört, in reelle, einfache entweder oder doppelte, Faktoren auflösbar. Denn multiplicirt man dieselbe mit x, oder x^2 oder x^3 ꝛc., um sie dadurch zu einer Gleichung vom 16ten Grade zu machen, so kann man diese neue Gleichung in 8 doppelte reelle Faktoren auflösen, und sondert man darauf von diesen Faktoren die Faktoren x, welche man durch die Multiplication mit denselben verbunden hat, wieder ab, so erhält man die reellen Faktoren der gegeben Gleichung, die entweder einfach oder doppelt seyn werden.

12. Ueberdenkt man die bisher geführten Beweise, so sieht man bald, daß ihre Stärke darauf beruht, daß die letzte Gleichung, wodurch u bestimmt wird, eine Gleichung von einem ungeraden Exponenten und mit einem negativen Quadrate zum absoluten Gliede ist. Auch erkennt man leicht, daß dieser letzte Umstand nicht statt finden kann, wofern nicht der Exponent der Gleichung für u eine solche gerade Zahl 2n ist, daß ihre Hälfte n eine ungerade Zahl wird. Denn da das letzte Glied dieser Gleichung ein Produkt aus n negativen Quadraten ist, so würde es positiv seyn, wenn n eine gerade Zahl wäre. Aus diesem Grunde kann daher die gedachte Beweisart bey den Gleichungen vom 12ten oder 20sten Grade nicht gebraucht werden, sondern sie paßt allein auf solche Gleichungen, deren Exponent eine Potestät der 2 ist. Indeß ist es genug, um die Auflösbarkeit aller Gleichungen in reelle, einfache entweder oder doppelte, Faktoren zu beweisen, daß man dieselbe bey den Gleichungen von dem Grade 2^n außer Zweifel setzt, indem dieselbe, wenn sie auf diese Art von den Gleichungen irgend eines Grades dargethan worden ist, auch bey allen Gleichungen, die zu einem niedrigern Grade gehören, weiter keinen Zweifel leidet.

13.

13. Jede Gleichung von einem Grade, dessen Exponent eine Potestät der 2 oder 2^n ist, wenn n von 2 an irgend eine ganze Zahl bedeutet, läßt sich in zwey reelle Faktoren vom Grade 2^{n-1} auflösen.

Nach der Wegschaffung des zweyten Gliedes hat die gedachte Gleichung folgende Form:

$$x^{2^n} + Bx^{2^n-2} + Cx^{2^n-3} + Dx^{2^n-4} + \text{ꝛc.} = 0$$

und die Anzahl der Coefficienten B, C, D, E ꝛc. ist $= 2^n - 1$. Setzt man ferner die beyden gesuchten Faktoren

$$x^{2^{n-1}} - ux^{2^{n-1}-1} + \alpha x^{2^{n-1}-2} + \beta x^{2^{n-1}-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

$$x^{2^{n-1}} + ux^{2^{n-1}-1} + \lambda x^{2^{n-1}-2} + \mu x^{2^{n-1}-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

so ist auch die Anzahl der zu bestimmenden Coefficienten u, α, β, ꝛc. $= 2^n - 1$. Vergleicht man also das Produkt dieser beyden Faktoren mit der gegebenen Gleichung, so erhält man dadurch eben so viel Gleichungen, als unbekannte Größen zu bestimmen sind, und man kann daher α, β, γ, δ, ꝛc. durch die bekannten Größen B, C, D, ꝛc. und die unbekannte Größe u ohne die Extraction der Wurzeln und folglich reell finden. Um aber zuletzt u zu bestimmen, gelangt man zu einer Gleichung, deren Grad durch folgenden Exponenten angezeigt wird:

$$\frac{2^n(2^n-1)(2^n-2)(2^n-3)(2^n-4)\ldots\ldots(2^{n-1}+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \ldots 2^{n-1}}$$

wie aus den Regeln der Combination bekannt ist. Es sey dieser Exponent $= N$, so ist, wenn man die Ordnung der Faktoren des Nenners umkehrt,

$$N = \frac{2^n}{2^{n-1}} \cdot \frac{2^n-1}{2^{n-1}-1} \cdot \frac{2^n-2}{2^{n-1}-2} \cdot \frac{2^n-3}{2^{n-1}-3} \cdot \frac{2^n-4}{2^{n-1}-4} \cdot \ldots \frac{2^{n-1}+1}{1}$$

oder um die kleinsten Zahlen zu nehmen

$$N = 2 \cdot \frac{2^n-1}{2^{n-1}-1} \cdot \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-2}-1} \cdot \frac{2^n-3}{2^{n-1}-3} \cdot \frac{2^{n-2}-1}{2^{n-3}-1} \ldots \frac{2^{n-1}+1}{1},$$

Es

Es ist also ausgemacht, daß N eine ganze Zahl ist, und da sowohl der Zähler als der Nenner zu den ungeraden Zahlen gehören, so ist N eine ungerademal gerade, und also $\frac{1}{2}$ N eine ungerade Zahl. Da nun in der gegebenen Gleichung das zweyte Glied fehlt, so ist, wenn p eine Wurzel von u ist, auch $-p$ eine Wurzel von u, und also $uu-pp$ ein doppelter Faktor der Gleichung, wodurch u bestimmt wird, und solcher Faktoren hat diese Gleichung $\frac{1}{2}$ N, welches eine ungerade Zahl ist. Es ist daher auch das letzte Glied der Gleichung für u ein negatives Quadrat, woher denn u zum wenigsten zwey reelle Werthe bekommt, die, für u gesetzt, die beyden angenommenen Faktoren zu reellen Faktoren machen.

14. Es läßt sich also jede Gleichung vom 32sten Grade in zwey reelle Faktoren vom 16ten Grade, und also nach 10 auch in 16 reelle doppelte Faktoren auflösen. Ferner sind nunmehr auch alle Gleichungen die zu einem niedrigern Grade als dem 32sten gehören, in reelle, einfache entweder oder doppelte, Faktoren auflösbar. Etwas ähnliches gilt aber nun auch von den Gleichungen vom 64sten, vom 128sten, vom 256sten Grade ꝛc. so wie auch von allen den Gleichungen, die zu Graden gehören, die niedriger sind, als die genannten.

15. Auf diese Art ist also bewiesen, daß jede ganze rationale Gleichung einer veränderlichen Größe

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \text{ꝛc.} = 0$$

allemal in lauter reelle Faktoren, einfache entweder von der Form $x + p$, oder doppelte von der Form $xx + px + q$ aufgelöset werden kann, und eben diese Auflösbarkeit kommt folglich auch jeder ganzen rationalen Funktion einer veränderlichen Größe zu. Um indeß den angeführten Satz noch mehr zu bestätigen zeigt Euler vom 50sten §. an, daß jede

jede Gleichung vom 6ten und überhaupt vom $(4n + 2)$ten Grade, unabhängig von den vorhergehenden Sätzen, zum wenigsten einen reellen Faktor vom zweyten Grade, jede Gleichung vom $(8n + 4)$ten Grade eben so zum wenigsten einen reellen Faktor vom 4ten Grade jede Gleichung vom $(16n + 8)$ten Grade zum wenigsten einen reellen Faktor vom 8ten Grade hat ꝛc. Es ist aber die Beweisart, die er dabey gebraucht, der vorhergehenden ähnlich, und kann also um so eher hier weggelassen werden.

16. Nun ist folgender Satz leicht zu beweisen: Wenn eine algebraische Gleichung, sie mag zu einem Grade gehören, zu was für einem sie will, imaginäre Wurzeln hat, so ist jede dieser Wurzeln unter der Form $M + N\sqrt{-1}$ begriffen, wo M und N reelle Größen bedeuten.

So wie man, wenn man die Wurzeln einer Gleichung kennt, daraus die einfachen und doppelten reellen Faktoren zusammensetzen kann, in welche sich die Gleichung auflösen läßt: so kann man umgekehrt aus den gedachten Faktoren die Wurzeln der Gleichung finden. Ferner erhält man insbesondere die imaginären Wurzeln aus den doppelten reellen Faktoren, deren allgemeine Form $xx - 2px + q$ ist, wenn man davon diejenigen nimmt, worin pp kleiner als q ist, $xx - 2px + q = 0$ setzt, und aus dieser Gleichung x entwickelt. Es erhalten demnach, wenn man $pp - q = -rr$ setzt, alle imaginären Wurzeln jeder Gleichung folgende Form

$$x = p + r\sqrt{-1} \text{ und } x = p - r\sqrt{-1}$$

und es sind dieselben folglich auch insgesammt unter der Form $M + N\sqrt{-1}$ begriffen.

17. Wenn also eine Gleichung die imaginäre Wurzel $x = p + r\sqrt{-1}$ hat, so hat sie auch folgende: $x = p - r\sqrt{-1}$. Und da die Anzahl der imaginären Wurzeln in

in jeder Gleichung eine gerade Zahl ist, so gehört zu jeder imaginären Wurzel $x = p + r\sqrt{-1}$ eine andere $x = p - r\sqrt{-1}$, so daß die Summe von beyden, $2p$, und das Produkt beyder, $pp + rr$, reell sind. Ferner hat jede Gleichung, wovon $x - p - r\sqrt{-1}$ ein imaginärer Faktor ist, auch den imaginären Faktor $x - p + r\sqrt{-1}$, und daher auch den doppelten reellen Faktor $xx - 2px + pp + rr$.

18. Vom 64sten § an sucht Euler den bisher bewiesenen Satz noch auf eine andere Art außer Zweifel zu setzen. Er zeigt nemlich, und zwar unabhängig von dem Bisherigen, daß alle unmögliche Wurzeln jeder Gleichung unter die Form $M + N\sqrt{-1}$ gehören, und leitet daraus, nachdem er solches bewiesen hat, die Auflösbarkeit jeder ganzen rationalen Funktion in lauter reelle einfache oder doppelte Faktoren mit eben so vielem Rechte her, als er vorhin die Allgemeinheit jener Form aus der bewiesenen Auflösbarkeit der ganzen rationalen Funktionen in lauter reelle Faktoren gefolgert hatte. Er gebraucht aber dabey mehrere Sätze, die erst in den folgenden Capiteln erklärt und bewiesen werden, und es gehört daher das, was von §. 64. an folgt, nicht hieher.

C. Zusatz zu §. 39.

Jede unächte gebrochene Funktion läßt sich nach §. 38. in eine ganze und in eine ächte gebrochene Funktion auflösen, und dies ist der Grund, warum in dem gegenwärtigen §. bloß von ächten Brüchen geredet wird.

Ferner läßt sich, wenn der Zähler und Nenner einer ächten gebrochenen Funktion einen gemeinschaftlichen Divisor haben, diese Funktion nach bekannten Regeln in eine solche verwandeln, wo der Zähler und Nenner Prim-Größen zu einander sind, und man kann sich daher bey dem Beweise des im gegenwärtigen § enthaltenen Satzes auf solche Brüche einschränken, deren Zähler und Nenner durch keinen gemeinschaftlichen Divisor theilbar sind.

Dies vorausgesetzt, so läßt sich die Unmöglichkeit der hier gelehrten Auflösung einer ächten gebrochenen Funktion, wenn die Faktoren ihres Nenners keine Prim-Größen zu einander sind, auf folgende Art darthun.

Es sey der gegebene Bruch $\frac{N}{D}$ in die beyden Partial-Brüche $\frac{X}{M} + \frac{Y}{P}$ aufzulösen, wo also vorausgesetzt wird, daß $D = M \cdot P$, und N, D, M, P, X und Y ganze rationale Funktionen einer und derselben veränderlichen Größe, z. B. von z, seyen, und daß z in N weniger Dimensionen als in D, und N und D keinen gemeinschaftlichen Divisor haben. Da also

$$\frac{N}{D} = \frac{X}{M} + \frac{Y}{P}$$

seyn soll, so muß auch

$$\frac{N}{D} = \frac{PX + MY}{MP} = \frac{PX + MY}{D}$$

und also

$$N = PX + MY, \text{ und}$$

$$X = \frac{N - MY}{P}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{N - PX}{M}$$

seyn. Nun sollen aber X und Y ganze rationale Funktionen seyn, und es muß sich daher $N - MY$ durch P, und $N - PX$ durch M ohne Rest dividiren lassen, und da N und D Prim-Größen zu einander sind, so müssen auch N und P, desgleichen N und M solches seyn. Wären aber dabey nicht auch M und P Prim-Größen zu einander, sondern hätten den Divisor p mit einander gemein, so könnte man $M = pQ$, und $P = pR$ setzen, und dann müßte, weil alsdann

$$X = \frac{N - pQY}{pR}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{N - pRX}{pQ}$$

würde, wider die Voraussetzung auch N und D gemeinschaftlich durch p getheilt werden können. Es läßt sich also der Bruch $\frac{N}{D}$ unter den vorausgesetzten Bedingungen nicht anders in die Partial-Brüche $\frac{X}{M} + \frac{Y}{P}$ auflösen, als wenn M und D keinen gemeinschaftlichen Divisor haben.

3. Will man indeß diesen Satz auch für die gebrochenen Funktionen beweisen, deren Zähler und Nenner einen gemeinschaftlichen Divisor, q, aber auch weiter keinen als diesen, haben, so setze man $D = qS$ und $S = MP$, also $D = qMP$, und behalte übrigens die vorhin angenommenen Bedingungen bey. Hier hätte man also

$$\frac{N}{D} = \frac{X}{qM} + \frac{Y}{P} = \frac{PX + qMY}{D}, \text{ und folglich}$$

$$N = PX + qMY, \text{ und}$$

$$X = \frac{N - qMY}{P}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{N - PX}{qM},$$

so daß $N - qMY$ durch P, und $N - PX$ durch qM theilbar seyn müßte. Sollten nun qM und P nicht Prim-Größen zu einander, sondern beyde durch irgend eine

Größe p theilbar seyn, so würde $qM = pQ$ und $P = pR$, und also

$$X = \frac{N - pQY}{pR}, \text{ und}$$

$$Y = \frac{N - pRX}{pQ}$$

werden, und folglich N und D außer q auch noch durch p theilbar seyn, welches ebenfalls wider die angenommenen Bedingungen streitet. Es ist daher der im §. enthaltene Satz auch ohne die vorhin festgesetzte Einschränkung von allen ächten gebrochenen Funktionen wahr.

4. Was nun die Auflösung der Funktion $\frac{N}{D}$ in die Funktionen $\frac{X}{M}$ und $\frac{Y}{P}$ selbst betrifft, so muß, da $\frac{N}{D}$ eine ächte gebrochene Funktion seyn soll, z in N weniger Dimensionen als in D haben, und die Summe der Dimensionen von z in M und P muß der Anzahl der Dimensionen eben dieser z in D gleich seyn. Man kann also, wenn man die Zahl der Dimensionen von z in $D = m$, und $m = n + \mu$ annimmt,

$$N = \mathfrak{A}z^{m-1} + \mathfrak{B}z^{m-2} + \mathfrak{C}z^{m-3} + \ldots\ldots \mathfrak{Z}$$
$$M = Az^{n} + Bz^{n-1} + Cz^{n-2} + \ldots\ldots K$$
$$P = az^{\mu} + bz^{\mu-1} + cz^{\mu-2} + \ldots\ldots k$$

und außerdem, wenn man zuvörderst X finden will,

$$Y = \alpha z^{\mu-1} + \beta z^{\mu-2} + \gamma z^{\mu-3} + \delta z^{\mu-4} \ldots\ldots$$

setzen. Da nun $m = n + \mu$ ist, so fließt hieraus

$$MY = A\alpha z^{m-1} \left.\begin{array}{l} + B\alpha \\ + A\beta \end{array}\right\} z^{m-2} \left.\begin{array}{l} + C\alpha \\ + B\beta \\ + A\gamma \end{array}\right\} z^{m-3} \left.\begin{array}{l} + D\alpha \\ + C\beta \\ + B\gamma \\ + A\delta \end{array}\right\} z^{m-4} + \text{rc.}$$

und

und N — MY =

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{A}\\ -A\alpha\end{matrix}\right\} z^{m-1} + \left.\begin{matrix}\mathfrak{B}\\ -B\alpha\\ -A\beta\end{matrix}\right\} z^{m-2} + \left.\begin{matrix}\mathfrak{C}\\ -C\alpha\\ -B\beta\\ -A\gamma\end{matrix}\right\} z^{m-3} + \left.\begin{matrix}\mathfrak{D}\\ -D\alpha\\ -C\beta\\ -B\gamma\\ -A\delta\end{matrix}\right\} z^{m-4} + \text{ꝛc.}$$

Da ferner $X = \dfrac{N - MY}{P}$ eine ganze rationale Funktion seyn soll, so muß sich dieser für $N - MY$ gefundene Ausdruck durch P ohne Rest dividiren lassen, und folglich

$$X = A'z^{m-\mu-1} + B'z^{m-\mu-2} + C'z^{m-\mu-3} + D'z^{m-\mu-4} + \text{ꝛc.}$$

seyn; vorausgesetzt, daß A', B', C', D' ꝛc. gehörig bestimmt werden. Diese Bestimmung ist aber allemal möglich. Denn da $PX = N - MY$ ist, so hat man

$$A'a\,z^{m-1} + \left.\begin{matrix}B'a\\ +A'b\end{matrix}\right\} z^{m-2} + \left.\begin{matrix}C'a\\ +B'b\\ +A'c\end{matrix}\right\} z^{m-3} + \left.\begin{matrix}D'a\\ +C'b\\ +B'c\\ +A'd\end{matrix}\right\} z^{m-4} + \text{ꝛc.}$$

$$=$$

$$\left.\begin{matrix}\mathfrak{A}\\ -A\alpha\end{matrix}\right\} z^{m-1} + \left.\begin{matrix}\mathfrak{B}\\ -B\alpha\\ -A\beta\end{matrix}\right\} z^{m-2} + \left.\begin{matrix}\mathfrak{C}\\ -C\alpha\\ -B\beta\\ -A\gamma\end{matrix}\right\} z^{m-3} + \left.\begin{matrix}\mathfrak{D}\\ -D\alpha\\ -C\beta\\ -B\gamma\\ -A\delta\end{matrix}\right\} z^{m-4} + \text{ꝛc.}$$

und folglich

$$\begin{aligned} A'a &= \mathfrak{A} - A\alpha\\ B'a + A'b &= \mathfrak{B} - B\alpha - A\beta\\ C'a + B'b + A'c &= \mathfrak{C} - C\alpha - B\beta - A\gamma\\ D'a + C'b + B'c + A'd &= \mathfrak{D} - D\alpha - C\beta - B\gamma - A\delta\\ &\text{ꝛc.}\end{aligned}$$

Da ferner die Anzahl dieser aus der vorhergehenden fließenden Gleichungen $= m$ ist, und dieselben lauter einfache

Gleichungen sind, überdem darin von den unbekannten Größen A', B', C', D' ꝛc. nicht mehr als $m - \mu$, und von α, β, γ, δ ꝛc. nicht mehr als μ, also überhaupt nicht mehr als m unbekannte Größen vorkommen; so lassen sich daraus auch alle diese unbekannte Größen vollkommen entwickeln. Kennt man aber A', B', C', D' ꝛc., so kennt man auch

$$X = A'z^{m-\mu-1} + B'z^{m-\mu-2} + C'z^{m-\mu-3} + \text{ꝛc.}$$

und kennt man α, β, γ, δ ꝛc., so kennt man auch

$$Y = \alpha z^{\mu-1} + \beta z^{\mu-2} + \gamma^{\mu-3} + \text{ꝛc.}$$

und dadurch denn auch die Partial-Brüche $\frac{X}{M}$ und $\frac{Y}{P}$. Uebrigens ist der gegenwärtige Zusatz aus des Herrn Obrist-Lieutenants von Tempelhof Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen Cap. 10. §. 785. f. entlehnt.

D. Zusatz zu §. 41.

Die hier beschriebene Methode, zu einem jeden Faktor des Renners einer gegebenen gebrochenen Funktion den zugehörigen Partial-Bruch zu finden, ohne dabey die übrigen Faktoren selbst sondern nur ihr Produkt zu brauchen, rührt von Eulern selbst her. Er bemerkt dieses im ersten Theile des vierten Bandes der neuen Sammlungen der Schriften der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften vom Jahr 1780, in der Abhandlung, welche überschrieben ist: Nova methodus, fractiones quascunque rationales in fractiones simplices resolvendi. In den Zusätzen zum zwölften Capitel wird des Inhalts dieses Aufsatzes, so weit es geschehen kann, ausführlicher gedacht werden.

III.