Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

IV. Zusätze zum vierten Capitel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53541

IV.

Zusätze zum vierten Capitel.

A. Inhalt des vierten Capitels.

Das gegenwärtige Capitel, worin die Entwickelung der Funktionen durch unendliche Reihen gelehret wird, zerfällt in zwey Haupttheile. Nachdem nemlich §. 59. einige vorläufige Bemerkungen über diese Verwandlung der Funktionen vorausgeschickt worden, so wird

1. die Art und Weise erklärt, wie gebrochene Funktionen in unendliche Reihen aufgelöset werden können, §. 60 bis 70. Dabey werden
   - a. solche Brüche betrachtet, in deren Nenner das erste Glied oder die beständige Größe nicht $= 0$ ist, §. 60 — 68; und diese Untersuchung beschäftiget sich wieder
     - α. mit gebrochenen Funktionen überhaupt §. 60 — 63. wobey denn
       - aa. folgende zwey einzelne Brüche
         - $\alpha\alpha$. $\dfrac{a}{\alpha + \beta z}$, §. 60.
         - $\beta\beta$. $\dfrac{a + bz}{\alpha + \beta z + \gamma zz}$, §. 61., und dann
       - bb. der allgemeine Bruch $\dfrac{a + bz + cz^2 + dz^3 + \text{ꝛc.}}{1 - \alpha z - \beta z^2 - \gamma z^3 - \delta z^4 - \text{ꝛc.}}$

         §. 63. in unendliche Reihen verwandelt werden, nachdem zuvor §. 62. die Beschaffenheit dieser

Reihen aus den §. 60 und 61. gefundenen allgemein beschrieben worden ist.

β. mit solchen gebrochenen Funktionen, deren Nenner eine Potestät, §. 64—68., und zwar

aa. von einem Binomium, §. 64—67., oder

$\alpha\alpha$. $(1 - \alpha z)^2$, §. 64.

$\beta\beta$. $(1 - \alpha z)^3$, §. 65.

$\gamma\gamma$. $(1 - \alpha z)^4$, §. 66.

$\delta\delta$. $(1 - \alpha z)^n$, §. 67., und

bb. von einer vieltheiligen Größe ist, §. 68.

b. folgen die Brüche, in deren Nenner das beständige Glied $= 0$ ist, §. 69. Den Beschluß dieser Untersuchung macht §. 70. eine Anmerkung über die Menge der unendlichen Reihen, worin man jeden Bruch verwandeln kann, weil sich aus jedem Bruche durch die Substitution unzählige andere finden lassen.

2. Der zweyte Haupttheil dieses Capitels handelt von der Verwandlung der irrationalen Funktionen in unendliche Reihen, §. 71—76., und zwar so, daß die Verwandlung dieser Funktionen

a. §. 71. 72. allgemein beschrieben, und die Reihen mitgetheilt werden, die man

α. für $(P + Q)^{\frac{m}{n}}$, §. 71., und

β. für $(1 + Z)^m$, wenn m einen Bruch bedeutet, nach dem Binomischen Lehrsatze erhält, §. 72. Hierauf werden

b. noch insbesondere die Reihen betrachtet, die sich nach eben diesem Lehrsatze

α. aus $(1 + \alpha z)^{m-1}$, §. 73.

β. aus $(1 + \alpha z + \beta zz)^{m-1}$, §. 74.

γ. aus $(1 + \alpha z + \beta zz + \gamma z^3)^{m-1}$, §. 75., und endlich

δ.

d. aus $(1 + \alpha z + \beta z^2 + \gamma z^3 + \delta z^4 + \text{rc.})^{m-1}$ ergeben, §. 76.

B. Zusatz zu §. 59.

Es kann beym ersten Anblick auffallen, wenn hier behauptet wird, daß die Natur der gebrochenen und transcendenten Funktionen leichter erkannt werden könne, wenn man diese Funktionen in unendliche Reihen verwandele. Allein, wenn man unendliche, das heißt, ohne Ende fortlaufende Reihen untersucht, so stellt man sich, wie der Herr Hofrath Kästner, nicht nur in seinen Betrachtungen über die Art, wie allgemeine Begriffe im göttlichen Verstande sind, Göttingen 1767, sondern auch in der Vorrede zu seinen Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen bemerkt, nicht alle einzelne Glieder dieser Reihen, sondern nur das Gesetz vor, welches alle diese Glieder gemeinschaftlich beobachten. Auch ist es gar nicht nothwendig, daß jede unendliche Reihe eine unendliche Größe vorstelle, es kann vielmehr die Größe, die durch eine unendliche Reihe ausgedruckt wird, in sehr enge Grenzen eingeschlossen seyn, so wie z. B. die Reihe, $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \text{rc.}$ ohne Ende, nie $= 1$ werden kann. Diese Anmerkung hat schon Leibnitz in seiner Abhandlung: De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus in den Actis eruditorum vom Jahr 1682 gemacht.

C. Zusatz zu §. 60.

Daß, wenn

$$a = \alpha A + \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{rc.}$$
$$+ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{rc,}$$

ist, auch $a = \alpha A$, und $\alpha B + \beta A$, so wie auch die übrigen Coefficienten einer jeden Potestät von z, $= 0$ seyn müsse,

läßt

läßt sich auf folgende Art zeigen. Da z eine veränderliche Größe ist, so muß die angeführte Gleichung, wenn sie überhaupt richtig seyn soll, ebenfalls für jeden bestimmten Werth von z wahr seyn, und es ist daher alles das streng und allezeit richtig, ohne welches diese Gleichung bey einem bestimmten Werthe von z nicht bestehen kann. Nun kann dieselbe, wenn man $z = o$ setzt, nicht anders bestehen, als wenn $a = \alpha A$ ist, folglich ist $a = \alpha A$. Ferner kann, da $a = \alpha A$, und also

$$o = \begin{matrix} \alpha Bz + \alpha Cz^2 + \alpha Dz^3 + \alpha Ez^4 + \text{rc.} \\ \beta Az + \beta Bz^2 + \beta Cz^3 + \beta Dz^4 + \text{rc.} \end{matrix}$$

seyn muß, die obige Gleichung ebenfalls nicht bestehen, wofern nicht $\alpha B + \beta A = \alpha C + \beta B = \alpha D + \beta C = \alpha E + \beta D = o$ ist, rc., und es ist daher auch dieses richtig. Auf eine ähnliche Art kann man bey andern ähnlichen Fällen verfahren, oder auch die Beweisart brauchen; der sich Euler im dreyzehnten Capitel dieses ersten Buchs im 214ten §. bedient hat.

D. Zusatz zu §. 64.

1. Dieser und die folgenden §§. setzen den Binomischen Lehrsatz in seinem ganzen Umfange, oder den Satz voraus, daß

$$(a + b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} a^{n-2}b^2 +$$
$$\frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} a^{n-3}b^3 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} \cdot \frac{n-3}{4} a^{n-4}b^4 + \text{rc.}$$

sey, nicht nur, wenn n eine ganze positive, sondern auch, wenn es eine ganze negative, und auch, wenn es eine gebrochene, positive oder negative, Zahl bedeutet. Da dieser Lehrsatz in den Anfangsgründen der gemeinen Algebra gewöhnlich nur für den Fall bewiesen wird, wenn n eine

ganze

ganze positive Zahl ist, so wird die Mittheilung des Eulerischen Beweises für die übrigen Fälle in dem neunzehnten Bande der neuen Commentarien der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften vom Jahr 1774 nicht überflüssig seyn. Die Abhandlung, woraus das Folgende genommen ist, führt den Titel: Demonstratio theorematis Newtoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus, quibus exponentes non sunt numeri integri, und fängt S. 103. an.

2. Vorläufig schickt Euler darin zuvörderst einiges über die Nothwendigkeit des Beweises des Binomischen Lehrsatzes für die Fälle, wenn n keine ganze positive Zahl ist, voraus. Diese Nothwendigkeit erhellet unter andern daraus, weil es ähnliche Sätze giebt, z. B.

$$n = \frac{1 - a^n}{1 - a} + \frac{(1 - a^n)(1 - a^{n-1})}{1 - a^2} + \frac{(1 - a^n)(1 - a^{n-1})(1 - a^{n-2})}{1 - a^3} + \text{etc.}$$

welche nur in den Fällen wahr sind, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet. Ferner gedenket er des Beweises, den der Staatsrath Aepinus im achten Bande der neuen Commentarien der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften vom Jahr 1763 gegeben hat, und bemerkt darauf, daß man, um den Binomischen Lehrsatz in seinem ganzen Umfange zu beweisen, nur nöthig habe zu zeigen, daß für jeden Werth für n

$$(1 + x)^n = 1 + \frac{n}{1} x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-2}{2} x^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3} x^3 + \text{etc.}$$

sey, weil nemlich $(a + b)^n = a^n (1 + \frac{b}{a})^n$ ist, und es also nur auf die Entwickelung des Ausdrucks $(1 + \frac{b}{a})^n$ ankommt,

der

der sich, wenn man $\frac{b}{a} = x$ setzt, in $(1 + x)^n$ verwandelt. Nach diesen vorläufigen Sätzen ist der Beweis des Binomischen Lehrsatzes selbst folgender.

3. Es sey

$$[n] = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}x^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}x^3 + \text{etc.}$$

so ist, wenn n eine ganze positive Zahl bedeutet,

$$[n] = (1 + x)^n.$$

Dieses wird aus den Anfangsgründen der gemeinen Algebra vorausgesetzt, und kann daraus auch allerdings mit Recht vorausgesetzt werden. Ferner sey

$$[m] = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2}x^2 + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}x^3 + \text{etc.}$$

und also

$$[m] \cdot [n] = 1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 + Ex^5 + \text{etc.}$$

wenn die Buchstaben A, B, C, D, E, etc. gehörig bestimmt werden.

4. Um die Buchstaben A, B, C, D, etc. zu bestimmen, müßte man eigentlich die beyden durch die unbekannten Größen [m] und [n] ausgedruckten Reihen mit einander multipliciren, und das Produkt mit der Reihe $1 + Ax + Bx^2 + Cx^3 + Dx^4 +$ etc. vergleichen. Allein es ist, auch ohne daß man solches wirklich thut, nicht schwer, sich davon zu überzeugen, einmal, daß die Buchstaben A, B, C, D, etc. durch die beyden Buchstaben m und n bestimmt werden, und zweytens, daß die Art, wie solches geschiehet, sie mag auch seyn welche sie will, keinesweges von der Beschaffenheit der Buchstaben m und n abhange, und also immer dieselbe seyn werde, es mögen nun diese Buchstaben ganze oder gebrochene, positive oder negative Zah-

Zahlen bedeuten. Und dieses ist zu der gegenwärtigen Absicht hinlänglich.

5. Denn da der Binomische Lehrsatz für den Fall, wenn n eine ganze positive Zahl ist, in der gemeinen Algebra aus der Lehre von den Combinationen hinlänglich bewiesen, und also für diesen Fall als ausgemacht vorausgesetzt werden kann: so ist daher klar, daß, wenn m und n ganze positive Zahlen bedeuten,

$$[m] = 1 + \frac{m}{1}x + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2}x^2 + \frac{m}{1} \cdot \frac{m-1}{2} \cdot \frac{m-2}{3}x^3 + \text{ꝛc.} = (1+x)^m$$

und

$$[n] = 1 + \frac{n}{1}x + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2}x^2 + \frac{n}{1} \cdot \frac{n-1}{2} \cdot \frac{n-2}{3}x^3 + \text{ꝛc.} = (1+x)^n$$

und folglich

$$[m] \cdot [n] = (1+x)^{m+n} = [m+n] = [r] = 1 + \frac{r}{1}x + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2}x^2 + \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3}x^3 + \text{ꝛc.}$$

ist, wenn man $m + n = r$ setzt. Da nun hieraus

$$A = \frac{r}{1}$$

$$B = \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2}$$

$$C = \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3}$$

$$D = \frac{r}{1} \cdot \frac{r-1}{2} \cdot \frac{r-2}{3} \cdot \frac{r-3}{4}$$

ꝛc.

wird, und diese Buchstaben aus den Buchstaben m und n, was man sich hierunter auch für Zahlen gedenken mag, nach

nach Absatz 4 doch immer auf eine und dieselbe Art bestimmt werden: so erhellet nunmehr, daß für jeden Werth von m und n allemal

$$[m].[n] = [m + n]$$

ist.

6. Da also, was auch m und n für Zahlen bedeuten, allemal

$$[m].[n] = [m + n]$$

ist, so ist ferner, und zwar auch für jeden Werth von m, n, p, q ꝛc.

$$[m].[n].[p] = [m + n + p]$$
$$[m].[n].[p].[q] = [m + n + p + q]$$
ꝛc.

und, da man dabey auch $m = n = p = q$ ꝛc. annehmen kann, ebenfalls

$$[m]^2 = [2m];\ [m]^3 = [3m];\ [m]^4 = [4m];\ \text{ꝛc.}$$

und überhaupt

$$[m]^a = [am]$$

wenn a irgend eine ganze positive Zahl bedeutet.

7. Nun sey i irgend eine ganze positive Zahl, und dabey sey zugleich $am = i$, und folglich $m = \frac{i}{a}$. Hier fließt aus der letzten Formel des vorhergehenden Absatzes

$$\left[\frac{i}{a}\right]^a = [i] = (1 + x)^i$$

weil i eine ganze positive Zahl ist. Hieraus aber folgt weiter

$$\left[\frac{i}{a}\right] = (1 + x)^{\frac{i}{a}}$$

so daß also hierdurch der Binomische Lehrsatz auch für den Fall bewiesen wird, wenn n eine gebrochene Zahl ist.

8. Da

8. Da auf diese Art, wenn m nur eine positive, übrigens aber entweder eine ganze oder eine gebrochene Zahl bedeutet, allemal

$$[m] = (1 + x)^m$$

ist, so sey nunmehr $n = - m$. Alsdenn wird $m + n = 0$, und folglich

$$[0] = (1 + x)^0 = 1.$$

Setzt man aber diese Werthe in die Formel $[m] . [n] = [m + n]$, so wird

$$(1 + x)^m . [- m] = 1, \text{ und folglich}$$

$$[- m] = \frac{1}{(1 + x)^m} = (1 + x)^{-m}$$

wodurch denn der Binomische Lehrsatz auch für den Fall erwiesen ist, wenn n eine gebrochene Zahl bedeutet.

9. Wenn p und q die beyden Grenzen vorstellen, zwischen welchen die irrationale Größe $\sqrt[r]{e}$ liegt, so ist nach dem bisher Erwiesenen, wie groß oder wie klein auch der Unterschied zwischen p und q seyn mag, allemal

$$[p] = (1 + x)^p, \text{ und}$$
$$[q] = (1 + x)^q.$$

Da nun das, was von jeder der beyden Grenzen einer Irrational-Größe gilt, auch von dieser Irrational-Größe selbst behauptet werden kann, so erhellet hieraus die Wahrheit des Binomischen Lehrsatzes für den Fall, wenn n eine Irrational-Zahl ist; oder es ist nunmehr auch

$$[\sqrt[r]{e}] = (1 + x)^{\sqrt[r]{e}}$$

10. Ob aber gleich bey diesem letzten Satze $\sqrt[r]{e}$ sowohl positiv als negativ seyn kann, so ist doch bey dem Beweise desselben e als eine absolute Zahl betrachtet worden, und

man darf daher, wenn e eine positive oder negative Zahl ist, davon weiter keinen Gebrauch machen, als wenn sowohl im ersten Falle von $\sqrt[r]{+e}$ als im andern von $\sqrt[r]{-e}$ bloß die reellen Werthe genommen werden. Wenn daher r eine ungerade Zahl ist, und die unmöglichen Werthe von $\sqrt[r]{\pm e}$ ausgeschlossen worden, so ist allemal $[\sqrt[r]{\pm e}] = (1+x)^{\sqrt[r]{\pm e}}$; wenn aber r eine gerade Zahl ist, so ist bloß $[\sqrt[r]{+e}] = (1+x)^{\sqrt[r]{+e}}$ erwiesen, und der Fall, wo $\sqrt[r]{-e}$ vorkommt, ist in der obigen Formel gar nicht begriffen.

11. Vermittelst der Differential-Rechnung läßt sich die Wahrheit des Binomischen Lehrsatzes selbst für den Fall darthun, wenn n eine unmögliche Zahl ist, aber für die gegenwärtige Absicht reicht schon das im dritten bis zum achten Absatze Enthaltene hin, und so weit hat auch Euler nur den Beweis geführt. Da sich indeß der Satz im neunten und zehnten Absatze leicht mit den vorhergehenden verbinden ließ, so schien es mir nicht unzweckmäßig, auch ihn herzusetzen.

12. Nach §. 3. hat Euler den Binomischen Lehrsatz sonst mit Hülfe der Analysis des Unendlichen bewiesen, nachmals aber diesen Beweis verwerflich gefunden, weil die Analysis des Unendlichen auf den Binomischen Lehrsatz gegründet seyn soll. So wie Euler in seiner Differential-Rechnung verfährt, wo er im fünften Capitel des ersten Theils mit dem Satze anfängt: Wenn $y = x^n$ ist, so ist

$$y^1 = (x+dx)^n = x^n + nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{n-2}dx^2 + \text{ic.}$$

setzt

setzt allerdings die Analysis des Unendlichen den ganzen Binomischen Lehrsatz voraus; allein man würde sehr unrecht handeln, wenn man dieses ganz allgemein behaupten wollte. Der Hr. Hofrath Kästner z. B. beweiset in seinen Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen den Binomischen Lehrsatz bloß für ganze bejahte Exponenten, und erweitert darauf denselben in den Anfangsgründen der Analysis des Unendlichen auf andere als bejahte Exponenten auf eine solche Art, daß es wohl Niemanden einfallen wird, diesem Beweise einen Erschleichungsfehler vorzuwerfen. Da man überdem die Formel $d(x^n) = n x^{n-1} dx$, wenn n eine ganze positive Zahl ist, aus der Regel für die Erfindung des Differentials der Produkte ableiten kann, ohne dazu die Binomial-Formel im geringsten zu gebrauchen, indem man nemlich $x^n = xxxxx \ldots.$ setzt: so läßt sich diese Formel selbst für bejahte und ganze Exponenten durch Hülfe der Differential-Rechnung darthun, ohne daß dabey das mindeste erschlichen wird. Vortheilhaft aber bleibt es immer, einen so außerordentlich wichtigen Satz auf mehr als eine Art kennen gelernt zu haben, und wenn daher auch die Beweise vermittelst der Analysis des Unendlichen viel kürzer sind, so muß man doch die Elementar-Beweise deswegen nicht verachten.

13. Von der Geschichte der Binomial-Formel findet man in den angeführten Schriften des Hrn. Hofrath Kästners das merkwürdigste. Auf eine andere Art als Euler haben kürzlich der Herr Hauptmann von Massenbach in seinen Anfangsgründen der Differential- und Integral-Rechnung, Halle 1784. und Herr Professor Busse in seinen Beyträgen zur Mathematik, Leipzig 1786. dieselbe elementarisch zu beweisen gesucht. Für die negativen Exponenten habe ich in meinen Briefen über die Buchstaben-

Rechnung und Algebra, Berlin 1786, und in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra, Berlin 1788 die Richtigkeit der Binomial-Formel auf die Art erwiesen, daß ich dieselbe zuerst für den Fall wenn $n = -1$ ist, dargethan, und darauf gezeigt habe, daß sie, wenn sie für irgend einen negativen Werth für n gilt, auch für den um 1 vergrößerten negativen Werth gelte.

14. Wenn n negativ ist, so läßt sich die Binomial-Formel auf folgende Art Art ausdrucken:

$$(a + b)^{-n} = a^{-n} - na^{-n-1}b + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}a^{-n-2}b^2 - \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{-n-3}b^3 + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^{-n-4}b^4 - \text{ꝛc.}$$

und wenn b negativ ist, so wird

$$(a - b)^{-n} = a^{-n} + na^{-n-1}b + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}a^{-n-2}b^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}a^{-n-3}b^3 + \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}a^{-n-4}b^4 + \text{ꝛc.}$$

Wird $a = 1$, so verwandelt sich $(a - b)^{-n}$ in

$$(1 - b)^{-n} = 1 + nb + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}b^2 + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^3 + \text{ꝛc.}$$

und da ist denn

$$\frac{n(n+1)(n+2) \ldots\ldots (n+p-2)(n+p-1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \ \ldots \ (p-1) \cdot p}b^p$$

ein allgemeiner Ausdruck für alle Glieder. Setzt man nun n einer ganzen Zahl gleich, so erhält man hieraus für $n = 2$, $(p+1)b^p$; für $n = 3$, $\frac{(p+1)(p+2)}{1 \cdot 2}b^p$; für $n = 3$, $\frac{(p+1)(p+2)(p+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3}b^p$, ꝛc., und hieraus lassen sich die hieraus fließenden Sätze des 64 bis 66sten §. des 4ten Capitels der Eulerischen Einleitung sehr leicht herleiten.

V.