Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

VII. Zusätze zum siebenten Capitel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53541

VII.

Zusätze zum siebenten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von der Entwickelung der Exponential-Größen und der Logarithmen durch unendliche Reihen.

1. Von der Entwickelung der Exponential-Größen durch Reihen, §. 114 — 117.
   - a. Einige vorläufige Sätze, §. 114.
   - b. Entwickelung der Exponential-Größen durch unendliche Reihen, §. 115 — 117 und 125.
     - α. ohne Logarithmen, §. 115. 116.
     - β. mit Hülfe der Logarithmen, §. 117.
     - γ. mit Hülfe der natürlichen Logarithmen, §. 125.
2. Von der Entwickelung der Logarithmen durch Reihen, §. 118 — 125. und zwar
   - a. der Logarithmen überhaupt, §. 118 — 121.
   - b. der natürlichen Logarithmen, §. 122 — 123.
   - c. Vergleichung der natürlichen Logarithmen mit den gemeinen, §. 123.

B. Von den Logarithmen.

1. Man mag die Logarithmen als Exponenten oder als Verhältnißzahlen ansehen, so fällt ein großer Theil des Nutzens, den man von Logarithmischen Tabellen haben kann, weg, wofern man nicht, wenn m einen Logarithmen bedeutet, dafür auch allemal und ohne die geringste Einschränkung $\frac{nm}{n}$ setzen kann. Da also nur, wenn a eine absolute Zahl bedeutet, ohne alle weitere Bedingung $a^m = a^{\frac{nm}{n}}$ ist, hingegen, wenn a nicht absolute genommen wird, a^m bloß dann $a^{\frac{nm}{n}}$ gleich gesetzt werden kann, wenn von $a^{\frac{nm}{n}}$ allein die reellen Werthe genommen werden, und im Fall n eine gerade Zahl ist, a^m sowohl positiv als negativ seyn kann: so ist es ohnstreitig am besten, zum allgemeinen Gebrauch ein solches Logarithmisches System zu wählen, worin die Basis absolute angenommen worden ist. Thut man nemlich dieses, so kann man allemal und ohne die geringste Einschränkung nicht nur $a^r \times a^s = a^{r+s}$; $a^r : a^s = a^{r-s}$; sondern auch $(a^r)^n = a^{nr}$, und $\sqrt[n]{a^r} = a^{\frac{r}{n}}$ setzen; r und s mögen ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahlen bedeuten, und dies sind bekannter Maaßen die Sätze, worauf sich die Regeln des Gebrauchs der Logarithmen gründen. Für diesen Fall gilt denn auch alles das in möglich größter Strenge und ohne weitere Einschränkung von den Logarithmen, was Euler darüber im sechsten Capitel von §. 102. an gesagt hat, so wie dabey auch die Sätze des siebenten Capitels nur weniger Zusätze bedürfen, die gelegentlich hier hinzugefügt werden sollen.

2. Bedeutet nun a eine absolute Zahl, die größer als 1 ist, und wird dabey ω und ψ so genommen, als es Euler §. 114. gethan hat, so kann man allemal, wenn nur n groß genug gesetzt wird, auch $a^{\omega} = a^{\frac{1}{2^n}}$ setzen, und dann erhält man aus $a^{\omega} = 1 + k\omega$, da nun $\omega = \frac{1}{2^n}$ ist,

$$a^{\frac{1}{2^n}} = 1 + k \times \frac{1}{2^n}, \text{ und hieraus}$$

$$k = \frac{a^{\frac{1}{2^n}} - 1}{\frac{1}{2^n}} = \left(a^{\frac{1}{2^n}} - 1\right) \times 2^n$$

Wird hier a einer bestimmten Zahl gleich gesetzt, so findet man nach dieser Formel ebenfalls einen bestimmten Werth für k, und sie druckt daher die Art, wie k von a abhängt, und welche Euler in dem Exempel bey §. 114. in einem einzelnen Falle dargestellt hat, allgemein aus. Betrachtet man hingegen k als bekannt, so erhält man daraus zur Erfindung von a aus k die Formel

$$a = \left(1 + \frac{1}{2^n} k\right)^{2^n}$$

3. So wie Euler $\psi = k\omega$ gesetzt hat, so kann man auch $\omega = \frac{1}{k}\psi$ setzen, und dann erhält man aus $a^{\omega} = 1 + \psi$, wenn man a die Basis eines Logarithmischen Systems seyn läßt

$$\frac{1}{k}\psi = l(1 + \psi)$$

Macht man also $1 + \psi = f^{\frac{1}{2^n}}$, welches allemal möglich ist, wo-

wofern nur n groß genug genommen wird, und f eine absolute Zahl bedeutet, die größer als 1 ist: so wird $\psi = f^{\frac{1}{2^n}} - 1$, und man hat folglich

$$lf^{\frac{1}{2^n}} = \frac{1}{k}(f^{\frac{1}{2^n}} - 1), \text{ und hieraus}$$

$$lf = \frac{1}{k} 2^n (f^{\frac{1}{2^n}} - 1).$$

Ist also k bekannt, so hat man hierin eine Formel, nach welcher man den Logarithmen jeder Zahl, wenn gleich auf eine weitläuftige Art, doch allemal so genau finden kann, als man will.

4. Da 2^n, wenn n eine ganze Zahl ist, so wie man solches hier annehmen muß, allemal eine gerade Zahl wird, so würde, wenn man f in $f^{\frac{1}{2^n}}$ nicht absolute, sondern positiv nehmen wollte, $f^{\frac{1}{2^n}}$ zwey entgegengesetzte sonst einander gleiche Werthe haben, und folglich $+\sqrt[2n]{f} - 1$ und $-\sqrt[2n]{f} - 1$ nicht nur einander entgegengesetzt, sondern, absolute betrachtet, auch um zwey unterschieden seyn. Es würde demnach jede ganze positive Zahl außer einen positiven Logarithmen auch einen negativen von jenem der Größe nach unterschiedenen Logarithmen haben, und die negativen Logarithmen folglich auch dann, wenn die Basis größer als 1 wäre, nicht bloß zu den ächten Brüchen gehören. Hieraus erhellet, daß man in der Lehre von den Logarithmen das Absolute von dem Positiven sorgfältig unterscheiden müsse.

5. Da nach Absatz 2 ebensowohl a aus k als k aus a gefunden werden kann, so ist es, überhaupt genommen, willkührlich, ob man bey einem Logarithmischen System einen bestimmten Werth von a oder von k zum Grunde legen will. Thut man das letztere auf die Art, daß man k = 1 setzt, so fällt in die Augen, daß dadurch die Bestimmung der Logarithmen am allereinfachsten, und folglich auch das darauf sich gründende System im Allgemeinen unter allen das brauchbarste seyn werde. In diesem Systeme, welches man bekannter Maaßen das System der natürlichen Logarithmen nennt, ist daher

$$a = (1 + \frac{1}{2^n})^{2^n} = 2,718281828459.....$$

und diesen Werth findet man desto genauer, je größer man n annimmt. Ferner wird darin

$$lf = 2^n (f^{\frac{1}{2^n}} - 1)$$

und man findet aus den Logarithmen dieses Systems die Logarithmen jedes andern Systems, wenn man aus der Basis dieses letztern k nach Absatz 2 entwickelt, und darauf jene Logarithmen durch k dividirt, oder mit $\frac{1}{k}$ multiplicirt.

6. Es wäre indeß sehr unbequem, wenn man die Logarithmen aller Zahlen, wenigstens aller einfachen Zahlen bloß nach der so eben gefundenen Regel berechnen sollte, je es ist darnach die Erfindung der Logarithmen kleiner Zahlen schon eine beschwerliche Sache. Man kann sich hiervon, wenn man will, durch die Berechnung des Logarithmen der Zahl 5 überzeugen, welche man in des Hrn. Ober-Baurath Schulze Taschenbuche für diejenigen, so gründliche Anwendungen der Meßkunst zu machen sich vorsetzen, Berlin 1782 und 1783, und zwar im zweyten Hefte S. 47 bis

bis 52 findet, und doch ist dieser Logarithme nur bis auf 7 Decimal-Stellen gesucht worden. Man muß daher das Bisherige vorzüglich gebrauchen, um daraus kürzere Verfahrungsarten abzuleiten, und am besten ist es, für die Logarithmen kleiner, für die Logarithmen größerer, und für die Logarithmen sehr großen Zahlen besondere Regeln zu suchen.

7. Für die Erfindung der Logarithmen kleiner Zahlen ist die Regel sehr brauchbar, welche Euler §. 123 mitgetheilt hat, und wornach

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \text{rc.})$$

ist. Denn setzt man $\frac{1+x}{1-x} = n$, so wird

$$x = \frac{n-1}{n+1};$$

also allemal ein Bruch, dessen Zähler und Nenner um zwey unterschieden sind, und dessen Dignitäten daher, wenn n eine kleine Zahl ist, bald so klein werden, daß man nicht weiter nöthig hat, sie in Anschlag zu bringen, zumal, da außerdem von jedem x^n nur $\frac{2}{n}$ genommen werden dürfen.

8. Um diese Regel aus der Absatz 5 gefundenen Formel $lf = 2^n(f^{\frac{1}{2^n}} - 1)$ abzuleiten, so sey $f = 1 + x$, und $m = \frac{1}{2^n}$, so daß m einen sehr kleinen Bruch bedeute. Alsdenn ist, nach der angeführten Formel

$$l(1+x) = \frac{f^m - 1}{m} = \frac{-1 + (1+x)^m}{m} = x + \frac{m-1}{1.2}x^2 +$$
$$\frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^4 + \text{rc.}$$

Da sich aber $\frac{m-1}{1.2}$ von $-\frac{1}{2}$, $\frac{m-2}{3}$ von $-\frac{2}{3}$, $\frac{m-3}{4}$ von $-\frac{3}{4}$ desto weniger unterscheidet, je größer man n annimmt, und man hier n über alle Grenzen wachsen oder unendlich groß annehmen kann: so erhält man durch die Substitution dieser Werthe anstatt der vorhergehenden Bestimmung

$$lf = l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} + \frac{x^7}{7} - \text{etc.}$$

9. So wie man aber bey den §. 114. angenommenen Bedeutungen der Buchstaben k und ψ, $a^{\frac{1}{k}\psi} = 1 + \psi$ setzen kann, wenn a eine Zahl bedeutet, die größer als 1 ist: so kann man auch $\alpha^{\frac{1}{k}\psi} = 1 - \psi$ setzen, wenn α kleiner als 1, oder ein ächter Bruch ist, und k und ψ die erwähnte Bedeutung behalten. Läßt man also a die Basis eines Logarithmischen Systems, und $\alpha = \frac{1}{a}$ seyn, so hat man daher

$$-\frac{1}{k}\psi = l(1 - \psi)$$

und für die hyperbolischen Logarithmen, wo $k = 1$ ist,

$$-\psi = l(1 - \psi)$$

Ist nun g ein ächter Bruch, so kann man allemal

$$g^{\frac{1}{2^n}} = 1 - \psi$$

setzen, und daraus wird denn

$$-\psi = g^{\frac{1}{2^n}} - 1$$

Hier-

Hierdurch aber verwandelt sich die Formel $-\psi = l(1-\psi)$ in

$$l g^{\frac{1}{2^n}} = g^{\frac{1}{2^n}} - 1$$

und es wird daher

$$l g = 2^n\left(g^{\frac{1}{2^n}} - 1\right)$$

so daß die Absatz 8 gefundene Formel auch für die Erfindung der Logarithmen der ächten Brüche gilt.

10. Dies vorausgesetzt, so sey $g = 1 - x$, und also x ein ächter Bruch. Dann ist, wenn m die Absatz 8 angenommene Bedeutung behält,

$$l g = \frac{g^m - 1}{m} = \frac{-1 + (1-x)^m}{m} = -x + \frac{m-1}{1.2}x^2 - \frac{(m-1)(m-2)}{1.2.3}x^3 + \frac{(m-1)(m-2)(m-3)}{1.2.3.4}x^4 - \text{etc.}$$

oder, da man auch hier $\frac{m-1}{1.2} = -\frac{1}{2}$; $\frac{(m-2)}{3} = -\frac{2}{3}$ etc. setzen kann

$$l g = l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} - \text{etc.}$$

Nimmt man nun diese Formel mit der Absatz 8 gefundenen zusammen, so erhält man daher

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} + \frac{x^{11}}{11} + \text{etc.}\right)$$

11. Da x bey den geführten Beweisen als ein ächter Bruch betrachtet worden ist, so muß man die gefundenen Sätze auch nicht weiter als auf die Fälle ausdehnen, wo x

eine solche Bedeutung bekommt; und wenn dieselben bey Vernachläßigung dieser Regel auf paradoxe Folgen führen, so ist die Schuld nicht ihnen, sondern der unrechten Anwendung, die man davon macht, zuzuschreiben. Setzt man z. B. $\frac{1+x}{1-x} = -2$, so wird $1+x = -2+2x$, und folglich $x = 3$. Hiernach hätte man

$$l\frac{1+x}{1-x} = l-2 = 2(3 + \frac{27}{3} + \frac{243}{5} + \frac{2187}{7} + \text{2c.})$$

und doch wird behauptet, daß der Logarithme jeder negativen Zahl unmöglich sey. Ferner erhielte man, wenn man in der Formel

$$l(1-x) = -(x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + \text{2c.})$$

$x = 2$ setzte,

$$l(1-x) = l-1 = -2 - \frac{4}{2} - \frac{8}{3} - \frac{16}{4} - \frac{32}{5} - \text{2c.}$$

und setzte man darin $x = 3$, so würde

$$l(1-x) = l-2 = -(3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{3} + \frac{81}{4} + \frac{243}{5} + \text{2c.})$$

Aber was für Folgerungen würde die Vergleichung dieses und des vorhergehenden Logarithmen von -2 an die Hand geben?

12. Uebriges läßt sich bey den Absatz 8 und 10 geführten Beweisen daher nicht der geringste Grund zum Einwurfe wider die Strenge dieser Beweise nehmen, daß darin $\frac{m-1}{2} = -\frac{1}{2}$, $\frac{m-2}{3} = -\frac{2}{3}$ 2c. gesetzt worden. Denn es wird ja $\frac{m-(p-1)}{p}$ um so mehr $= -\frac{p-1}{p}$ je größer p wird, und bey den Absatz 8 angenommenen

nen Bedeutungen von m und n kann man ja schon $\frac{m-(p-1)}{p} = -\frac{p-1}{p}$ setzen, wenn $p = 1$ ist, und kleiner wird es nie angenommen. Etwas mehr hätte der Einwurf auf sich, wenn man wider die Eulerische Behauptung §. 116., daß man, wenn i eine unendliche Zahl bedeutet, $\frac{i-1}{i} = 1$; $\frac{i-2}{i} = 1$; $\frac{i-3}{i} = 1$; rc. setzen könne, einwenden wollte, daß dies wenigstens nicht statt finde, wenn die bey i in dem Zähler dieser Brüche mit dem Zeichen — stehende Zahl selbst unendlich groß werde. Allein so lange diese Zahl eine bestimmte Größe behält, ist denn doch immer $\frac{i-p}{i} = 1$; und dies zugegeben, so ist wenigstens $a^z = 1 + \frac{kz}{1} + \frac{k^2z^2}{1.2} + \frac{k^3z^3}{1.2.3} + \frac{k^4z^4}{1.2.3.4} +$ rc., man mag diese Reihe fortsetzen, so weit man will, wofern nur die Anzahl der Glieder eine Zahl bleibt, die sich angeben läßt; und dies ist genug, um sowohl diese Reihe, als die darauf gebaueten brauchbar zu machen.

13. Für die Findung der Logarithmen größerer Zahlen lassen sich aus den für $l(1+x)$ und $l(1-x)$ Absatz 8 und 10 gefundenen Formeln mit leichter Mühe eben so bequeme Ausdrücke finden. Denn setzt man $x = \frac{y}{a}$, so erhält man daraus

$$l(1+\frac{y}{a}) = +\frac{y}{a} - \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} - \frac{y^4}{4a^4} + \frac{y^5}{5a^5} - \text{rc.}$$

und

$$l(1-\frac{y}{a}) = -(\frac{y}{a} + \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} + \frac{y^4}{4a^4} + \frac{y^5}{5a^5} + \text{rc.})$$

Hieraus aber fließt

$$l(1+\frac{y}{a})-l(1-\frac{y}{a})=l\frac{1+\frac{y}{a}}{1-\frac{y}{a}}=l\frac{a+y}{a-y}=$$

$$l(a+y)-l(a-y)=2(\frac{y}{a}+\frac{y^3}{3a^3}+\frac{y^5}{5a^5}+\frac{y^7}{7a^7}+ \text{ꝛc.})$$

oder

$$l(a+y)=l(a-y)+2(\frac{y}{a}+\frac{y^3}{3a^3}+\frac{y^5}{5a^5}+\frac{y^7}{7a^7}+ \text{ꝛc.})$$

und wenn man $y = 1$ setzt

$$l(a+1)=l(a-1)+2(\frac{1}{a}+\frac{1}{3a^3}+\frac{1}{5a^5}+\frac{1}{7a^7}+ \text{ꝛc.})$$

So lange man y nicht größer als a annimmt, fließen diese Sätze aus den angeführten in größter Strenge, größer als a muß aber auch y nie angenommen werden, wenn dieselben zu der Absicht, zu welcher sie erfunden worden, brauchbar seyn sollen.

14. Ferner fließt aus $l(1+\frac{y}{a})=l\frac{a+y}{a}=l(a+y)-la$

$$=\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}-\frac{y^4}{4a^4}+ \text{ꝛc.}$$

$$l(a+y)=la+\frac{y}{a}-\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}-\frac{y^4}{4a^4}+ \text{ꝛc.}$$

und aus der für $l(1-\frac{y}{a})=l\frac{a-y}{a}=l(a-y)-la$ gefundenen Bestimmung

$$l(a-y)=la-(\frac{y}{a}+\frac{y^2}{2a^2}+\frac{y^3}{3a^3}+\frac{y^4}{4a^4}+ \text{ꝛc.})$$

Diese Formeln sind sehr bequem, um darnach die Logarithmen sehr großer Zahlen zu finden. Denn so groß eine Zahl auch immer seyn mag, so läßt sie sich doch allemal in zwey Theile $a \pm y$ theilen, so daß a viel größer als y, und der

Logarithme von a bekannt ist. So ist 369423597639425 $= 369400000000000 + 23597639425$, und wenn man jenen Theil a und diesen y nennt, so ist der Logarithme von a aus den Logarithmischen Tafeln bekannt, und um den Logarithmen der ganzen Zahl zu finden, darf man von der für $l(a + y)$ gefundenen Reihe nur einige wenige Glieder entwickeln. Sollte man den Logarithmen von 3694992345682 finden, so wäre es am besten $3694992345682 = 3695000000000 - 7654318$ zu setzen, $3695000000000 = a$, und $y = 7654318$ zu nehmen, und dann nach der Formel $l(a - y) = la - (\frac{y}{a} + \frac{y^2}{2a^2} + \frac{y^3}{3a^3} + \text{rc.})$ zu rechnen.

15. Aus $lf = \frac{f^m - 1}{m}$ Absatz 8 folgt $mlf = f^m - 1$, und wenn man $mlf = M$ setzt, so wird $1 + M = f^m$, oder

$$(1 + M)^{\frac{1}{m}} = f.$$

Man setze $\frac{1}{m} = p$, so wird

$$f = (1 + M)^p = 1 + \frac{p}{1} M + \frac{p(p-1)}{1 \cdot 2} M^2 + \frac{p(p-1)(p-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} M^3 + \text{rc.}$$

und hieraus wegen der Bedeutung von $\frac{1}{m} = p$

$$f = 1 + pM + \frac{p^2M^2}{1.2} + \frac{p^3M^3}{1.2.3} + \frac{p^4M^4}{1.2.3.4} + \text{rc.}$$

oder, da $pM = \frac{M}{m} = lf$

$$f = 1 + lf + \frac{(lf)^2}{1 \cdot 2} + \frac{(lf)^3}{1.2.3} + \frac{(lf)^4}{1.2.3.4} + \text{rc.}$$

Hiernach kann man, wenn ein Logarithme bekannt ist, aus demselben die zu ihm gehörige Zahl finden.

16.

16. Uebrigens betreffen die bisher gefundenen Sätze bloß die natürlichen oder hyperbolischen Logarithmen. Will man sie auch bey den gemeinen Logarithmen brauchen, so darf man nur, wenn Logarithmen gefunden werden sollen, die gefundenen hyperbolischen Logarithmen nach §. 124. der Eulerischen Einleitung in gemeine verwandeln, und wenn die zu einem gemeinen Logarithmen gehörige Zahl gefunden werden soll, den gegebenen Logarithmen zuvor auf die entgegenstehende Art in einen hyperbolischen verwandeln. In des Hrn. Ober-Baurath Schulze bereits angeführten Taschenbuche im zweyten Hefte, welches ich hiebey gebraucht habe, findet man die mitgetheilten Regeln weitläuftig durch Exempel erläutert. Soviel von den Logarithmen, wenn die Basis derselben absolute und größer als 1 angenommen wird.

17. Wenn man die Basis nicht absolute betrachtet, so muß man bey der Untersuchung der Beschaffenheit der alsdann sich ergebenden Logarithmen das nicht aus der Acht lassen, daß kein Logarithmisches System zum Calcul brauchbar ist, wofern man nicht ohne alle weitere Einschränkung $a^{\frac{nz}{n}} = a^z$ setzen kann. Geht man hiervon aus, so muß man, wenn $+a$ die Basis seyn soll, dafür auch $(+a)^{\frac{n}{n}}$ setzen können, und läßt man nun n eine gerade Zahl bedeuten, so ist nicht nur $1 = l + a$, sondern auch $= l - a$, und außerdem auch noch der Logarithme von $n - 2$ unmöglichen Größen. Nähme man $-a$ zur Basis an, so müßte $-a = (-a)^{\frac{n}{n}}$ gesetzt werden können, aber auch dann würde 1, wenn man n abermals eine gerade Zahl bedeuten ließe, nicht nur der Logarithme von $-a$, sondern auch der Lo-

Logarithme von $+a$, und außerdem noch von $n-2$ unmöglichen Größen. Aus diesem Grunde habe ich S. 479. Absatz 2 gesagt, daß es, wenn man die Basis nicht absolute nehmen will, gleich sey, ob man dieselbe positiv oder negativ annehme, und daß man hier diese beyden Fälle eigentlich gar nicht trennen sollte. Nun sey $f = a^z$, so ist $\pm f = \pm a^z = (+a)^{\frac{2nz}{2n}}$ und folglich, da f jede Zahl bedeuten kann, $z = \frac{2nz}{2n} = l(\pm f)$ und außerdem zugleich der Logarithme von mehrern unmöglichen Größen. Wenn man daher die Basis nicht absolute annimmt, sondern dabey auf eine zufällige Beschaffenheit auf eine solche Art sieht, als zu entgegengesetzten Größen erforderlich ist: so gehört jeder Logarithme zu zwey einander entgegengesetzten sonst gleichen, und außerdem noch zu einer Menge unmöglicher Größen.

18. Da auf diese Art jeder Logarithme zu unendlich vielen Zahlen gehört, so frägt sich, ob umgekehrt auch jede Zahl, wenn sie nicht absolute betrachtet wird, unendlich viele Logarithmen habe? Euler behauptet dieses im fünften Bande der Memoires der Akademie der Wissenschaften zu Berlin vom Jahr 1749, in der Abhandlung, de la controverse entre Mrs. Leibnitz & Bernoulli sur les logarithmes des nombres négatifs & imaginaires. Ich will den zu dieser Absicht S. 156. 157 stehenden Lehrsatz mit seinem Beweise von Wort zu Wort hersetzen.

Lehrsatz.

Jeder gegebenen Zahl kommen unendlich viele Logarithmen zu; oder: Wenn y den Logarithmen der Zahl x bezeichnet, so hat y unendlich viel Werthe.

Be-

Beweis.

Ich will mich hier bloß auf die hyperbolischen Logarithmen einschränken, weil bekannter Maaßen die Logarithmen jedes andern Systems zu diesen ein beständiges Verhältniß haben, und z. B. wenn der hyperbolische Logarithme der Zahl $x = y$ gesetzt wird, der gemeine Logarithme eben dieser Zahl $= 0,4342944819 . y$ ist. Nun beruhen die hyperbolischen Logarithmen auf dem Satze, daß der Logarithme von $1 + \omega$, wenn ω eine unendlich kleine Zahl ist, $= \omega$, oder $l(1 + \omega) = \omega$ sey. Hieraus fließt $l(1 + \omega)^2 = 2\omega$, $l(1 + \omega)^3 = 3\omega$; und überhaupt $l(1 + \omega)^n = n\omega$. Da aber ω eine unendlich kleine Zahl bedeutet, so kann die Zahl $(1 + \omega)^n$ nicht anders jeder gegebenen Zahl x gleich gesetzt werden, als wenn n unendlich genommen wird. Es sey daher n eine unendlich große Zahl, und $x = (1 + \omega)^n$, folglich $lx = y = n\omega$. Um nun y durch x auszudrucken, so giebt die erste Formel $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$, und $\omega = x^{\frac{1}{n}} - 1$, und durch die Substitution dieses Werthes erhält man aus der zweyten Formel

$$y = nx^{\frac{1}{n}} - n = lx.$$

Hieraus erhellet, daß sich der Werth der Formel $nx^{\frac{1}{n}} - n$ dem Logarithmen von x um so mehr nähert, je größer man n annimmt, und daß diese Formel den wahren Werth des Logarithmen von x ausdruckt, wenn man n unendlich groß werden läßt. So wie nun ausgemacht ist, daß $x^{\frac{1}{2}}$ zwey, $x^{\frac{1}{3}}$ drey, $x^{\frac{1}{4}}$ vier verschiedene Werthe hat, rc., so leidet es es auch keinen Zweifel, daß der Ausdruck $x^{\frac{1}{n}}$ unendlich viele Werthe in sich schließt. Es muß folglich diese unendliche Menge der Werthe von $x^{\frac{1}{n}}$ auch eine unendliche Menge von Werthen für lx geben, und also jede gegebene Zahl x unendlich viel Logarithmen haben.

19. Beym ersten Anblick scheint hiernach die obige Frage allerdings bejahet werden zu müssen. Allein wenn $(1 + \omega)^n = x$ soll gesetzt werden können, so muß man, da nicht nur $l(1 + \omega) = \omega$, sondern auch $(1 + \omega)^n = x$ seyn soll, (und beydes muß statt finden, wenn der geführte Beweis nicht fehlerhaft seyn soll,) entweder ω bloß positiv nehmen, und dann wird $x = (1 + \omega)^n$ allemal eine positive Zahl, die größer als 1 ist, oder, wenn man auch $l(1 - \omega) = -\omega$ setzen will, $(1 - \omega)^n$ nicht einer Zahl, die größer als 1 ist, sondern nur einem Bruche gleich annehmen, der desto kleiner wird, je größer n ist. Es gelten also die von Eulern gemachte Schlüsse nur in so fern allgemein, als ω positiv bleibt, und x eine Zahl bedeutet, die größer als 1 und also ebenfalls positiv ist. Dies nun vorausgesetzt, so ist auch nur in dem Falle $1 + \omega = x^{\frac{1}{n}}$, und $\omega = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$, wenn von den unendlich vielen Werthen, die $x^{\frac{1}{n}}$ haben würde, wenn man es wie $(+ x)^{\frac{1}{n}}$ betrachtete, bloß der positive Werth genommen wird; und es hat demnach, wenn man auch sonst $x^{\frac{1}{n}}$ und $n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ als eine unendlich vielförmige Funk-

Funktion von x betrachten kann, doch hier sowohl $x^{\frac{1}{n}}$ als $n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ nicht mehr als einen Werth, und eben das gilt denn natürlicher Weise von $y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1) = lx$, so daß also keine positive Zahl mehr als einen Logarithmen hat.

20. Um dies noch mehr zu bestätigen, so sey $l(1-\omega) = -\omega$, folglich $l(1-\omega)^2 = -2\omega$; $l(1-\omega)^3 = -3\omega$; und überhaupt $l(1-\omega)^n = -n\omega$. Ferner sey $(1-\omega)^n = z$, und also $1 - \omega = z^{\frac{1}{n}}$, wo aber offenbar wieder von $z^{\frac{1}{n}}$ bloß der absolute oder positive Werth genommen werden darf. Alsdann ist $\omega = z^{\frac{1}{n}} - 1$ und $l(1-\omega)^n = lz = n(z^{\frac{1}{n}} - 1)$. Da nun aber $1 - \omega$ ein ächter, obgleich von der Einheit nur um einen unendlich kleinen Theil unterschiedenen Bruch ist, so muß auch $(1-\omega)^n = z$ ein ächter, und zwar um so kleinerer Bruch seyn, je größer n angenommen wird. Man findet also auf diesem Wege nichts weiter, als daß die Logarithmen der ächten Brüche negativ sind, weil $z^{\frac{1}{n}} - 1$ negativ ist, und desto größer werden, je kleiner die Brüche sind, zu welchen sie gehören. Aber daß zu jeder Zahl eine unendliche Menge von Logarithmen gehören solle, davon entdeckt sich hier auch nicht die geringste Spur.

21. Da also, wenn $l(1 + \omega) = \omega$ soll gesetzt werden können, ω nichts weiter als eine unendlich kleine positive oder negative reelle Größe bedeuten kann, so muß man, wenn jede Zahl mehr als einen Logarithmen hat, dieselben auf andern Wegen aufzufinden suchen. Allein man nehme an, daß eine Zahl x außer dem bekannten Logarithmen, der m heißen mag, noch den negativen Logarithmen $-e$ habe. Nennt man die Basis a, so müßte dann, weil $lx = m$ ist, $x = a^m$, und weil außerdem auch $lx = -e$ ist, zugleich $x = a^{-e}$ seyn; oder man müßte annehmen wollen, daß eine Zahl durch ihren Logarithmen und die Basis des Systems, zu welchem dieser Logarithme gehört, noch nicht völlig bestimmt würde. Auf eine ähnliche Art würde x, wenn es außer dem Logarithmen m noch den unmöglichen Logarithmen $e\sqrt{-1}$ hätte, nicht bloß $= a^m$, sondern auch $= a^{e\sqrt{-1}}$ seyn, und es scheint demnach das sicherste zu seyn, daß man jeder positiven oder absoluten Zahl nicht mehr als einen Logarthmen beylege.

22. Eben das ergiebt sich mit ziemlicher Gewißheit aus dem bloßen Begriffe der Logarithmen. Die Logarithmen sind nemlich entweder Exponenten, die anzeigen, was für eine Dignität eine Zahl x von einer gegebenen beständigen Zahl a sey, oder Verhältnißzahlen, welche zu erkennen geben, wie eine Zahl x aus einer gegebenen beständigen Zahl a entstehe, im Grunde aber laufen beyde Vorstellungen auf eines hinaus. Nun sey $x = a^m$, so daß m irgend eine ganze oder gebrochene, positive oder negative Zahl bedeute. Annehmen, daß eine und dieselbe Zahl x unendlich viele Logarithmen habe, heißt daher behaupten, daß eine und dieselbe Zahl $x = a^m$ auch gefunden werden könne, wenn

man dieselbe aus a nach der Formel a^{-e} oder $a^{e\sqrt{-1}}$ sucht, und wer kann das behaupten?

23. Aber es hat ja Euler in der Absatz 18 angeführten Abhandlung die unendlich vielen Logarithmen, die eine jede positive Zahl hat, S. 158 — 161 in einer ohne Ende fortlaufenden Reihe einzeln dargelegt? Die Quelle, woraus er sie abgeleitet hat, ist der aus $y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ hergeleitete Satz, $y = l1 = n(1^{\frac{1}{n}} - 1)$, verbunden mit dem, $lA = l1 + lA$. Nun kann man zwar in $y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ nur unter der Bedingung $x = 1$ setzen, daß, so wie in $y = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ der Ausdruck $x^{\frac{1}{n}}$ nicht mehr als einen Werth haben kann, so auch $1^{\frac{1}{n}}$ in $n(1^{\frac{1}{n}} - 1)$ nicht mehr als den Werth 1 habe. Allein da Euler das Folgende eigentlich aus dem aus $y = l1 = n(1^{\frac{1}{n}} - 1)$ fließenden Satze $(1 + \frac{y}{n})^n = 1$ herleitet, so darf man sich bey der Beurtheilung seiner Resultate nicht darauf berufen, sondern muß sich lediglich an den Satz $(1 + \frac{y}{n})^n = 1$ halten. Dieser Satz kann nun durchaus nicht bestehen, wofern nicht $y = 0$ gesetzt wird. Denn man nehme y außerdem an, wie man will, so wird

$$(1 + \frac{y}{n})^n = 1 + n \cdot \frac{y}{n} + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} \cdot \frac{y^2}{n^2} +$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{y^3}{n^3} + \text{2c.} =$$

$$1 + y + \frac{y^2}{1 \cdot 2} + \frac{y^3}{1.2.3} + \frac{y^4}{1.2.3\,4} + \text{2c.}$$

nie $= 1$, und am allerwenigsten, wenn y einer unmöglichen Größe gleich gesetzt wird. Wenn man daher gleich ferner nach ganz richtigen Regeln $y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ findet; so ist doch in dieser Formel λ noch nicht weiter bestimmt, als daß man dafür, überhaupt genommen, alle Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 2c. setzen könne, und man muß also noch erst anderweitig woher bestimmen, wie viel von diesen Werthen λ wirklich bekommen müsse. Nun kann nur $y = \pm 2\lambda\pi\sqrt{-1}$ seyn, wenn dabey $(1 + \frac{y}{n})^n =$

$(1 \pm \frac{2\lambda\pi\sqrt{-1}}{n})^n = 1$ wird; und da dies bloß statt findet, wenn $\lambda = 0$ ist, so findet man durch das Eulerische Verfahren eigentlich nichts weiter, als was sonst schon allgemein bekannt ist, daß $l\,1 = 0$ ist.

24. Da ich hier allgemein angenommenen Sätzen widersprechen muß, so wird es mir sehr angenehm seyn, wenn man alles das, was ich über die Logarithmen, deren Basis nicht absolute angenommen worden ist, gesagt habe, bloß als einen Versuch ansehen will, die, bisher denn doch noch nicht von allen Schwierigkeiten befreyte, Theorie von den Logarithmen durch einige genauere Unterscheidungen wenigstens von einigen dieser Schwierigkeiten zu befreyen. Die Vortheile, die daher entspringen können, brauche ich hier nicht aufzuzählen. Sind die Behauptungen, die ich vorgebracht habe, wahr, so wird sich ihr Nutzen in der

Folge von selbst finden; und habe ich mich geirret, so ist mein Name von zu geringer Bedeutung, als daß ich durch aufrichtige Vorlegung meiner Irrthümer irgend jemand zu verführen befürchten sollte. Ich will also noch eins und das andere, was mir nicht unwichtig scheint, hinzufügen.

25. Euler betrachtet die Formel $y = lx = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ als eine allgemein gültige Formel, selbst, wenn x negative genommen wird, und leitet daraus in der schon öfters angeführten Abhandlung S. 161. 162. den Satz her, daß die Logarithmen jeder negativen Zahl lauter imaginäre Größen sind. Nun soll sich doch nach dem, was Absatz 18 aus dieser Abhandlung mitgetheilt worden ist, der Werth der Formel $n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ dem Logarithmen von x um so mehr nähern, je größer man n annimmt, und diese Formel den wahren Werth von x genau ausdrücken, wenn man n unendlich groß werden läßt. Man setze also für x irgend eine negative Zahl, und für n nach und nach immer größere positive aber ungerade Zahlen. Alsdann findet man für $x^{\frac{1}{n}}$ außer den unmöglichen Werthen auch allemal einen reellen negativen Werth, und es sollte folglich hiernach jede negative Zahl außer den imaginären auch einen reellen und zwar negativen Logarithmen haben, der, mit dem Logarithmen der gleich großen positiven Zahl verglichen, größer seyn würde. Ferner setze man für n nach und nach immer größere positive aber gerade Zahlen, und lasse x positiv seyn. Alsdann hat $x^{\frac{1}{n}}$ zwey einander entgegengesetzte sonst gleiche

Werthe,

Werthe, und es müßte demnach $y = lx = n(x^{\frac{1}{n}} - 1)$ einen doppelten, sowohl den Zeichen als der Größe nach verschiedenen, Werth haben. Die Folgen, die sich hieraus ziehen lassen, habe ich nicht nöthig herzusetzen.

26. Angenommen nun, daß zu jeder positiven Zahl nicht mehr als ein Logarithme gehöre, denn weiter reichen die in dem Vorhergehenden geführten Beweise nicht: so läßt sich solches auch leicht von den negativen und unmöglichen Zahlen darthun. Ist nemlich $\pm a$ die Basis eines Logarithmischen Systems, so ist jede negative und einfach unmögliche Zahl mit in dem Ausdrucke $(\pm a)^{\frac{m}{n}}$ enthalten, und folglich ihr Logarithme $\frac{m}{n}$. Sollte nun diese negative oder unmögliche Zahl auch noch einen andern Logarithmen $\frac{p}{q}$, der von $\frac{m}{n}$ wirklich verschiedene wäre, haben, so müßten $(\pm a)^{\frac{m}{n}} = (\pm a)^{\frac{p}{q}}$ einen Werth mit einander gemein haben, und wenn man diesen Werth $= r$ setzte, so müßte ferner, da man für die Brüche $\frac{m}{n}$ und $\frac{p}{q}$ zwey andere von gleichen Zählern und ungleichen Nennern z. B. $\frac{s}{t}$ und $\frac{s}{v}$ nehmen könnte, $r^{\frac{s}{t}} = r^{\frac{s}{v}}$ werden können, welches unmöglich ist.

27. Wenn man also die Basis eines Logarithmischen Systems, und folglich auch alle Zahlen absolute

nimmt, so kann man ohne alle Einschränkung behaupten, daß zu jeder Zahl nicht mehr als ein Logarithme, und zu jedem Logarithmen nicht mehr als eine Zahl gehöre, und dann auch allemal mit vollem Rechte $a^m = a^{\frac{nm}{n}}$ setzen. In diesem Falle haben also nicht nur gleiche Größen gleiche Logarithmen, sondern es gehören auch allemal zu gleichen Logarithmen gleiche Größen, und für diesen Fall ist daher auch die Lehre von den Logarithmen von allen Schwierigkeiten frey. Nimmt man die Basis nicht absolute, so finden allerdings bey dem Gebrauche der Logarithmen mancherley Schwierigkeiten statt, wofern man nicht alle bey der Rechnung sich ergebende der Basis entgegenstehende und unmögliche Werthe ausschließt, und zugleich die Basis bloß positiv annimmt; sobald man indeß dies thut, so hat auch hier jede positive Zahl nicht mehr als einen Logarithmen, und jeder Logarithme nicht mehr als eine positive Zahl, zu welcher er gehört, und man kann alsdann ebenfalls mit vollkommener Sicherheit von der Gleichheit zweyer Größen auf die Gleichheit ihrer Logarithmen, und von der Gleichheit zweyer Logarithmen auf die Gleichheit der zu ihnen gehörenden Größen schließen, und so auch jedesmal $a^{\frac{nm}{n}}$ für a^m setzen. Da sich nun unter dieser Einschränkung die positiven Zahlen von den absoluten, die mit ihnen einerley Logarithmen haben, in Ansehung der Größe gar nicht unterscheiden, so ist das ohnstreitig der Grund gewesen, warum man es in der Lehre von den Logarithmen für überflüssig gehalten hat, einen Unterschied zwischen der absoluten und positiven Basis, und den absoluten und positiven Zahlen zu machen.

28. Bey der im vorhergehenden Absatze festgesetzten Einschränkung ist indeß eine positive Zahl im Grunde mit der absoluten einerley, und das Zeichen + bey ihr hat weiter keine Bedeutung, als wenn vor ihr noch eine andere Zahl vorhergeht, und ist folglich entweder eigentlich das Zeichen der Addition, oder es steht so, daß es dem Begriffe der Zahl nicht die mindeste Bestimmung zusetzt. So lange man daher mit bloßen Zahlen zu thun hat, oder bey den Größen, die man untersucht, einzig und allein auf die Menge ihrer Theile sieht, so lange kann man auch die Logarithmen ohne alle Schwierigkeit gebrauchen, wenn man dieselben nur nach einer absoluten und nach einer positiven Basis unter der vorhin gedachten Einschränkung sich bekannt gemacht hat. Aber wenn man die Größen, welche man bey dem Gebrauche der Logarithmen findet, geometrisch construiren, oder die Lehrsätze von den Logarithmen bey allgemeinen Untersuchungen gebrauchen will, wo man sich die Zeichen + und — nicht als Zeichen der Addition und Subtraction, sondern als Zeichen des Positiven und Negativen zu denken hat: so werden die Sätze von den Logarithmen, die zu einer nicht absolute genommenen Basis gehören, schlechterdings unentbehrlich.

29. Um diese Sätze nochmals kurz zu wiederholen, so sind sie folgende.

Zu jeder Größe, sie mag nun positiv oder negativ, reell oder imaginär seyn, gehört ein möglicher Logarithme und nicht mehrere, und wenn die Basis, absolute betrachtet, größer als 1 ist, so gehört zu jeder positiven oder negativen ganzen Zahl, und zu jedem positiven oder negativen unächten Bruche ein positiver, zu jedem positiven oder negativen ächten Bruche hingegen ein negativer Logarithme.

Ferner: Zu jedem Logarithmen gehören nicht nur zwey einander entgegengesetzte sonst gleiche Zahlen, zu jedem positiven Logarithmen nemlich ganze Zahlen oder unächte Brüche, und zu jedem negativen Logarithmen ächte Brüche, sondern es ist derselbe außerdem auch noch der Logarithme einer Menge unmöglicher Größen, nemlich aller derer, die mit den reellen Zahlen, zu welchen er gehört, auf einerley Art aus der positiven oder negativen Basis hervorgebracht werden können.

Drittens gehören zwar, wenn die Basis nicht absolute betrachtet wird, zu jeden zwey gleichen Größen gleiche Logarithmen, aber da jeder Logarithme zu mehr als einer Größe gehöret, so läßt sich nicht umgekehrt von der Gleichheit zweyer Logarithmen auf die Gleichheit jeder zweyer einzelnen zu ihnen gehörigen Größen schließen, sondern es ist nur immer eine von den Größen, die zu dem einen Logarithmen gehören, einer von den Größen des andern Logarithmen gleich.

Endlich ist der Logarithme jeder positiven oder negativen Größe bey einer nicht absolute betrachteten Basis kein anderer als der Logarithme der mit ihnen gleich großen absoluten Zahl, die aus der gleich großen absoluten Basis auf eben die Art gefunden werden kann. Mit andern Worten: Ist der Logarithme von f bey der absoluten Basis a gleich m, so ist auch m der Logarithme von + f und − f, bey der Basis a, wenn dieselbe nicht absolute genommen wird.

30. Die bisher betrachteten Logarithmen waren insgesammt reell, selbst wenn sie zu unmöglichen Größen gehörten. Ob nun gleich, wenn man die Basis nicht absolute betrachtet, jede reelle oder mögliche Größe auch einen reellen Logarithmen und nicht mehrere hat, und außerdem auch die

die reellen Logarithmen zu imaginären Größen gehören: so giebt es doch auch imaginäre Größen, deren Logarithmen ebenfalls imaginär sind. So ist $l\,a^{\sqrt[n]{m}} = \sqrt[n]{m}$, und da m sowohl positiv als negativ seyn kann, so enthält der Ausdruck $\sqrt[n]{m}$ allerdings unmögliche Werthe. Genau erwogen gehört aber auch hier zu jeder Größe nicht mehr als ein Logarithme, obgleich zu jedem Logarithmen, sobald die Basis nicht absolute betrachtet wird, mehrere Größen gerechnet werden müssen.

31. Was die Nothwendigkeit der Theorie der Logarithmen betrifft, wenn die Basis nicht absolute angenommen wird, so will ich hier darüber nur etwas weniges sagen, indem sich in der Folge öfters Gelegenheit zeigen wird, solche außer allen Zweifel zu setzen. Im vierzehnten Capitel beweiset Euler, §. 240., daß

$$\sin.nz = 2^{n-1}\sin.z.\sin.(\frac{\pi}{n} - z).\sin.(\frac{\pi}{n} + z).\sin.(\frac{2\pi}{n} - z).$$

$$\sin.(\frac{2\pi}{n} + z).\sin.(\frac{3\pi}{n} - z).\sin.(\frac{3\pi}{n} - z) \text{ ꝛc.}$$

sey, wenn man jedesmal so viel Faktoren nimmt als n Einheiten hat, und setzt darauf §. 241. hinzu, daß dieser Ausdruck sehr bequem sey, um darnach die Logarithmen der Sinus vielfacher Winkel zu finden. Es muß also auch

$$l\sin.nz = (n-1)\,l2 + l\sin.z + l\sin.(\frac{\pi}{n} - z) + l\sin.(\frac{\pi}{n} + z) +$$

$$l\sin.(\frac{2\pi}{n} - z) + l\sin.(\frac{2\pi}{n} + z) + l\sin.(\frac{3\pi}{n} - z) + l\sin.(\frac{3\pi}{n} + z) \text{ ꝛc.}$$

seyn, wenn man so viel Logarithmen der Sinus nimmt, als n Einheiten hat. Hier kann nun z sehr leicht so angenommen werden, daß unter den Faktoren, wodurch sin. n z bestimmt wird, mehrere negativ werden, ohne daß deswegen die hergesetzten Behauptungen aufgehoben würden. Dergleichen Fälle machen nicht die mindeste Schwierigkeit, wenn man hier Logarithmen braucht, die zu einer nicht absoluten Basis gehören, und auch selbst dann, wenn man aus der letzten Formel durch die Differentiation andere Formeln ableitet. Braucht man hingegen bloß solche Logarithmen, die zu einer absoluten Basis gehören, so muß man zum wenigsten zuvor mit der gegebenen Formel in Ansehung der Zeichen ihrer Faktoren eine solche Veränderung vornehmen, daß man alle diese Faktoren als positiv betrachten kann.

32. Ferner findet man, wenn man Logarithmen braucht, die zu einer absoluten Basis gehören, aus jedem gegebenen Logarithmen und der Basis nicht mehr als eine zugehörige Größe. Wendet man daher Formeln, bey welchen dergleichen Logarithmen zum Grunde liegen, auf solche Fälle an, wo die Basis nicht absolute gedacht werden kann, so findet man darnach, wenn man aus den Logarithmen auf die zu ihnen gehörigen Größen schließen will, nicht alle Größen, von denen doch auf andern Wegen gezeigt werden kann, daß sie der Aufgabe ein Genüge thun. So ergiebt sich, wenn man die Formel für die Logarithmische Linie $a^x = y$ arithmetisch behandelt, zu jedem x nicht mehr als ein y, und doch läßt sich auf andere Art zeigen, daß zu jedem x ein positives und ein negatives y gehöre, und daß also auch eigentlich $a^x = \pm y$ gesetzt werden müsse, welches sich auch findet, wenn man ein Logarithmisches System zum Grunde legt, dessen Basis nicht absolute genommen ist.

33. Wenn man von den Größen, die zu einem Logarithmen gehören, nicht nur alle unmöglichen, sondern selbst die negativen ausschließt, so ist das im Grunde eben so viel,

als ob man Logarithmen gebraucht, die zu einer absoluten Basis gehören, und alle Größen, mit welchen man zu thun hat, ebenfalls bloß absolute betrachtet. Dies kann zur Erklärung des Umstandes dienen, daß in diesem Falle die Resultate gleich sind, man mag das Positive von dem Absoluten unterscheiden oder nicht, denn man hat in diesem Fall den Einfluß, den die Setzung des Zeichens + oder die Verwechselung des Positiven mit den Absoluten haben könnte, durch die gedachte Einschränkung aufgehoben.

34. Zum Schlusse will ich noch die Methode hersetzen, nach welcher Hr. Prof. Bürja die Logarithmen der absoluten Zahlen berechnen lehrt. Man findet dieselbe in seinem selbstlernenden Algebristen, Berlin und Libau 1786. S. 164 f. Um aber die daselbst §. 12. stehende Aufgabe zu verstehen, muß man die S. 153. §. 2. gegebenen Erklärungen zu Hülfe nehmen. Größen exponenziren heißt erforschen, die wievielte Potenz eine Größe von einer andern Größe ist, oder zur wievielten Potenz eine Größe erhoben werden muß, daß sie einer andern gegebenen Größe gleich werde. Die eine gegebene Größe wird also als Wurzel angesehen, und soll hier eigentlich Basis genannt werden; die andere wird als Potenz betrachtet, und soll hier eigentlich Dignität genannt werden. Was herauskömmt ist der Exponent, oder eigentlich der Logarithmus. Außerdem braucht man noch dazu folgende Bezeichnung:

$\frac{a}{=\,b}$, welches bedeutet, a durch b exponenziret.

35. So wie ich die angeführten Erklärungen mit des Hrn. Prof. Bürja's Worten mitgetheilt habe, so will ich solches auch mit der §. 12. vorkommenden und hieher gehörigen Aufgabe thun. Sie ist folgende.

Auf-

Aufgabe.

Eine bestimmte Zahl durch eine bestimmte Zahl exponenziren.

Vorbereitung. Es sey die Basis a, und der Logarithmus einer Zahl n sey = 23 ; 645, wo die drey letzten Ziffern Decimalbrüche vorstellen. So folget daraus

$$a^{23;645} = n$$

oder $$a^{20+3+\frac{6}{10}+\frac{4}{100}+\frac{5}{1000}} = n$$

oder $$a^{20} \,.\, a^{3} \,.\, a^{\frac{6}{10}} \,.\, a^{\frac{4}{100}} \,.\, a^{\frac{5}{1000}} = n$$

oder

$$(a^{10})^{2} \,.\, (a^{1})^{3} \,.\, (a^{\frac{1}{10}})^{6} \,.\, (a^{\frac{1}{100}})^{4} \,.\, (a^{\frac{1}{1000}})^{5} = n.$$

Weil die Wurzel a gegeben ist, so können die Potenzen a^{10}, a^{1}, $a^{\frac{1}{10}}$, $a^{\frac{1}{100}}$, $a^{\frac{1}{1000}}$, als bekannt angenommen werden.

Wenn man die Größe a^{10} nach und nach zu ihren Potenzen erhebet, so wird man finden, daß $(a^{10})^{2}$ der Zahl n am nächsten kommen muß. Wäre also der Exponent 2 unbekannt, so würde man ihn finden, indem man nur beobachtete, welche Potenz von a^{10} der Zahl n am nächsten kömmt.

Nun dividire ich die ganze Gleichung beyderseits durch $(a^{10})^{2}$, und setze $n:(a^{10})^{2} = {}'n$; so kömmt

$$(a^{1})^{3} \,.\, (a^{\frac{1}{10}})^{6} \,.\, (a^{\frac{1}{100}})^{4} \,.\, (a^{\frac{1}{1000}})^{5} = {}'n.$$

Wenn ich die Größe a^{1} oder a nach und nach zu ihren Potenzen erhebe, so muß ich finden, daß $(a^{1})^{3}$ der Zahl $'n$ am nächsten kömmt. Folglich würde ich auf diese Art den Exponenten 3 entdecken, wenn er unbekannt wäre.

Ich dividire vorige Gleichung durch $(a^{1})^{3}$, und setze $'n:(a^{1})^{3} = {}''n$; so kömmt

(a

$$(a^{\frac{1}{10}})^6 \cdot (a^{\frac{1}{100}})^4 \cdot (a^{\frac{1}{1000}})^5 = {}''n.$$

Wenn ich die Größe $a^{\frac{1}{10}}$ nach und nach zu ihren Potenzen erhebe, so wird sich finden, daß $(a^{\frac{1}{10}})^6$ der Zahl $''n$ am nächsten kömmt. Folglich könnte der Exponent 6 auf dieser Art entdecket werden.

Nun dividire man die Gleichung durch $(a^{\frac{1}{10}})^6$, und bezeichne $''n : (a^{\frac{1}{10}})^6$ durch $'''n$, so kömmt

$$(a^{\frac{1}{100}})^4 \cdot (a^{\frac{1}{1000}})^5 \cdot = {}'''n.$$

Man kann auf die nemliche Art fortfahren, und nach und nach die Exponenten 4 und 5 erforschen, wenn sie unbekannt sind. Also erhält man zuletzt alle Ziffern des Logarithmus 23;645. Uebrigens ist es klar daß die nemlichen Schlüsse sich auf einen jeden Logarithmus anwenden lassen.

Der Kürze wegen, wollen wir solche Größen a^{100}, a^{1}, $a^{\frac{1}{10}}$, $a^{\frac{1}{100}}$, u. s. f. Hauptpotenzen von a nennen. Erhebet man diese wiederum zur 1sten, 2ten, 3ten, u. s. f. bis zur 9ten Potenz, so bekömmt man $(a^{100})^1$, $(a^{100})^2$, $(a^{100})^3$, u. s. f. $(a^{10})^1$, $(a^{10})^2$, $(a^{10})^3$, u. u. f. $(a^1)^1$, $(a^1)^2$, $(a^1)^3$, u. s. f. $(a^{\frac{1}{10}})^1$, $(a^{\frac{1}{10}})^2$, $(a^{\frac{1}{10}})^3$, u. s. f. Diese Größen wollen wir Nebenpotenzen von a nennen, und ihre neuen Exponenten sollen Nebenexponenten seyn.

Auflösung. Die Schlüsse, welche wir jetzt gemacht haben, führen auf folgende Regel zur Erforschung der bestimmten Exponenten.

Man suche erstlich die Hauptpotenz und dann die Nebenpotenz der Basis, welche der gegebenen Dignität am näch-

nächsten kommen. Hierauf dividire man die gegebene Dignität durch die gefundene Potenz.

Man nehme die Hauptpotenz, welche nächst kleiner ist, als die vorher gebrauchte. Man suche die Nebenpotenz, welche dem gefundenen Quotienten am nächsten kömmt. Man dividire den Quotienten durch die gefundene Potenz.

Man wiederhole dieses Verfahren, so oft man es für nöthig halten wird.

Man schreibe die Nebenexponenten nach einander auf, so wie man sie entdecket. Sie sind nichts anders, als die Zifern des gesuchten Logarithmus.

Man setze das Dezimalzeichen vor die Zifer, die aus dem Hauptexponenten $\frac{1}{10}$ entstanden ist.

Exempel. Es wird verlanget

$$\frac{\underline{8765{,}102325977}}{2}$$

das ist, man will wissen, zur wievielten Potenz 2 erhoben werden muß, daß die obere Zahl herauskomme. Man suche erstlich die Hauptpotenzen von 2.

$$2^{10} = 1024$$
$$2^{1} = 2$$
$$2^{\frac{1}{10}} = 1;07177\ldots.$$
$$2^{\frac{1}{100}} = 1;00695\ldots.$$
$$2^{\frac{1}{1000}} = 1;00069\ldots. \text{ rc. rc.}$$

Die gebrochenen Potenzen $2^{\frac{1}{10}}$, $2^{\frac{1}{100}}$, $2^{\frac{1}{1000}}$ kann man finden, indem man wechselsweise die zweyte und fünfte Wurzel ausziehet. Denn $\sqrt[5]{\sqrt[2]{2}} = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{5}} = 2^{\frac{1}{10}}$. Ferner $\sqrt[5]{\sqrt[2]{2^{\frac{1}{10}}}} = \left((2^{\frac{1}{10}})^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{5}} = (2^{\frac{1}{10}\,\frac{1}{10}} = 2^{\frac{1}{100}}$ u. s. f. Die Nebenpotenzen findet man, wenn man jede Hauptpotenz

tenz einigemal mit sich selbst multipliziret Dieses voraus-gesetzt, wird die Operation also zu stehen kommen.

	Dignität.	Basis.	Logarithmus.
	8765102325977	2	42;994....
Div.	1099511627776 = $(2^{10})^4$		

Quoz. 7;97181

Div. 4 = $(2^1)^2$

Quoz. 1;99295

Div. 1;86608 = $(2^{\frac{1}{10}})^9$

Quoz. 1;06799

Div. 1;06410 = $(2^{\frac{1}{100}})^9$

Quoz. 1;00337

Div. 1;00279 = $(2^{\frac{1}{1000}})^4$

Quoz. 1;00058

ꝛc. ꝛc.

Anmerkung. Anstatt daß man die Hauptpotenz erhebet, um den Nebenexponenten zu finden, kann man auch durch die Hauptpotenz so viel mal als möglich dividiren. Die Anzahl der Divisionen giebt den Nebenexponenten. Z. E. Wenn man gleich anfänglich die gegebene Dignität durch 2^{10} oder 1024, den Quotienten wieder durch 1024, u. s. f. dividiret hätte, so würde man gefunden haben, daß man 4mal dividiren kann, und der letzte Quotient wäre gewesen 7;97181. Man nehme a a a a c, so kann ich entweder durch a^4 oder 4mal durch a dividiren, der letzte Quotient ist in beyden Fällen c.

VIII.