Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

VIII. Zusätze zum achten Capitel.

VIII.

Zusätze zum achten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von den transcendenten Größen, die aus dem Kreise entspringen.

1. **Vorläufig**, §. 126 — 131.
   a. Anzeige des Zusammenhangs dieses Capitels mit dem vorhergehenden, und der Bedeutung des Buchstabens π in der nun folgenden Untersuchung, §. 126.
   b. Verschiedene aus den Anfangsgründen der ebenen Trigonometrie entlehnte, nebst andern aus ihnen abgeleiteten Formeln, §. 127 — 131.
      α. Die aus den Anfangsgründen der ebenen Trigonometrie entlehnte Formeln, §. 127. 128.
      β. Benutzung derselben durch verschiedene mit ihnen vorgenommene Combinationen zur Erfindung anderer Formeln, §. 128 — 131.
         aa. solcher, nach welchen der Sinus und Cosinus eines Winkels mit dem Cosinus und Sinus eines andern Winkels verwechselt werden kann, §. 128.
         bb. solcher, wodurch die Sinus und Cosinus derer Winkel bestimmt werden, die in einer arithmetischen Progression fortschreiten, §. 129.
         cc. solcher, wodurch der Sinus und Cosinus eines Winkels aus dem Cosinus des doppelt so großen Winkels gegeben wird, §. 130, nebst einigen andern,

andern, in welchen die trigonometrischen Linien zweyer Winkel mit den trigonometrischen Linien der Hälften ihrer Summe und ihrer Differenz mit einander verglichen werden, §. 131.

2. Entwickelung der trigonometrischen Linien durch unendliche Reihen, in welchen diese Linien mit den Bogen, zu welchen sie gehören, verglichen werden, §. 132—137.
   a. diese Reihen selbst, §. 132—135.
      α. Reihen für die Sinus und Cosinus, §. 132—134.
         aa. Reihen, in welchen die Sinus und Cosinus solcher Winkel, die Vielfache eines andern Winkels sind, mit den Sinus und Cosinus des einfachen Winkels verglichen werden, §. 132. 133.
         bb. hieraus fließende Reihen, in welchen die Sinus und Cosinus aus den Bogen, zu welchen sie gehören, bestimmt werden, §. 134.
      β. Reihen, in welchen die Tangenten und Cotangenten mit den Bogen, zu welchen sie gehören, verglichen werden, §. 135.
   b. Anleitung zum vortheilhaften Gebrauche der gedachten Reihen zur Erfindung der trigonometrischen Linien aller Bogen oder Winkel, §. 136. 137, nemlich
      α. der Sinus und Cosinus, §. 136.
      β. der Tangenten und Cotangenten, §. 137.
      γ. der Secanten und Cosecanten, §. 137.
3. Vergleichung der Kreisgrößen mit den Exponential-Größen und den Logarithmen. §. 138—142.
   a. diese Vergleichung selbst, §. 138. 139.
      α. Formeln, wonach die unmöglichen Exponential-Größen auf Sinus und Cosinus reeller Bogen, §. 138.
      β. Formel, wonach die unmöglichen Logarithmen auf Kreisbogen reducirt werden können, §. 139.

b. Benutzung der gefundenen Formel zur Erfindung einer andern die Bestimmung eines Kreisbogens aus seiner Tangente betreffenden, §. 140.

α. Formel, welche diese Bestimmung enthält, §. 140.

β. Gebrauch dieser Formel zur Erfindung des Verhältnisses des halben Umfanges eines Kreises zum Radius, §. 141. 142.

aa. um dieses Verhältniß darnach unmittelbar zu bestimmen, §. 141.

bb. um solches nach einer andern daraus abgeleiteten zu eben dieser Absicht noch bequemern Formel zu finden, §. 142.

B. Zusatz zu §. 133.

1. Daß

$$(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^n = \cos. n z \pm \sqrt{-1}. \sin. n z$$

sey, fließt aus dem von Eulern geführten Beweise bloß für den Fall, wenn n eine ganze positive Zahl ist. Da indeß, wenn n eine ganze positive Zahl bleibt, auch

$$(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^{2n} = \cos. 2 n z \pm \sqrt{-1}. \sin. 2 n z$$

seyn muß, so bekommt man, wenn man jene Formel durch diese dividirt,

$$\frac{(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^n}{(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^{2n}} = \frac{\cos. n z \pm \sqrt{-1}. \sin. n z}{\cos. 2nz \pm \sqrt{-1}. \sin. 2nz}$$

oder

$$(\cos. z \mp \sqrt{-1} \sin. z)^{-n} = \cos. -nz \pm \sqrt{-1}. \sin. -nz.$$

Denn einmal ist $\cos. n z = \cos. -n z$, und $\sin. -nz = -\sin. nz$, und folglich $\pm \sqrt{-1}. \sin. -nz = \mp \sqrt{-1}. \sin. nz$. Ferner ist

$$\cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. n z.$$

$$=$$

$$(\cos. 2nz \pm \sqrt{-1}. \sin. 2nz) \times (\cos. nz \mp \sqrt{-1}. \sin. nz)$$

wel-

welches zu finden man nur wirklich multipliciren, und das Produkt nach Formel 1. 2. 3. und 4 des 130sten §. verändern darf. Folglich ist auch

$$\frac{\cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz}{\cos. 2nz \pm \sqrt{-1}. \sin. 2nz} = \cos. nz \mp \sqrt{-1}. \sin. nz$$

und da nun $\cos. nz = \cos. -nz$, und $\mp \sqrt{-1}. \sin. nz = \pm \sqrt{-1}. \sin. -nz$ ist, so ist hieraus

$$\frac{\cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz}{\cos. 2nz \pm \sqrt{-1}. \sin. 2nz} = \cos. nz \mp \sqrt{-1}. \sin. nz =$$

$$\cos. -nz \pm \sqrt{-1}. \sin. -nz = (\cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz)^{-n}$$

2. Ferner ist, wenn auch p eine ganze Zahl bedeutet

$$(\cos. \frac{1}{p} z \pm \sqrt{-1}. \sin. \frac{1}{p} z)^p = \cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z$$

und also $\cos. \frac{1}{p} z \pm \sqrt{-1}. \sin. \frac{1}{p} z$ die pte Wurzel aus $\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z$, oder

$$\cos. \frac{1}{p} z \pm \sqrt{-1}. \sin. \frac{1}{p} z = (\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin z)^{\frac{1}{p}}.$$

Nun sey auch m eine ganze Zahl, so wird

$$(\cos. \frac{1}{p} z \pm \sqrt{-1}. \sin. \frac{1}{p} z)^m = (\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^{\frac{m}{p}},$$

folglich

$$\cos. \frac{m}{p} z \pm \sqrt{-1}. \sin. \frac{m}{p} z = (\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^{\frac{m}{p}}.$$

3. Hiernach gilt also der Satz, daß

$$(\cos. z \pm \sqrt{-1}. \sin. z)^n = \cos. nz \pm \sqrt{-1}. \sin. nz$$

sey, nicht nur für den Fall, wenn n eine ganze positive Zahl, sondern auch, wenn es eine negative Zahl oder ein Bruch ist. Behandelt man ferner die für den positiven Bruch-Werth von n gefundene Formel, wie Absatz 1 die für den ganzen positiven Werth eben dieses Buchstabens schon von Eulern festgesetzte: so überzeugt man sich auch davon, daß $\frac{m}{p}$ sowohl positiv als negativ genommen werden könne. Endlich läßt sich für jede Irrational-Zahl auf dem Wege der Näherung ein Bruch finden, den man für sie setzen kann, und dadurch ist denn der obige Satz zugleich für die Irrational-Werthe von n bewiesen.

C. Zusatz zu §. 140.

1. Da ich in dem Zusatze B zum siebenten Capitel, Absatz 8 bis 11, gezeigt habe, daß die Formel

$$l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{rc.}$$

nach dem von Eulern in diesem Capitel geführten Beweise bloß für den Fall dargethan worden, wenn x einen ächten Bruch bedeutet: so entsteht beym gegenwärtigen § die Frage: Ob nicht darin die gedachte Formel über ihre Grenzen ausgedehnt werde, indem für x die imaginäre Größe $\sqrt{-1} \times \text{tang.}\, z$ gesetzt wird? Müßte man nicht in den Formeln $a^\omega = 1 + k\omega$, und $\omega = l(1 + k\omega)$, §. 114, desgleichen in

$(1 + k\omega)^i = x$; und $i\omega = \frac{i}{k}((1 + x)^{\frac{1}{i}} - 1)$, §. 119, a, k,

x und ω schlechterdings als unbenannte Zahlen betrachten, wie solches bey einiger Ueberlegung von selbst einleuchtet: so ließe sich vielleicht darauf antworten, daß man $\sqrt{-1} \times \text{tang.}\, z$ als einen ächten benannten Bruch, dessen Name $\sqrt{-1}$ sey, ansehen könne, und daß alles das, was von Zahlen überhaupt gelte, auch bey den Arten derselben statt finden müsse. Allein da aus dem angeführten Grunde die zu Anfange des § stehende Formel bloß für die unbenannten Zahlen erwiesen ist, so läßt sich daran mit nicht dem geringsten Rechte denken.

2. Es scheint also allerdings zugegeben werden zu müssen, daß Euler den Satz:

$$l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{ꝛc.};$$

in dem oben stehenden § nicht mit der erforderlichen Befugniß gebrauche. Allein da das, was Euler vermittelst dieses Satzes in dem gedachten §. und in den beyden auf ihn folgenden gefunden hat, eben so wahr als wichtig ist, so wird dadurch in einem sehr hohen Grade wahrscheinlich, daß der Satz,

$$l\frac{1+1}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{ꝛc.}$$

so wie auch die beyden, aus welchen er hergeleitet worden, eines weitern Umfangs fähig seyn, als ihnen nach Zusatze B zum siebenten Capitel zukömmt; und es frägt sich daher, theils, ob sich solches so verhalte? theils, wenn dieses ist, wie sich alsdann die obige Einschränkung derselben mit dieser Erweiterung ihrer Grenzen vertrage?

3. Vorausgesetzt, daß $d.lx = \frac{dx}{x}$ ist, x mag eine Größe bedeuten, was für eine es will, so läßt sich vermittelst der Differential-Rechnung, (denn zu dieser muß man hierbey wohl seine Zuflucht nehmen, wenigstens sehe ich mich genöthiget, am gegenwärtigen Orte eine Ausnahme von dem Vorsatze zu machen, in diesem Werke nichts aus der Differential-Rechnung zu berühren,) sehr leicht beweisen, daß die in dem Zusatze B zum siebenten Capitel, Absatz 8 — 11, festgesetzten Einschränkungen für die daselbst für $l(1+x)$, $l(1-x)$, $l\frac{1+x}{1-x}$, gefundenen Formeln wegfallen können, und daß alle diese Formeln ihre Gültigkeit behalten, man

mag darin für x eine Größe setzen, welche man will. Denn setzt man zuvörderst

$$l(1 \pm x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4 + Fx^5 + \text{etc.}$$

welches allemal erlaubt ist, wofern man die Werthe von A, B, C, D, etc. erst aus dieser Gleichung bestimmt, so erhält man, wenn man differentiirt,

$$\frac{\pm dx}{1 \pm x} = Bdx + 2Cxdx + 3Dx^2dx + 4Ex^3dx + \text{etc.}$$

und wenn man beyde Hälften dieser Gleichung durch dx dividirt,

$$\frac{\pm 1}{1 \pm x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \text{etc.}$$

und hieraus durch die Multiplication mit $1 \pm x$

$$\begin{aligned} \pm 1 = B &+ 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \text{etc.} \\ &\pm Bx \pm 2Cx^2 \pm 3Dx^3 \pm 4Ex^4 \pm \text{etc.} \end{aligned}$$

Da nun x als eine veränderliche Größe jeden Werth haben kann, so fließt hieraus, wenn man $x = 0$ setzt

$$B = \pm 1,$$

und da B nicht anders $= \pm 1$ seyn kann, als wenn für jeden andern Werth für x

$$\begin{aligned} 0 = &+ 2Cx + 3Dx^2 + 4Ex^3 + 5Fx^4 + \text{etc.} \\ &\pm Bx \pm 2Cx^2 \pm 3Dx^3 \pm 4Ex^4 \pm \text{etc.} \end{aligned}$$

ist, so ist dadurch auch die Wahrheit dieser Gleichung erwiesen. Aus ihr aber wird

$$2C \pm B = 3D \pm 2C = 4E \pm 3D = 5F \pm 4E = 0 \text{ etc.}$$

folglich, da $B = \pm 1$ ist,

$$C = -\frac{1}{2};\ D = \pm\frac{1}{3};\ E = -\frac{1}{4};\ F = \pm\frac{1}{5};\ \text{etc.}$$

und also

$$l(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \pm \text{etc.}$$

4. Läßt sich nun in dieser Formel für x jede Größe setzen, so braucht das weiter nicht bewiesen zu werden, daß solches auch in der Formel

$$l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{ꝛc.}$$

erlaubt sey, indem dieselbe aus jener auf eine solche Art abgeleitet ist, daß in ihr alle die Werthe für x müssen gesetzt werden können, welche man in jener dafür setzen kann. Und was die imaginären Werthe betrifft, so setze man, wenn man sich in Ansehung ihrer durch einen besondern Beweis überzeugen will,

$$l(1 \pm z\sqrt{-1}) = A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + Fz^5 + \text{ꝛc.}$$

Alsdann findet man, wenn man wieder so wie vorhin verfährt, nach und nach

$$\frac{\pm\sqrt{-1}.\,dz}{1 \pm z\sqrt{-1}} = Bdz + 2Czdz + 3Dz^2dz + 4Ez^3dz + \text{ꝛc.}$$

$$\frac{\pm\sqrt{-1}}{1 \pm z\sqrt{-1}} = B + 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + 5Fz^4 + \text{ꝛc.}$$

$$\begin{aligned} \pm\sqrt{-1} = B &+ 2Cz + 3Dz^2 + 4Ez^3 + \text{ꝛc.} \\ &\pm\sqrt{-1}.Bz \pm 2\sqrt{-1}.Cz^2 \pm 3\sqrt{-1}.Dz^3. \pm \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

$$B = \pm\sqrt{-1}$$

$$2C \pm \sqrt{-1}B = 3D \pm 2\sqrt{-1}.C = 4E \pm 3\sqrt{-1}.D = 0, \text{ꝛc.}$$

$$C = +\frac{1}{2};\ D = \mp\frac{\sqrt{-1}}{3};\ E = -\frac{1}{4};\ F = \pm\frac{\sqrt{-1}}{5};\ \text{ꝛc.}$$

$$l(1 \pm z\sqrt{-1}) = \pm z\sqrt{-1} - \frac{z^2}{2} \mp \frac{z^3\sqrt{-1}}{3} - \frac{z^4}{4} \pm \frac{z^5\sqrt{-1}}{5} - \text{ꝛc.}$$

und eben dieses erhält man aus der Formel am Ende des vorhergehenden Absatzes, wenn man darin $z\sqrt{-1}$ für x setzt.

5. Hiernach ist also das keinem Zweifel unterworfen, daß die für $l(1+x)$, $l(1-x)$, und $l\frac{1+x}{1-x}$ bekannten Formeln für x jeden Werth zulassen, wenn für jeden Werth von x, er sey positiv oder negativ, reell oder imaginär, $d.lx = \frac{dx}{x}$ ist; allein dieses muß denn auch, ehe man weiter schließt, zuvor außer allen Zweifel gesetzt seyn, und ich darf hier diese Untersuchung um so weniger unterlassen, da sonst die in den Zusätzen zum siebenten Capitel geäußerten Behauptungen von einer Seite angegriffen werden zu können scheinen mögten, von welcher sie doch, genau betrachtet, nur noch mehr Bestätigung erhalten.

6. Euler beweiset den Satz, daß, wenn $y = lx$ gesetzt wird,

$$dy = \frac{dx}{x}$$

sey, im ersten Theile seiner Institutionum Calculi differentialis, im sechsten Capitel, §. 180. für die hyperbolischen Logarithmen auf folgende Art. Setzt man $y = lx$, so geht, wenn man $x + dx$ für x nimmt, y in $y + dy$ über. Es wird folglich

$$y + dy = l(x + dx), \text{ und } dy = l(x + dx) - lx = l(1 + \frac{dx}{x}).$$

Da nun, wenn die hyperbolischen Logarithmen genommen werden,

$$l(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \text{etc.}$$

ist, so ergiebt sich, wenn man $\frac{dx}{x}$ für z in diese Formel bringt,

$$dy = \frac{dx}{x} - \frac{dx^2}{2x^2} + \frac{dx^3}{3x^3} - \text{etc.}$$

und

und da alle Glieder dieser Reihe vom zweyten an gegen das erste verschwinden, so ist

$$dy = \frac{dx}{x}$$

7. Zu diesem Beweise fügt er im 181sten § noch folgenden. Wenn p irgend eine Zahl bedeutet, und ω unendlich klein angenommen wird, so kann man den Logarithmen von p auf die Art ausdrucken, daß man

$$lp = \frac{p^\omega - 1}{\omega}$$

setzt. Hieraus ergiebt sich durch die Differentiation

$$d.lp = d.\frac{1}{\omega}p^\omega = p^{\omega-1}\,dp = \frac{dp}{p}$$

weil ω als eine unendlich kleine Größe in $p^{\omega-1}dp$ gegen -1 verschwindet.

8. Allein durch beyde Beweise wird offenbar die Richtigkeit der Formel, $dy = d.lx = \frac{dx}{x}$ nicht weiter dargethan, als so weit ohne Differential-Rechnung die Richtigkeit der Formeln

$$l(1 + z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6} + \text{etc.}$$

$$\text{und } lp = \frac{p^\omega - 1}{\omega}$$

erwiesen worden ist, und also bloß für den Fall, wenn von den Logarithmen absoluter Zahlen die Rede ist, und im Fall diese Zahlen als positiv angesehen werden, solches unter der S. 501. f. Absatz 27 und 28 beschriebenen Einschränkung geschieht. Nun kann man zwar die obige Formel auch geometrisch an der Logarithmischen Linie darthun, aber man gewinnt dadurch in Ansehung des Umfangs derselben nichts, und es scheinen demnach die Formeln

$$l(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \text{ꝛc. und}$$

$$l\frac{1+x}{1-x} = \frac{2x}{1} + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \text{ꝛc.}$$

selbst von der Differential-Rechnung keine Erweiterung zu erwarten zu haben.

9. Wahr muß es indeß doch seyn, daß man in der Formel $dy = d.lx = \frac{dx}{x}$ für x jede Größe, sie mag positiv oder negativ, eine ganze oder gebrochene Zahl, reell oder imaginär seyn, setzen könne; denn wie wäre es sonst möglich, daß man bey dem häufigen und mannigfaltigen Gebrauche dieser Formel dennoch durch dieselbe zu keinem Irrthume verführt worden wäre? Die Art, wie ich mir hier die Schwierigkeiten aus dem Wege zu räumen gesucht habe, und welche ich bey dieser Gelegenheit Kennern zur Prüfung vorlegen will, ist folgende.

10. Ich habe in den Zusätzen zum siebenten Capitel zu zeigen gesucht, daß die Logarithmen, wenn die Basis ihres Systems und folglich auch die Zahlen, zu welchen sie gehören, nicht absolute genommen werden, nicht bloß zu positiven sondern auch zu negativen, ja selbst zu einer unbegrenzten Menge imaginärer Größen gehören, jeder einzelne Logarithme nemlich zu allen den Größen, welche mit der positiven, zu welcher er gehört, aus einer Größe und durch einerley Erhebung zu Dignitäten und Extraction der Wurzel entspringen. So findet man z. B. wenn man den Ausdruck $\sqrt[4]{(+x^4)}$ entwickelt, $+x$, $-x$, $+x\sqrt{-1}$, $-x\sqrt{-1}$, und ist nun $x = a^m$, und $+a$ die Basis eines Logarithmischen Systems, so ist $lx^4 = la^{4m} = 4m$, und $l(\sqrt[4]{x^4}) = \frac{1}{4}.4m = m = l+x = l-x = l+x\sqrt{-1}$ =

$= l - x\sqrt{-1}$. Eben so gehört überhaupt der Logarithme, der zu $+x$ gehört, da $+x$ einer von den Werthen ist, die in $(+x)^{\frac{2n}{2n}}$ begriffen sind, auch zu $-x$, weil auch $-x$ ein Werth von $(+x)^{\frac{2n}{2n}}$ ist, und außerdem noch zu allen imaginären Größen, die in $(+x)^{\frac{2n}{2n}}$ enthalten sind, und deren Menge desto größer wird, je größer man n annimmt. Dies also als ausgemacht vorausgesetzt, und man muß entweder es zugeben, oder die Logarithmen gar nicht bey wirklich positiven und negativen, und noch weniger bey imaginären Größen brauchen; so weiß man, daß für jede Größe von x zu $+x$, $-x$, $+x\sqrt{-1}$, $-x\sqrt{-1}$ nicht mehr als ein Logarithme gehört. Da nun eine und dieselbe Größe nicht mehr als ein Differential hat, und der Satz, daß $d.l+x = d.lx = \frac{dx}{x}$ sey, durch die vorhin angeführten Beweise hinlänglich dargethan ist: so ist klar, daß auch $d.l-x = d.l+x\sqrt{-1} = d.l-x\sqrt{-1} = \frac{dx}{x}$ seyn muß. Aber es ist auch $\frac{-dx}{-x}$, desgleichen $\frac{\sqrt{-1}.dx}{\sqrt{-1}.x}$, und $\frac{-\sqrt{-1}.dx}{-\sqrt{-1}.x} = \frac{dx}{x}$, und man findet folglich das Differential des Logarithmen einer negativen Größe $-x$, und der imaginären Größen von der Form $\pm x\sqrt{-1}$, wenn man solches nach der Formel $d.lz = \frac{dz}{z}$ sucht, indem man darin für z allenthalben die Größe setzt, deren Logarithmen-Differential man verlangt.

11. Hier hätte sich also eine von den Gelegenheiten gefunden, deren ich S. 505. Absatz 31. gedacht habe. Allein wenn die Formel $d.lz = \frac{dz}{z}$ für jeden Werth von z gilt, und wer darf solches, selbst wenn er den hier gegebenen Beweis nicht brauchen will, leugnen, da darauf in der Differential- und Integral-Rechnung so viel beruhet? so ist dadurch auch, wie schon gesagt, die Gültigkeit der Formeln

$$l(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \text{etc., und}$$

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \text{etc.}$$

für jeden Werth von x außer allen Zweifel gesetzt; und nun muß man folglich auch zugeben, daß

$$l - 2 = -3 - \frac{9}{2} - \frac{27}{3} - \frac{81}{4} - \frac{243}{5} - \text{etc.}$$

und zugleich

$$l - 2 = 2(3 + \frac{27}{3} + \frac{243}{5} + \frac{2187}{7} + \text{etc.})$$

sey, indem man nur, um jene Bestimmung zu finden, in der Formel

$$l(1 - x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \text{etc.}$$

und um diese zu erhalten, in der Formel

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \text{etc.}$$

$x = 3$ setzen darf. Hier entstehen aber neue Schwierigkeiten. Sollen die angeführten Formeln bloß in den in dem Zusatze B zum siebenten Capitel festgesetzten Einschränkungen gelten? Wie kann denn die Differential-Rechnung sie als allgemein gültige Formeln darstellen? Oder will man sie

für

für jeden Werth von x gültig annehmen. Wie soll man sich dann den doppelten unendlich großen Logarithmen denken, den man dabey durch sie für jede negative Zahl zu finden im Stande ist? Wie soll man ferner das erklären, daß man nach keiner von diesen Formeln den unmöglichen Logarithmen, den nach den gewöhnlichen Vorstellungen jede negative Zahl haben soll, und eben so wenig den reellen Logarithmen, der ihr nach meiner Vorstellungsart zukommt, findet? Endlich, wie kann eine jede negative Zahl außer den reellen Logarithmen, den ich ihr beygelegt habe, noch zwey andere reelle, einen positiven und einen negativen, und beyde unendlich groß, und jenen, soweit man hier vergleichen darf, größer als diesen haben, da doch allgemein behauptet wird, daß selbst jeder positiven Zahl nicht mehr als ein reeller Logarithme zukomme, und ich so gar keiner Zahl mehr als einen Logarithmen eingeräumt habe? So groß auch diese Schwierigkeiten zu seyn scheinen, so sind sie gleichwohl nichts weniger als unübersteiglich, indem die Quelle davon lediglich in einem nicht hinlänglich deutlichen und bestimmten Begriffe von den positiven und negativen Zahlen und von den Logarithmen liegt. Ich will versuchen, sie auf eine befriedigende Art aus dem Wege zu räumen, muß aber dabey um Erlaubniß bitten, einige von den Vorstellungsarten, die ich bereits in meinen Briefen über die Buchstabenrechnung und Algebra, so wie auch in meinen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra gebraucht habe, auch hier gebrauchen, und dieselben, um den Leser des Gegenwärtigen die Mühe des Nachsehens zu ersparen, zum voraus kurz mittheilen zu dürfen.

12. Daß Zahlen Mengen von Einheiten sind, ist allerdings eine richtige Vorstellung, allein man reicht damit nicht aus, wenn man die Regeln der Arithmetik weiter als

auf

auf die absoluten und unbenannten Zahlen ausdehnen will, und mehr zu thun hat, als zu addiren und zu subtrahiren. Denn will man sich jede Zahl bloß als eine Menge von Einheiten denken, so ist eine benannte Zahl auch weiter nichts als eine Menge benannter Einheiten, und eben so jede positive Zahl bloß eine Menge positiver, und jede negative Zahl bloß eine Menge negativer Einheiten. Allein was soll man sich dabey unter der Multiplication, Division rc. mit einer benannten Zahl vorstellen? Oder soll man sagen, daß man in keinem Sinne mit einer benannten Zahl multipliciren oder dividiren könne? Wie kann man alsdann in der analytischen Geometrie von Produkten gerader Linien, und in der angewandten Mathematik von Produkten aus Kräften in ihre Entfernungen u. d. gl. reden? Und da sich die benannten Zahlen von den unbenannten bloß darin unterscheiden, daß sie außer der Menge der Theile, welche diese allein zu erkennen geben, auch noch die Art der Theile anzeigen, und also außer den wesentlichen Eigenschaften der Zahlen noch etwas Zufälliges ausdrucken: so müßte man, wenn man die Multiplication und Division benannter Zahlen nicht gelten lassen wollte, auch die Multiplication und Division positiver und negativer Zahlen verwerfen, denn im Grunde sind ja die positiven und negativen Zahlen nichts anders, als eine besondere Art von benannten Zahlen. Es ist daher besser, wenn man sich die Zahlen als Begriffe, welche die Entstehungsart einer Größe aus der ersten absoluten Einheit, oder aus Eins darstellen, und die Ziffern als die Zeichen dieser Begriffe gedenkt; und demnach jede absolute Zahl weiter nichts anzeigen läßt, als daß man die erste absolute Einheit oder Eins, ohne allen weitern Zusatz, mehrere Mal nehmen, den benannten und positiven und negativen Zahlen aber die Bedeutung giebt, daß man dar-

nach

nach zuvörderst die erste absolute Einheit mehrere Mal nehmen, und darauf der gefundenen Menge den Namen oder das Zeichen der gegebenen Zahl zusetzen solle.

13. Um von dieser Anmerkung an dem gegenwärtigen Orte weiter keinen Gebrauch zu machen, als den, um dessen willen ich sie habe hersetzen müssen, so ist eigentlich unter zwey entgegengesetzten sonst gleichen Zahlen, wenn man beyde aus der ersten absoluten Einheit entstehen läßt, in Ansehung dieser Entstehungsart, im Allgemeinen betrachtet, kein Unterschied, indem man bey der einen die erste absolute Einheit eben so vielmal als bey der andern nehmen, und dann auch bey der einen sowohl als bey der andern die erhaltene absolute Zahl durch Hinzufügung einer zufälligen Bestimmung modificiren muß. Wollte man hieraus die Folge herleiten, daß auf diese Weise in Ansehung der Entstehungsart aller Unterschied zwischen den positiven, negativen, und benannten Zahlen jeder Art, selbst wenn ihr Name eine unmögliche Größe ausdruckt, wegfalle, wofern nur bey allen diesen Zahlen eine und dieselbe Zifer statt finde, und also die Entstehungsart von $+x$, von $-x$, von $+x\sqrt{-1}$, von $-x\sqrt{-1}$ u. d. gl. aus der ersten absoluten Einheit dieselbe seyn müsse: so läßt sich dawider nichts einwenden, es wird sich aber bey genauer Ueberlegung auch finden, daß sich dieses, so lange man beym Allgemeinen stehen bleibt, sehr wohl behaupten lasse, und am allerwenigsten steht daher wegen der aus jener Behauptung hier zu ziehenden Folgen etwas zu befürchten. Wenn also die Entstehungsart einer nicht absoluten Zahl aus der ersten absoluten Einheit gegeben ist, so muß entweder dabey die zufällige Bestimmung ausdrücklich angezeigt werden, wodurch die gedachte Zahl zu einer nicht absoluten Zahl wird, oder es wird diese Zahl durch die gedachte Entstehungsart nicht

genau

genau bestimmt; und ist die erwähnte zufällige Bestimmung bereits gegeben, so bleibt in Ansehung der Entstehungsart der Zahl aus der ersten absoluten Einheit nichts weiter anzuzeigen übrig, als wie vielmal man diese zu nehmen habe.

14. In einem Logarithmischen Systeme werden nun alle Zahlen als aus der Basis durch die Erhebung zu Dignitäten und die Ausziehung der Wurzeln entstanden betrachtet, und die Exponenten, welche jedesmal anzeigen, wie man die Basis durch die Erhebung zu Dignitäten und die Extraction der Wurzel verändern müsse, um gegebene Zahlen zu finden, die Logarithmen dieser Zahlen genannt. Dabey nimmt man die Basis der Bequemlichkeit wegen größer als die Einheit an, so daß die Logarithmen aller Zahlen, die größer als die Einheit sind, positiv, und die Logarithmen aller ächten Brüche negativ werden. Wird nun außerdem die Basis auch absolute angenommen, so ist der Logarithme hinlänglich, um jede Zahl genau zu bestimmen, weil dann jede dieser Zahlen auch absolute genommen werden muß; legt man aber eine nicht absolute Zahl zum Grunde, so führt jeder Logarithme $\pm m$, insbesondere, wenn man ihn im

$\pm \frac{nm}{n}$ verwechselt, auf mehr denn eine Zahl, und es wird

also dadurch bloß die Zifer dieser Zahlen, nicht aber die Einheit oder das Zeichen bestimmt, welches man sich dabey gedenken muß, um sie vollkommen zu kennen. Wenn also eine Zahl durch ihren Logarithmen gegeben wird, so findet man, wenn man die Basis nach diesem Logarithmen behandelt, am Ende weiter nichts, als wie ihre absolute Zifer aus der ersten absoluten Einheit durch Wiederholuug und Theilung derselben hervorgebracht werden kann; über die Einheit, welche man sich dabey gedenken soll, sagt der Logarithme nichts, und eben deswegen sind bloß die absoluten Zahlen

durch

durch die Basis und den Logarithmen vollkommen bestimmt, weil man die Einheit schon zum voraus kennt, worauf sie sich beziehen.

15. Um sich dieses noch deutlicher zu machen, so stelle man sich die Zahlen nach folgendem Schema vor.

$$0\left\{\begin{array}{llllll} +1\sqrt{-1}, & +2\sqrt{-1}, & +3\sqrt{-1}, & +4\sqrt{-1}, & +5\sqrt{-1}, & +\ldots\ldots \\ +1, & +2, & +3, & +4, & +5, & +\ldots\ldots \\ 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & \ldots\ldots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & \ldots\ldots \\ -1\sqrt{-1}, & -2\sqrt{-1}, & -3\sqrt{-1}, & -4\sqrt{-1}, & -5\sqrt{-1}, & -\ldots\ldots \end{array}\right\}\infty$$

Nach demselben sind alle Zahlen zwischen den Grenzen 0 und ∞ enthalten. Ferner kann man, wenn man bald diese bald jene Einheit annimmt, jede Zahl als eine Menge von Einheiten ansehen, und z. B. $+5\sqrt{-1}$ als das Fünffache von $+1\sqrt{-1}$, $+5$ als das Fünffache von $+1$, 5 als das Fünffache von 1, -5 als das Fünffache von -1, und $-5\sqrt{-1}$ als das Fünffache von $-1\sqrt{-1}$ betrachten. Aber eben sowohl läßt sich drittens jede Zahl als aus der ersten absoluten Einheit entstanden annehmen, indem man jedesmal die unter oder über ihr stehende absolute Zahl auf die gewöhnliche Art aus dieser Einheit hervorbringen, und dann hieraus jene Zahl durch Hinzusetzung des Zeichens oder des Namens, wodurch sie sich unterscheidet, erhalten kann. Endlich läßt sich jede absolute Zahl entweder genau oder näherungsweise aus jeder andern absoluten Zahl durch die Erhebung zu Dignitäten und die Ausziehung der Wurzeln erhalten, und jede nicht absolute Zahl, ihrer Zifer nach, aus eben dieser Zahl und auf eben diese Art entstanden gedenken; so daß man sich also auch jede nicht absolute Zahl als aus jeder beliebig angenommenen absoluten Zahl durch Veränderung derselben nach irgend einem Exponenten, und durch Hinzusetzung des sie unterscheidenden Zeichens oder Namens zu dem durch diese Operation gefundenen hervorgebracht vorstellen kann.

16. Will man die positiven und negativen und die unmöglichen Zahlen von der Form $x\sqrt{-1}$ nicht auf diese Art aus einer absoluten Basis ableiten, so kann man auch eine positive oder negative Zahl zur Basis annehmen. Aber wenn man dieses thut, so kann man allemal $+x$, $-x$, $+x\sqrt{-1}$ und $-x\sqrt{-1}$ durch eine und dieselbe Operation aus der angenommenen Basis hervorbringen, und es wird also alsdann durch die Basis und den Exponenten bloß x genau bestimmt, und es bleibt ungewiß, ob dasselbe positiv oder negativ sey, und ob es sich auf eine mögliche oder auf eine unmögliche Einheit beziehe. Man mag also die Basis annehmen, wie man will, so ist man aus dem Logarithmen einer Zahl weiter nichts im Stande zu schließen, als wie groß dieselbe in Vergleichung mit der Einheit sey, wovon sie als ein Vielfaches betrachtet werden kann, aber dieses zeigt denn auch der Logarithme, ohngeachtet er uns über die gedachte Einheit in einer völligen Ungewißheit läßt, jedesmal genau und richtig an. Und da $\pm x\sqrt{-1} : \pm 1\sqrt{-1} = \pm x : \pm 1 = x : 1$ ist, so kommt man hierdurch wieder auf den Satz zurück, daß die Zahlen $\pm x\sqrt{-1}$, $\pm x$ nicht mehr als einen Logarithmen, und zugleich, daß sie denselben Logarithmen haben, der der absoluten Zahl x zukommt.

17. Die Basis als bekannt vorausgesetzt, lehrt also der Logarithme einer Zahl weiter nichts, als wie groß diese Zahl sey, aber dies allemal; denn wenn die Basis größer als die Einheit angenommen worden ist, so ist bekannt, daß die Logarithmen mit den Zahlen, zu welchen sie gehören, wachsen und abnehmen. Es hängt folglich auch jeder Logarithme

nicht

nicht von der Beschaffenheit, sondern bloß von der Größe der Zahl ab, zu welcher er gehört, und wenn die Beschaffenheit einer Zahl auf die Bestimmung des Logarithmen Einfluß haben soll, so muß sie eine solche Beschaffenheit seyn, daß sie auch als eine Größen-Bestimmung gedacht werden kann. Ist dieses, so ist der gedachte Einfluß nicht nur möglich, sondern er muß sich auch allemal äußern, so oft man die erwähnte Vorstellung zum Grunde legt, aber eben so auch mit dieser Vorstellung zugleich wieder verschwinden. Hier frägt sich also: Kann man die durch die Zeichen + und — und durch die Benennungen positiv und negativ ausgedruckten zufälligen Beschaffenheiten der Zahlen auch als Größen-Bestimmungen ansehen? und wie wird, wenn dieses möglich ist, die Größe der Zahlen durch die gedachten Zeichen und Benennungen bestimmt? Auf der Beantwortung dieser Frage beruhet, so viel ich einsehe, durchaus, die Möglichkeit der Wegräumung der Absatz 11 erwähnten Schwierigkeiten, und es wird also der Mühe nicht unwerth seyn, dieselbe zu untersuchen.

18. Gewöhnlich macht man zwischen den absoluten und positiven Zahlen keinen Unterschied, und stellt sich dann die negativen Zahlen als aus den positiven durch fortgesetzte Subtraction der 1 vor. Dabey findet man kein Bedenken, die positiven Zahlen größer und die negativen Zahlen kleiner als 1 zu nennen, und macht also hier schon das Zeichen — und die Benennung negativ zu Bezeichnungen einer Größen-Bestimmung. Auch muß man gestehen, daß diese Vorstellung von den negativen Zahlen als eine relative Vorstellung behandelt, nicht nur keine Irrthümer erzeuge, sondern selbst öfters zur leichtern und schnellern Entdeckung der wahren Beschaffenheit der Größen diene. Aber man rede nicht relative sondern absolute von Größen, die kleiner seyn

sollen als nichts; was läßt sich dann für ein Begriff fassen? Wie also wenn man sich die negativen Zahlen, wie auch schon mehrere bey andern Gelegenheiten auf den Gedanken gefallen sind, ebenfalls größer als das Unendliche denken könnte? Eine Größe, die in einer und eben derselben Rücksicht kleiner als nichts und größer als das Unendliche seyn sollte, wäre freylich ein Widerspruch; allein wenn man die negativen Größen in einer Rücksicht kleiner als nichts, und in einer andern größer als das Unendliche nennt, so kann ja das sehr wohl mit einander bestehen. Auch läßt sich allerdings nicht leugnen, daß die Vorstellung der negativen Zahlen als größer wie das Unendliche, vorausgesetzt, daß sie statt finden kann, der Natur der relativen Vorstellungen gemäß, in Schwierigkeiten verwickele, sobald man sie unter andern Umständen gebrauchen will, als unter solchen, wo ihre Gültigkeit dargethan ist; allein das macht denn doch diese Vorstellung nicht an und für sich und unter allen Umständen verwerflich. Euler verwirft sie im ersten Theile seiner Anleitung zur Differential-Rechnung im zweyten Capitel im 100 und 104ten und den folgenden §§, allein wie nachher gezeigt werden soll, mit Unrecht. Also zur Untersuchung der Frage, ob man, und unter was für Umständen man die negativen Größen größer als das Unendliche nennen könne?

19. So wie alle angebliche absolute Zahlen zwischen 0 und ∞ enthalten sind, so muß man sich solches auch von den positiven und negativen Zahlen vorstellen, und zwar so, daß man das positive und negative Unendliche eben so wohl als die positive und negative 0 zusammenfallen läßt. Eine ähnliche Beschaffenheit haben z. B. die Tangenten der Winkel. Die positiven und negativen fangen beyde von 0 an, und sobald sie unendlich groß werden, so sind sie es so-

wohl

wohl auf der positiven als auf der negativen Seite. Denkt man sich also die positiven und negativen Zahlen in ihrer Folge nach diesem Schema:

$$0\begin{cases} +1,\ +2,\ +3,\ +4,\ +5,\ +6,\ +7+\ldots\ldots\ldots \\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ -6,\ -7-\ldots\ldots\ldots \end{cases}\infty$$

so kann man von den positiven Zahlen zu den negativen, wenn man nicht durch die Veränderung des Zeichens + und — unmittelbar von jenen zu diesen übergehen will, theils durch die Grenze o, theils durch die Grenze ∞ kommen, und es liegen also die negativen Zahlen, von den positiven an gerechnet, nicht nur jenseits o, sondern auch jenseits des Unendlichen. Nun kann man sich die Größe, die einer Zahl in Vergleichung mit einer andern zukommt, wenn beyde durchaus von einerley Art sind, nach der Entfernung vorstellen, in welcher jene von dieser entweder nach der Seite der o oder nach der Seite des ∞ zu steht, und thut man es, so nennt man jede Zahl in Vergleichung mit jeder andern desto kleiner, je weiter sie von ihr nach der Seite von o, und desto größer, je weiter sie von ihr nach der Seite des Unendlichen hin entfernt ist. Wenn man also die Zeichen + und — nicht als Zeichen des Positiven und Negativen, sondern als Größen-Bestimmungen ansieht, und dies geschiehet, wenn man die positiven Zahlen und die absoluten nicht von einander unterscheidet, und bey der Vergleichung zweyer entgegengesetzter Zahlen mit einander allemal von der positiven ausgeht: so ist allerdings jede negative Zahl nicht nur kleiner als nichts, sondern auch größer als das Unendliche, und dabey zugleich jedesmal um weniger kleiner als nichts, als sie größer denn das Unendliche ist.

20. Legt man nun entweder eine absolute oder eine mit + bezeichnete Zahl, die größer als 1 ist zum Grunde, und verändert diese durch die Erhebung zu Dignitäten und die Extraction der Wurzeln, so daß man die Exponenten so-

wohl der Dignitäten als der Wurzeln, welche man sucht, immer größer und größer werden läßt: so erreicht man auf dem Wege der Erhebung zu Dignitäten das Unendliche, und auf dem Wege der Extraction der Wurzel die o nie, so lange der Exponent eine angebliche Zahl bleibt, sondern erst, wenn dieser Exponent unendlich und im letztern Falle zugleich negativ wird. Will man also auf diesem Wege über das Unendliche und über o hinaus gehen, so muß man die zum Grunde gelegte Zahl nach einem mehr als unendlichen Exponenten verändern, wobey man denn, wenn dieser Exponent positiv ist, über das Unendliche, und wenn er negativ ist, über o hinauskommt; und will man auf beyden Wegen eine und dieselbe Zahl finden, so muß, da jede bestimmte Zahl näher bey o als bey dem Unendlichen liegt, der positive Exponent den negativen in Ansehung der Größe übertreffen, obgleich beyde mehr als unendlich seyn müssen.

21. Betrachtet man also die mit — bezeichneten Zahlen so, daß man das Zeichen — nicht als das Zeichen des Negativen ansieht, sondern dadurch die Größe der Zahl, vor welcher es steht, in Vergleichung mit den absoluten Zahlen, bestimmt werden läßt: so läßt sich jede negative Zahl auf eine zwiefache Art, nemlich theils als eine mehr denn unendlich kleine, und theils als eine mehr denn unendlich große Zahl gedenken; und nimmt man hierzu die Bedeutung, die dieselbe alsdann hat, wenn das Zeichen — als das Zeichen des Negativen eigentlich genommen wird, so stellt jede negative Zahl eine dreyfache Größe, eine endliche, und zwey mehr als unendliche, der Größe nach unendlich verschiedene, Zahlen vor. Uebrigens kommt es hier auf keine Weise darauf an, ob jede negative Zahl diese beyden letzten Bedeutungen allemal haben könne? es ist hinläng-

lich,

lich, daß gezeigt worden ist, mit was für Vorstellungsarten diese Bedeutungen zusammenhängen, und es versteht sich von selbst, daß sie mit jenen Vorstellungsarten zugleich eintreten und verschwinden. Das Bedingte ist nur dann brauchbar, wenn die Bedingungen, welche es voraussetzt, wirklich da sind, aber dann wird es selbst unentbehrlich; und es wäre sehr inconsequent und so gehandelt, wie man es von Mathematikern nicht erwarten darf, wenn etwas Bedingtes deswegen allgemein verworfen werden sollte, weil es nicht anders als unter den erforderlichen Bedingungen gebraucht werden darf.

22. Um nun das Bisherige zur Auflösung der S. 524. 525. Absatz 11. angeführten Schwierigkeiten anzuwenden, so beruhet die Gültigkeit der Formel

$$d.lx = \frac{dx}{x}$$

für jeden Werth von x auf dem Satze, daß $l + x = l - x = l + x\sqrt{-1} = l - x\sqrt{-1}$ sey, (S. 522. 523. Abs. 10.) und damit ist folgender, den auch der vollständig deutliche Begriff von den Logarithmen an die Hand giebt, unzertrennlich verbunden, daß der Logarithme jeder nicht absoluten Zahl weder von dem bey ihr befindlichen Zeichen noch von ihrem Namen, sondern lediglich von der Größe der absoluten Zifer, welche sie enthält, abhange. Unter dieser Voraussetzung darf man sich also auch nur die Formeln

$$l(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \frac{x^6}{6} \pm \text{etc.}$$

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \frac{2x^9}{9} + \text{etc.}$$

durch die Differential Rechnung erweitert vorstellen, und ist folglich auch durch sie bloß unter der Bedingung berechtiget, in jene Formeln jeden Werth von x zu bringen, daß die dabey für $1 \pm x$ oder $\frac{1+x}{1-x}$ sich ergebende Zahl, oder diejenige, deren Logarithmen man sucht, als eine absolute Zahl betrachtet werde.

23. Dieses vorausgesetzt, so kann zuvörderst die Einschränkung der Formeln

$$l(1 \pm x) = \pm x - \frac{x^2}{2} \pm \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} \pm \frac{x^5}{5} - \text{etc.}$$

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{3} + \frac{2x^5}{5} + \frac{2x^7}{7} + \text{etc.}$$

welche ich ihnen in dem Zusatze B zum siebenten Capitel gegeben habe, sehr wohl mit der Erweiterung ihrer Grenzen bestehen, welche sie durch die Differential-Rechnung erhalten. Hiernach kann man zwar in jenen Formeln für x jede Größe, sie mag positiv oder negativ, reell oder imaginär seyn, setzen, und man ist dabey insbesondere in der Formel

$$l(1-x) = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} - \text{etc.}$$

ganz und gar nicht an einen absoluten Bruch-Werth für x gebunden. Allein nach dem vorhergehenden 22sten Absatze muß dabey doch immer die für $1 \pm x$ und $\frac{1+x}{1-x}$ sich ergebende Zahl als eine absolute Zahl angesehen, und folglich, wenn sie das Zeichen — vor sich hat, solches bey ihr nicht als das Zeichen des Negativen, sondern als ein Zeichen einer Größen-Bestimmung betrachtet werden. Man findet daher in diesem Falle nicht den Logarithmen einer negativen Zahl im gewöhnlichen Verstande, sondern einer absoluten Zahl, die man sich entweder jenseits o oder jenseits des Unendlichen liegend, und also entweder kleiner als o oder größer als das Unendliche denken muß. Da nun in dem Zusatze B zum siebenten Capitel, so wie in der gemeinen Algebra immer, bloß von solchen Zahlen die Rede seyn konnte, die zwischen o und ∞ fallen, und die Differential-Rechnung für diesen Fall die daselbst festgesetzten Einschränkungen nicht im mindesten aufhebt: so ist ja das nichts auffallendes und noch weniger etwas widersprechendes, daß die Differential-Rechnung bey veränderten Umständen einen andern, oder eigentlich bey einem erweiterten Ziele einen breitern Weg zu gehen erlaubt.

24. Zum andern ist nun sehr leicht zu erklären, warum man für jede negative Zahl $-m$, wenn man einmal $1-x=-m$, und dann $\frac{1+x}{1-x}=-m$ setzt, nach den Formeln

$$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\text{rc.}$$

$$l\frac{1+x}{1-x}=2x+\frac{2x^3}{3}+\frac{2x^5}{5}+\frac{2x^7}{7}+\text{rc.}$$

einen doppelten unendlich großen Logarithmen findet. Die erste dieser Formeln gilt nemlich nach S. 487. Abs. 10. für die Erfindung der Logarithmen der ächten Brüche, und die andere zwar überhaupt für die Erfindung der Logarithmen jeder absoluten Zahl, allein mit dem Unterschiede, daß, wenn x positiv wird, der gefundene Logarithme zu einer Zahl, die größer als 1, und wenn x negativ wird, zu einem ächten Bruche gehöret. Setzt man also $1-x=-m$, so findet man aus

$$l(1-x)=-x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\frac{x^5}{5}-\text{rc.}$$

wenn man darin $x=m-1$ macht, den Logarithmen, der zu $-m$ als einem Bruche gehört, der kleiner ist als o;

und setzt man $\frac{1+x}{1-x} = -m$, so wird $x = \frac{m+1}{m-1}$, und also, wenn m größer als 1 ist, allemal x positiv, und man findet daher in diesem Falle nach

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2x^3}{5} + \frac{2x^5}{6} + \frac{2x^7}{7} + \text{rc.}$$

wenn man darin $x = \frac{m+1}{m-1}$ macht, den Logarithmen, der zu $-m$ gehört, wenn dasselbe als eine Zahl betrachtet wird, die jenseits des Unendlichen liegt, und also als mehr denn unendlich groß angesehen werden muß.

25. Drittens ist nun auch leicht einzusehen, warum man nach keiner von den angeführten Formeln den unmöglichen Logarithmen, den nach den gewöhnlichen Vorstellungen jede negative Zahl haben kann, und eben so wenig den reellen Logarithmen, der ihr nach meiner Vorstellungsart zukommt, findet. Hätte nemlich auch jede negative Zahl einen imaginären Logarithmen, obgleich nach der im Zusatze B zum siebenten Capitel enthaltenen Theorie von den Logarithmen solches nicht ist: so müßte der Grund von der Unmöglichkeit dieses Logarithmen in der durch das Zeichen — ausgedruckten Beschaffenheit seiner Zahl liegen, und er selbst also nicht bloß von der Größe, sondern auch von der Beschaffenheit seiner Zahl abhängen. Allein nach Absatz 22 findet man nach keiner von den bekannten Formeln, selbst wenn sie durch die Differential-Rechnung die möglich größte Ausdehnung erhalten haben, den Logarithmen einer Zahl weiter, als in so fern er von ihrer Größe abhängt. Aus eben diesem Grunde kann man durch das im vorhergehenden Absatze beschriebene Verfahren nach jenen Formeln den reellen Logarithmen nicht finden, den jede negative Zahl nach meiner Vorstellungsart hat. Denn sobald $-m = 1 - x$

oder

oder $= \frac{1 + x}{1 - x}$ gesetzt wird, um den daraus sich ergebenden Werth von x in den gedachten Formeln zur Erfindung des Logarithmen von $-m$ zu brauchen, so hört $-m$ auf eine negative Zahl zu seyn, und erhält dafür eine andere zwiefache vorhin angegebene Bedeutung. Der einzige Weg, den Logarithmen von $\pm x$ und $\pm x\sqrt{-1}$ zu finden, bleibt daher der, daß man lx suchet, und diesen Logarithmen nach der obigen Theorie auch als den Logarithmen von $\pm x$ und $\pm x\sqrt{-1}$ und überhaupt von allen den Größen betrachtet, die mit $\pm x$ aus der angenommenen Basis nach einerley Exponenten zugleich hervorgebracht werden können.

26. Endlich stellt nach Absatz 21 jede negative Zahl eine dreyfache Größe, eine endliche und zwey mehr als unendliche der Größe nach unendlich verschiedene Zahlen vor. Von diesen letzten ist ferner die eine kleiner als o, und die andere größer als das Unendliche, und diese letzte, so weit man hier vergleichen kann, um viel mehr größer denn das Unendliche, als jener kleiner denn o ist. Hiermit stimmt aber das vollkommen überein, daß jede negative Zahl drey Logarithmen, einen endlichen und zwey unendlich große, und von diesen den einen negativ und den andern positiv, und den positiven größer als den negativen hat, und sonach wären alle S. 524. 525. angeführte Schwierigkeiten gehoben.

27. Es hält schwer, eine, in mehrern Stücken wenigstens, neue Theorie, so lange man dieselbe nur bloß nach seiner eigenen Vorstellungsart zu prüfen, und noch nicht Gelegenheit gehabt hat, den belehrenden Tadel der Kenner darüber zu vernehmen, und darnach dieselbe weiter zu vervollkommnen, so vorzutragen, daß der Ausdruck nicht manche Unbequemlichkeiten herbeyführe. Ich empfinde

dieses

dieses hier sehr lebhaft und versichere daher, daß ich jeder Belehrung offen mich erhalten, ja jede gründliche Beurtheilung des Bisherigen, so vieler Fehltritte sie mich auch überführen mag, wofern sie nur gründlich und also auch belehrend ist, mit dem aufrichtigsten Danke erkennen werde. Daß ich mich an mehrern Orte kürzer hätte fassen können, räume ich zum voraus ein; allein da das ganze Werk, welches ich hier bearbeite, obgleich von einem Meister, dennoch für Anfänger geschrieben ist, so habe ich mir bey dieser Abhandlung eben dergleichen als meine Leser vorgestellt, und hoffe in dieser Rücksicht, wegen der hier und da sonst zu großen Ausführlichkeit, Verzeihung. Jetzt will ich die bisherige Untersuchung mit ein Paar Anmerkungen beschließen.

28. Ein Hauptsatz ist es sowohl in diesem Zusatze als in dem Zusatze B zum vorhergehenden Capitel, daß man das Absolute von dem Positiven unterscheiden, und insbesondere auch die absoluten Zahlen von den positiven trennen müsse. Hierdurch leugne ich nicht, daß es Fälle giebt, wo diese Unterscheidung überflüßig seyn kann, ich räume dergleichen vielmehr in Menge ein, und lasse sehr gern jene Unterscheidung allenthalben für unnütz gelten, wo man die Zeichen + und — eben sowohl als Zeichen der Addition und Subtraction betrachten, als sie für Zeichen des Positiven und Negativen nehmen kann. Indeß dies zugegeben, so bleibt dieselbe in vielen andern Fällen doch schlechterdings nothwendig, und das nicht bloß bey Anwendung der Arithmetik auf die Geometrie, oder beym Gebrauche derselben in der angewandten Mathematik, sondern auch in der Arithmetik selbst, z. B. so oft Zahlen zu Dignitäten erhoben und Wurzeln ausgezogen werden sollen. Unterscheidet man das Absolute nicht von dem Positiven, so muß man auch alle

von

von den absoluten Zahlen bewiesene Sätze in eben dem Umfange von den positiven bewiesen annehmen, und dann müssen sich, die sich von selbst verstehenden Modificationen dieser Sätze vorausgesetzt, auch die negativen Zahlen vollständig nach ihnen behandeln lassen. Aber sucht man nun z. B. die Quadratwurzel aus -4 nach dem Binomischen Lehrsatze, indem man $-4 = 1 - 5$ setzt, und darauf den Ausdruck $(1-5)^{\frac{1}{2}}$ entwickelt, so erhält man eine ohne Ende fortlaufende Reihe von lauter möglichen Größen, die folglich da $\sqrt{-4} = \pm 2\sqrt{-1}$ ist, $= \pm 2\sqrt{-1}$ sollte gesetzt werden können. Eben so ist $\frac{1}{(1-2)^2} = 1$, nach

$$\frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + 5x^4 + \text{etc.}$$

aber gesucht, findet man

$$\frac{1}{(1-2)^2} = 1 + 4 + 12 + 32 + 80 + \text{etc.}$$

und doch giebt diese Reihe auch bey der Hinzufügung ihrer Ergänzung nie 1. Daß man sich, wenn man bedingte Sätze als unbedingte behandelt, nicht über die paradoxen und falschen Resultate zu wundern habe, welche man dabey findet, ist freylich etwas sehr bekanntes; allein wenn man die Quelle dieser paradoxen und falschen Folgerungen nicht kennt, so vermögen sie gleichwohl große Schwierigkeiten zu erregen: und warum sollte man also nicht früh und gleich beym Anfange der Betrachtung der entgegengesetzten Größen darauf aufmerksam machen, daß nicht alles, was von den absoluten Zahlen erwiesen ist, schon deswegen und eben so, auf die positiven und negativen Größen angewandt werden dürfe? In dem Zusatze B zum vierzehnten Capitel Capitel werde ich von der Unterscheidung des Absoluten von dem Positiven bey der Bestimmung der Wurzeln der Gleichungen

chungen, in welchen die Sinus, Cosinus rc. vielfacher Winkel mit den Sinus, Cosinus rc. der einfachen Winkel verglichen werden, eine andere nicht ganz unwichtige Anwendung machen.

29. Der Satz, daß jeder Logarithme bey einer nicht absoluten Basis zu zwey einander entgegengesetzten sonst gleichen, und außerdem noch zu einer unbestimmten Menge unmöglicher Größen gehöre, (S. 492. 493. Abs. 17.) ist, so viel ich weiß, noch von Niemanden in der Lehre von den Logarithmen behauptet worden; allein das ist ein ganz allgemein bekannter und gebrauchter Satz, daß $(\pm a)^{\frac{nm}{n}}$, wenn man für n jede Zahl setzen darf, eine unbestimmte Menge von Werthen enthalte, und jener sagt im Grunde durchaus eben dasselbe. Wenn man indeß jede auch nicht absolute Zahl auf die Absatz 15. beschriebene Art aus irgend einer absoluten Zahl durch die Erhebung zu Dignitäten und die Ausziehung der Wurzeln entstehen läßt, und dabey die Bedeutung der Logarithmen nach Absatz 16. sich gedenkt, so gehören auch bey einer absoluten Basis zu jedem Logarithmen eben so viel Zahlen als bey einer nicht absoluten Basis und vielleicht ist es noch zweckmäßiger, sich die Beschaffenheit der Logarithmen auf diese letzte Art vorzustellen.

30. Als sich mir der im vorhergehenden Absatze nochmals gedachte Satz bey der Ausarbeitung des Abschnitts, von den Logarithmen, in meinen kürzlich erschienenen Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra zuerst darbot, denn ungesucht und von selbst stellte er sich mir bey der Voraussetzung, daß die absoluten Zahlen nicht immer mit den positiven verwechselt werden können, dar: so dachte

ich

ich nicht daran, daß er in der Differential-Rechnung bey dem Beweise des Satzes, daß für jeden Werth von x das Differential des Logarithmen davon $d.lx = \frac{dx}{x}$ sey, als ein unentbehrlicher Satz erscheinen würde. Ich nahm ihn auf, weil er sich mir von selbst darbot, und weil er mir die Schwierigkeiten in der Lehre von den Logarithmen zu heben schien, derer ich in der Vorrede zu den erwähnten Anfangsgründen der Buchstabenrechnung und Algebra gedacht habe. Ist indeß das richtig, was ich über den gewöhnlichen Beweis des Satzes, daß $d.lx = \frac{dx}{x}$ und zwar für jeden Werth von x sey, Absatz 6 — 8 gesagt habe, so erhält er dadurch einen Grad von Wichtigkeit mehr, und um so mehr wünschte ich daß Männer von mehrern Kenntnissen als ich sich herablassen mögten, meine Vorstellungen gründlich zu untersuchen. Auch erstreckt sich sein Einfluß, so wie auch der Einfluß der Unterscheidung, welche mich auf ihn geführt hat, noch weiter als ich es hier aus einander setzen darf, und so weit ich deutlich sehe, wird gleichwohl dadurch kein wahrer und brauchbarer Satz umgestoßen, sondern nur in seine ihm zukommende Grenzen eingeschränkt, dagegen aber viele Schwierigkeiten aus dem Wege geräumt.

31. Diejenigen, die die negativen Zahlen sonst schon theils als mehr denn unendlich klein, theils als mehr denn unendlich groß haben betrachten wollen, sind dabey auf den Gedanken gefallen, einen Unterschied zwischen den negativen Zahlen von der Form $-1, -2, -3$ rc. und den negativen Zahlen von der Form $\frac{+1}{-1}, \frac{+2}{-2}, \frac{+3}{-3}$ rc. zu machen. Es ginge solches wohl an, wenn man nicht vom

An-

Anfang an gewöhnt würde, in der ganzen Mathematik $\frac{+1}{-1} = -1$, $\frac{+2}{-1} = -2$ ꝛc. anzunehmen, und dann müßte man doch auch der Analogie wegen die letzten Zahlen durch $\frac{-1}{+1}$, $\frac{-2}{+1}$, $\frac{-3}{+1}$ ꝛc. bezeichnen. Allein aus dem angeführten Grunde hat Euler im ersten Theile seiner Differential-Rechnung §. 105. Recht, diese doppelte Bezeichnung durchaus zu verwerfen, nur hätte er nicht sich deswegen auch zugleich wider die Vorstellung von den negativen Zahlen, die sie freylich veranlaßt, aber nicht nothwendig erzeugt hatte, als wider eine durchaus unstatthafte Vorstellung erklären, und so zu sagen das Kind mit dem Bade ausschütten sollen. Ich fürchte wenigstens eine ähnliche Verhaltungsart von meinen künftigen Beurtheilern nicht.