Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

VI. Zusätze zum sechsten Capitel.

VI.

Zusätze zum sechsten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von den Exponential-Größen und den Logarithmen.

1. Von den Exponential-Größen, §. 96 — 101.
   - a. Begriff der Exponential-Größe, und dabey zugleich, warum diese Größen an dem gegenwärtigen Orte untersucht werden, so wie auch, was für welche betrachtet werden sollen, §. 96.
   - b. Werthe der Exponential-Größe, a^z, §. 97 — 99.
     - α. bey Bestimmung des veränderlichen Exponenten z, §. 97.
     - β. aus dem Werthe, der a beygelegt wird, §. 98. 99.
       - aa. wenn a positiv genommen, §. 98.
       - bb. wenn $a = 0$, und wenn es einer negativen Größe gleich gesetzt wird, §. 99.
   - c. Betrachtung der Gleichung $y = a^z$ für den Fall, wenn a eine positive Zahl bedeutet, die größer als 1 ist, §. 100. 101.
     - α. allgemeine Bestimmung der Werthe, die y erhalten kann, §. 100.
     - β. über die Art, wie darin y von z abhängt, §. 101.
2. Von den Logarithmen, §. 102 — 113.
   - a. Von den Logarithmen überhaupt, §. 102 — 106.

B. Zusatz zu §. 97.

1. Es ist in der vorhergehenden Tabelle bemerkt worden, daß Euler in dem gegenwärtigen §. bloß von den Werthen rede, welche die Exponential-Größe a^z bekommt, wenn für z bestimmte Werthe gesetzt werden. Es muß also a hier ganz allgemein betrachtet, oder weder positiv noch negativ, sondern absolute genommen werden; und da frägt sich denn: Ob mit Recht behauptet werden könne, daß die Werthe $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{aa}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{a^3}$ rc. vielfach seyn, und $a^{\frac{5}{2}}$ sowohl $= - aa\sqrt{a}$ als $= + aa\sqrt{a}$ gesetzt werden müsse? Da die Beantwortung dieser Frage den Grund enthält, warum man von den mehreren Werthen der Größen $\sqrt{a}$, $\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[3]{aa}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt[4]{a^3}$ rc., $a^{\frac{5}{2}}$, $a^{\sqrt{7}}$ rc. nach Eulers Behauptung jedesmal nur die Hauptwerthe

werthe, d. h. die reellen und positiven nehmen muß, und zugleich auf die Umstände führt, unter welchen man dies zu thun hat, (denn es wird sich nachher zeigen, daß es nicht allemal geschehen darf): so ist dieselbe ohnstreitig schon dadurch wider den Vorwurf der Unnützlichkeit geschützt. es werden sich aber daraus in der Folge noch wichtigere Vortheile ziehen lassen.

2. Wenn ganz allgemein behauptet werden kann, daß man für A, was für eine Größe es auch vorstellen mag, auch allemal + A setzen könne: so ist auch Eulers Behauptung von den vielfachen Werthen der im vorhergehenden Absatze angeführten Größen ohne Einschränkung richtig; aber dann scheint es wenigstens etwas willkührliches an sich zu haben, daß man von diesen mehreren Werthen jedesmal nur die positiven und reellen nehmen soll. Dies bestimmt den Punkt, von welchem bey der gegegenwärtigen Untersuchung ausgegangen werden muß.

3. Wenn Größen positiv oder negativ genommen, und also ihren Constructionen die Zeichen + und — vorgesetzt werden, so geschiehet solches eigentlich deswegen, weil man bey ihnen außer ihren wesentlichen Eigenschaften eine zufällige Beschaffenheit unter zwey einander entgegenstehenden Bedingungen auf die Art betrachtet, daß man von diesen Bedingungen bald die eine, bald die andere statt finden läßt. Bey geraden Linien, bey den bewegenden Kräften, bey den Exponenten der Dignitäten u. d. gl. nimmt man dieses sehr bald und aufs deutlichste wahr. Hiernach weisen also die Worte positiv und negativ, und die Zeichen + und — eigentlich auf etwas hin, was man sich ohne sie nicht gedacht haben würde; und wenn man folglich das Größen absolute betrachten nennt, wenn man bloß ihre wesentlichen Eigenschaften in Erwägung zieht, und dabey die

Abwesenheit der Zeichen + und — vor ihren Constructionen (Ausdrücken durch allgemeine Zeichen) ein Kennzeichen seyn läßt, daß diese Größen absolute betrachtet werden sollen; so ist klar, daß die absoluten Größen jedesmal von den positiven unterschieden werden müssen, und daß man also eigentlich, und bey allgemeinen Betrachtungen nie berechtigt ist, A und + A als einander vollkommen gleich anzusehen, und daher beyde Bezeichnungen mit einander zu verwechseln.

4. Das kann hierwider kein Einwurf seyn, daß man, wenn zwey absolute Größen A und B zu einander addirt werden sollen, solche auf die Art neben einander zu setzen pflegt, daß man vor die zweyte das Zeichen + schreibt. Denn in dem Ausdrucke A + B, als dem Ausdrucke einer Summe der beyden absoluten Größen A und B, gehört das Zeichen + nicht eigentlich, sondern nur in so fern zu B als es mit A die summirenden Theile einer dritten Größe ausmacht, und steht also hier schon in einer uneigentlichen oder abgeleiteten Bedeutung. Die ursprüngliche oder erste Bedeutung der Zeichen sowohl als der Wörter ist nemlich allemal die, woraus sich alle übrigen Bedeutungen als Arten aus dem Geschlechte ableiten lassen, und darnach wäre es sehr unrecht, die Bedeutung der Zeichen + und —, nach welcher sie Zeichen der Addition und Subtraction sind, zu der ersten und ursprünglichen Bedeutung dieser Zeichen machen zu wollen. Da man aber bey allgemeinen Untersuchungen allemal die allgemeinsten Begriffe zum Grunde legen muß, und das Allgemeine auch in allem ihm untergeordneten Besondern anzutreffen seyn muß, so erhellet, daß man von den Zeichen + und — nichts allgemein behaupten darf, was ihnen nicht als Zeichen des Positiven und Negativen zukommt, und zugleich, daß man diese Zei-

chen

chen allgemein als Zeichen des Positiven und Negativen betrachten könne.

5. Es drucken also die Zeichen + und — allezeit bloß eine zufällige Eigenschaft der Größen aus, vor deren Construction sie stehen; und da man das Zufällige am besten erst nach dem Wesentlichen betrachtet, so bedient man sich der Zeichen + und — auch am besten so, daß man die Größen, zu deren Constructionen sie gehören, erst dann nach ihnen bestimmt, wenn man jene zuvor nach allen außer diesen Zeichen in den Constructionen vorkommenden Bezeichnungen entwickelt hat. Wäre es daher auch in manchen Fällen vollkommen gleichgültig, ob man A oder $+A$ setzte, so muß man doch aus dem angeführten Grunde nie z. B. $+\sqrt[n]{A}$ mit $\sqrt[n]{(+A)}$ und eben so wenig $+A^{\frac{m}{n}}$ mit $(+A)^{\frac{m}{n}}$ verwechseln, ob man gleich unter der angeführten Voraussetzung, wenn $A^{\frac{m}{n}} = C$ wäre, $A^{\frac{m}{n}} = +C$ setzen könnte. Ausdrücke also wie $+A^{\frac{m}{n}}$ muß man so verstehen, daß man das Zeichen + als zu $A^{\frac{m}{n}}$ und nicht als zu A gehörig betrachtet, und außerdem auch nie $+A$ für A setzen, außer wenn A als ein summirender Theil neben einem oder mehrere andere summirende Theile einer dritten Größe gesetzt werden soll.

6. Hat man also ein Recht, Ausdrücken, wie $\sqrt[n]{A}$, $A^{\frac{m}{n}}$, $A^{\sqrt[n]{m}}$ vielfache Werthe beyzulegen? Wenn man auch jedem dieser Ausdrücke an und für sich genommen das Zeichen + vorsetzen dürfte, so müßte man nach dem Vorhergehen-

gehenden doch dafür $+\sqrt[n]{A}$, $+A^{\frac{m}{n}}$, $+A^{\sqrt[n]{m}}$ und nicht $\sqrt[n]{(+A)}(+A)^{\frac{m}{n}}$, $(+A)^{\sqrt[n]{m}}$ schreiben, und da fällt denn ebenfalls nach dem vorhergehenden Absatze in die Augen, daß zwar die Werthe von $\sqrt[n]{(+A)}$, $(+A)^{\frac{m}{n}}$, $(+A)^{\sqrt[n]{m}}$, vielfach sind, nicht aber die Werthe von $+\sqrt[n]{A}$, $+A^{\frac{m}{n}}$, $+A^{\sqrt[n]{m}}$. So ist also auch $a^{\frac{5}{2}} = + a^{\frac{5}{2}}$ zwar $= + aa\sqrt{a} = aa\sqrt{a}$, nicht aber $= - aa\sqrt{a}$.

7. Wenn man die Bedeutung der Zeichen $+$ und $-$ nicht auf die Art bestimmt, als es bisher geschehen ist, und folglich auch ohne alle Einschränkung A und $+A$ als gleichgültige Bezeichnungen betrachtet, so wird es nothwendig, daß man von den mehrern Werthen der Ausdrücke $\sqrt[n]{A}$, $A^{\frac{m}{n}}$, $A^{\sqrt[n]{m}}$, wenn man dieselben in fernern Rechnungen gebrauchen will, bloß die positiven und reellen Werthe nimmt. Denn wollte man solches nicht thun, so würde nicht $A = A^{\frac{m}{m}}$ gesetzt werden können, weil sonst eine und dieselbe Größe mehrern von einander verschiedenen, und eine mögliche Größe selbst unmöglichen Größen müßte gleich seyn können. Aber auf diese Art bleibt doch wenigstens in der Folge noch manche anderweitige Schwierigkeit übrig, die sich sehr leicht wird heben lassen, wenn man die absoluten Größen allemal von den positiven unterscheidet, und nur dann A und $+A$ als gleichgültige Ausdrücke ansieht, wenn das Zeichen $+$ wegen der statt findenden be-

sondern Umstände mehr das Zeichen der Addition, als das Zeichen des Positiven ist, oder der Construction vor welcher es steht, wenn man sie allein nimmt, keine neue Bestimmung zusetzt.

C. Zusatz zu §. 98.

Wenn die Werthe von a^z betrachtet werden sollen, die bey den für a möglichen Substitutionen statt finden können, wie solches wegen des Gebrauchs, der von dem Gegenwärtigen in der Folge gemacht wird, allerdings nöthig ist, so muß man, wenn man alle Fälle nehmen, und dabey die in dem vorhergehenden Zusatze festgesetzten Unterschiede beobachten will, für a erst die absoluten Zahlen, wobey $a = o$ als ein besonderer Fall angesehen werden kann, und dann die positiven, und nun erst die negativen Zahlen nehmen. Werden für a die absoluten Zahlen gesetzt, so findet man, was der gegenwärtige §. enthält. Von den Werthen, die a^z bekommt, wenn man a positiv nimmt, sagt Euler nichts, weil er die absoluten Zahlen und die positiven nicht unterscheidet. Was von diesem Falle an dem gegenwärtigen Orte zu merken ist, läßt sich auf folgende Behauptung zurückbringen. Nimmt man a positiv, so hat a^z, wenn z eine ganze positive Zahl ist, jedesmal nur einen und zwar positiven Werth, so wie, wenn z ein positiver Bruch ist, a^z zwey und mehrere, und darunter auch unmögliche Werthe haben kann. Setzt man z einer negativen ganzen oder gebrochenen Zahl gleich, so ist leicht einzusehn, daß dann die Bestimmung der Werthe von a^z noch schwieriger wird.

D. Zusatz zu §. 99.

1. Wenn man a in a^z negativ setzt, so fällt sogleich im Anfange in die Augen, daß die Untersuchung dieser Größe

auf

auf keine brauchbare Sätze führe; da aber die Theorie der Exponential-Größen nicht bloß in der Arithmetik, sondern auch in der analytischen Geometrie und in der angewandten Mathematik gebraucht wird, so ist es zur Vermeidung aller Schwierigkeiten nicht hinreichend, daß man a positiv seyn läßt, sondern man muß dasselbe einmal absolute nehmen, und dann auch den Fall untersuchen, wo a eine Größe ist, bey welcher, außer ihren wesentlichen Eigenschaften auch eine solche zufällige Beschaffenheit betrachtet wird, als zu entgegengesetzten Größen erforderlich ist. Läßt man nun a eine absolute Zahl bedeuten, die größer als 1 ist, denn bey diesem Falle kann man hier aus den von Eulern angeführten Gründen allerdings stehen bleiben, so hat a^z für jeden möglichen Werth von z nie mehr als einen, aber allemal reellen und absoluten Werth, und dabey ist es zugleich erlaubt, für a^z, $a^{\frac{nz}{n}}$ oder $\sqrt[n]{a^z}$ zu setzen. Dies letztere darf man nicht, wenn a positiv genommen wird, weil, wenn dabey a^z einen Werth hat, der Größe $a^{\frac{nz}{n}}$ allemal n Werthe zukommen müssen, obgleich darunter mehrere imaginär sind. Hieraus erhellet schon die Nothwendigkeit der Unterscheidung zwischen a absolute und a positiv genommen, wenn die Theorie der Exponential-Größen von allen Schwierigkeiten befreyet werden soll, zumal da es, wie sich in der Folge zeigen wird, nicht hinlänglich ist, zu sagen, daß man von den mehrern Werthen von $a^{\frac{nz}{n}}$ jedesmal nur den positiven und reellen nehmen müsse. Uebrigens gilt für den Fall, wenn a eine absolute Zahl und größer als 1 ist, alles das was Euler in gegenwärtigen §. gesagt hat.

2.

2. Nimmt man a nicht absolute, und soll dabey a^z mit $a^{\frac{nz}{n}}$ verwechselt, und folglich auch $a^{\frac{n}{n}}$ für a^1 gesetzt werden können, welches allerdings, wenn man die Theorie der Exponential-Größen allenthalben ohne Schwierigkeit gebrauchen will, nothwendig ist; so muß, da n auch jede gerade Zahl bedeuten kann, a^z für jeden Werth von z zwey reelle entgegengesetzte, sonst einander gleiche, und außerdem noch jede beliebige Anzahl unmöglicher Werthe haben. Ob man in diesem Falle a positiv oder negativ annimmt, ist gleich, eigentlich aber darf man diese beyden Fälle nicht von einander unterscheiden, sondern muß sie ungetrennt lassen, und das Allgemeine zum Grunde legen. Sobald man für a eine Größe setzt, die sich nicht absolute betrachten läßt, sondern wo man zugleich auf eine zufällige Beschaffenheit unter zwey entgegenstehenden Bedingungen auf die Art sehen muß, daß man darin bald die eine bald die andere statt finden läßt, wie dies der Fall ist, wenn a eine gerade Linie bedeutet, und a^z geometrisch construirt wird: so zeigt sich die Richtigkeit dieser Behauptungen in den gedachten geometrischen Constructionen auf eine sehr deutliche und unwidersprechliche Weise.

3. Bey der Lehre von den Logarithmen, welche Euler in dem 102ten §. vorzutragen anfängt, wird sich Gelegenheit finden, die bisher über die Werthe von a in der Exponential-Größe a^z vorgebrachten Behauptungen anzuwenden. Da aber dazu manches aus dem folgenden Capitel erforderlich ist, so will ich, um das, was ich von den Logarithmen zu sagen habe, nicht zu trennen, solches überhaupt bis zu dem Zusatze zu dem folgenden Capitel verspahren, der die Ueberschrift, Von den Logarithmen, führt.

VII.