Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

IX. Zusätze zum neunten Capitel.

IX.

Zusätze zum neunten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von der Erforschung der trinomischen Faktoren.

1. Vorläufig von der Nothwendigkeit dieser Lehre für die Erfindung der imaginären Faktoren der Funktionen, §. 143. 144.
2. Allgemeine Regel zur Erforschung der trinomischen Faktoren, §. 145 —— 149.
   a. Vorbereitung dazu, §. 145.
   b. die gedachte Regel selbst, §. 146 — 149.
      α. für die gegebenen Funktionen in unveränderter Form, §. 146.
      β. für diese Funktionen, nachdem sie zuvor zur bequemern Erreichung des vorgesetzten Endzwecks abgeändert worden, §. 147 — 149.
         aa. Anleitung zu dieser Abänderung der Funktionen, §. 147 — 149.
         bb. Art und Weise, wie man aus den abgeänderten Funktionen die gesuchten trinomischen Faktoren findet, §. 148. 149, am Ende.
3. Erläuterung der gegebenen Regel an einigen öfters vorkommenden Funktionen, §. 150 — 164.

a. an algebraischen, §. 150 — 154.

α. solchen, die unter die Form $a^n + z^n$, §. 150.

β solchen, die unter die Form $a^n - z^n$, §. 151 } §. 152.

γ. solchen, die unter die Form $a^{2n} - 2 a^n z^n . \cos. g + z^{2n}$, §. 153.

δ. solchen, die unter die Form $\alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n}$, ꝛc. gehören, §. 154.

b. an transcendenten Funktionen, §. 155 — 164. Die hier betrachteten Funktionen sind lauter unendliche Reihen, welche Exponential-Größen ausdrucken, nemlich

α. die Exponential-Größe e^x, §. 155.

β. die Exponential-Größe $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$, §. 156.

γ. die Exponential-Größe $\frac{e^x + e^{-x}}{2}$, §. 157.

δ. die Exponential-Größe $\frac{e^{z\sqrt{-1}} - e^{-z\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$ und $\frac{e^{z\sqrt{-1}} + e^{-z\sqrt{-1}}}{2}$, §. 158.

ε. die Exponential-Größe $e^x - 2 \cos. g + e^{-x}$, §. 159.

ζ. die Exponential-Größe $e^{b+x} \pm e^{c-x}$, §. 160—164.

Hier wird

aa. $\frac{e^{b+x} \pm e^{c-x}}{e^b \pm e^c}$ in eine unendliche Reihe von Faktoren aufgelöset, §. 160. 161.

bb. dann darin $b = o$, und c theils positiv theils negativ gesetzt, §. 162, und die hierdurch sich ergebenden Reihen

cc. auf den Kreis, und zwar auf eine doppelte Art angewandt, §. 163. 164.

B. Zusatz zu §. 153.

1. Die am Ende des vorstehenden § von mir gedachte Anwendung der Eulerischen Methode die trinomischen Faktoren zu erforschen, ist folgende. Wenn φ einen Winkel bedeutet, und man

$$\cos.\varphi + \sqrt{-1}.\sin.\varphi = p, \text{ und } \cos.\varphi - \sqrt{-1}.\sin.\varphi = q$$

setzt, so wird

$$pq = 1;\ p^n = \cos.n\varphi + \sqrt{-1}.\sin.n\varphi;\ q^n = \cos.n\varphi - \sqrt{-1}.\sin.n\varphi$$

folglich

$$p^n + q^n = 2\cos.n\varphi;\text{ und } q^n - q^n = 2\sqrt{-1}.\sin.n\varphi;$$

und man ist also im Stande, durch Auflösung der Formeln $p^n + q^n$, und $p^n - q^n$ in ihre Faktoren die Sinus und Cosinus vielfacher Winkel durch Produkte auszudrucken.

2. Nimmt man nemlich zuvörderst die Formel

$$p^n + q^n = 2\cos.n\varphi$$

so hat dieselbe, wenn n eine ungerade Zahl ist, den einfachen Faktor $p + q - 2\cos.\varphi$, so daß in diesen Fällen $\cos.\varphi$ ein Faktor des $\cos.n\varphi$ ist. Läßt man nun die Formel

$$pp - 2pq\cos.\omega + qq$$

eine allgemeine Trinomie für die übrigen Faktoren seyn, so daß $p^n + q^n$ verschwindet, wenn $pp - 2pq\cos.\omega + qq = 0$ wird: so hat man daher

$$p = q(\cos.\omega + \sqrt{-1}.\sin.\omega) \text{ oder } p = q(\cos.\omega - \sqrt{-1}.\sin.\omega)$$

und folglich

$$p^n = q^n(\cos.n\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.n\omega)$$

Es muß demnach

$$q^n(\cos.n\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.n\omega) + q^n = 0, \text{ oder}$$

$$\cos.n\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.n\omega + 1 = 0$$

seyn, und hierdurch wird $\sin. n\omega = 0$, und $\cos. n\omega = -1$. Da also $\cos. n\omega = -1$ ist, so muß $n\omega$ entweder π, oder 3π, oder 5π, oder 7π, rc. seyn, und bedeutet daher i jede ungerade Zahl, so wird $n\omega = i\pi$, und $\omega = \frac{i\pi}{n}$, und der allgemeine doppelte Faktor der Formel $p^n + q^n$ ist

$$pp - 2pq. \cos. \frac{i\pi}{n} + qq.$$

3. Es läßt sich aber derselbe auf folgende Art verwandeln. Aus $p^n + q^n = 2 \cos. n\phi$ fließt $pp + qq = 2 \cos. 2\phi$, und durch diese Substitution wird, da $pq = 1$ ist,

$$pp - 2pq \cos. \frac{i\pi}{n} + qq = 2 \cos. 2\phi - 2 \cos. \frac{i\pi}{n}.$$

Ferner ist aus Capitel 8, §. 131. 4

$$\cos. b - \cos. a = 2 \sin. \frac{a+b}{2}. \sin. \frac{a-b}{2}, \text{ folglich}$$

$$\cos. 2\phi - \cos. \frac{i\pi}{n} = 2 \sin. (\frac{i\pi}{2n} + \phi) \sin. (\frac{i\pi}{2n} - \phi).$$

Hierdurch erhält man zum allgemeinen Faktor der Formel $p^n + q^n$

$$4 \sin. (\frac{i\pi}{2n} + \phi) \sin. (\frac{i\pi}{2n} - \phi)$$

und setzt man darin für i nach und nach die ungeraden Zahlen, so bekommt man

$$2 \cos. n\phi = 4 \sin. (\frac{\pi}{2n} + \phi). \sin. (\frac{\pi}{2n} - \phi). 4 \sin. (\frac{3\pi}{2n} + \phi).$$

$$\sin. (\frac{3\pi}{2n} - \phi). 4 \sin. (\frac{5\pi}{2n} + \phi). \sin. (\frac{5\pi}{2n} - \phi) \text{ rc.}$$

bis man überhaupt n Faktoren hat.

4. Es ist demnach

für

$$\begin{array}{l|l}
n=1 & 2\cos.\ \varphi = 2\sin.\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right) \\[2ex]
n=2 & 2\cos.\ 2\varphi = 2^2\sin.\left(\frac{\pi}{4}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{\pi}{4}+\varphi\right) \\[2ex]
n=3 & 2\cos.\ 3\varphi = 2^3\sin.\left(\frac{\pi}{6}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{\pi}{6}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{3\pi}{6}-\varphi\right) \\[2ex]
n=4 & 2\cos.\ 4\varphi = 2^4\sin.\left(\frac{\pi}{8}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{\pi}{8}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{3\pi}{8}-\varphi\right) \\
 & \qquad\qquad\quad \sin.\left(\frac{3\pi}{8}+\varphi\right) \\[2ex]
n=5 & 2\cos.\ 5\varphi = 2^5\sin.\left(\frac{\pi}{10}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{\pi}{10}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{3\pi}{10}-\varphi\right) \\
 & \qquad\qquad\quad \sin.\left(\frac{3\pi}{10}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{5\pi}{10}-\varphi\right) \\[2ex]
n=6 & 2\cos.\ 6\varphi = 2^6\sin.\left(\frac{\pi}{12}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{\pi}{12}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{3\pi}{12}-\varphi\right) \\
 & \qquad\qquad\quad \sin.\left(\frac{3\pi}{12}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{5\pi}{12}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{5\pi}{12}+\varphi\right)
\end{array}$$

und überhaupt

$$\cos.\ n\varphi = 2^{n-1}\sin.\left(\frac{\pi}{2n}-\varphi\right)\sin.\left(\frac{\pi}{2n}+\varphi\right)\sin.\left(\frac{3\pi}{2n}-\varphi\right)$$

$$\sin.\left(\frac{3\pi}{2n}+\varphi\right)\ \text{ꝛc.}$$

bis man n Faktoren hat. Man vergleiche hiermit das vierzehnte Capitel des ersten Theils der gegenwärtigen Einleitung, §. 242.

5. Behandelt man nunmehr die Formel

$$p^n - q^n = 2\sqrt{-1}.\ \sin.\ n\varphi$$

auf eine ähnliche Art, und nimmt man zum allgemeinen doppelten Faktor derselben wieder wie vorhin

$$pp - 2pq \cos.\omega + qq$$

an, so wird, wenn man denselben $= 0$ setzt, abermals $p = q(\cos.\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.\omega)$ und $p^n = q^n(\cos.n\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.n\omega)$ und es muß demnach

$$q^n(\cos.n\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.n\omega) - q^n = \cos.n\omega \pm \sqrt{-1}.\sin.n\omega - 1 = 0$$

und folglich

$$\sin.n\omega = 0, \text{ und } \cos.n\omega = 1$$

seyn.

6. Auf diese Art erkennt man, daß der Winkel $n\omega$ entweder 0, oder 2π, oder 4π, oder 6π, ꝛc. oder $2i\pi$ seyn muß, wenn i jede ganze Zahl bedeutet. Es ist also der allgemeine Faktor der Formel $p^n - q^n$

$$pp - 2pq\cos.\frac{2i\pi}{n} + qq = 2\cos.2\phi - 2\cos.\frac{2i\pi}{n}$$

und da derselbe in die beyden Faktoren

$$2\sin.(\frac{i\pi}{n} - \phi).\ 2\sin.(\frac{i\pi}{n} + \phi)$$

aufgelöset werden kann, und die Formel $p^n - q^n$, außerdem noch den einfachen Faktor

$$p - q = 2\sqrt{-1}.\sin.\phi$$

hat: so wird

$$\sin.n\phi = \sin.\phi.\ 2\sin.(\frac{i\pi}{n} - \phi).\ 2\sin.(\frac{i\pi}{n} + \phi)$$

und folglich

$$\sin.n\phi = \sin.\phi.\ 2\sin(\frac{\pi}{n} - \phi).\ 2\sin.(\frac{\pi}{n} + \phi).$$

$$2\sin.(\frac{2\pi}{n} - \phi).\ 2\sin.(\frac{2\pi}{n} + \phi).\ 2\sin.(\frac{3\pi}{n} - \phi) \text{ ꝛc.}$$

oder

$$\sin.n\phi = 2^{n-1}\sin.\phi.\sin.(\frac{\pi}{n} - \phi).\ \sin.(\frac{\pi}{n} + \phi).$$

$$\sin.(\frac{2\pi}{n} - \phi).\sin.(\frac{2\pi}{n} + \phi).\sin.(\frac{3\pi}{n} - \phi) \text{ ꝛc.}$$

bis

bis man n Faktoren hat. Man vergleiche hiermit Einleitung Cap. 14. §. 240.

7. Hieraus fließt

für

$n=1 \mid \sin.\ \phi = 2^0.\sin.\phi$

$n=2 \mid \sin.2\phi = 2\sin.\phi\sin.(\frac{\pi}{2}-\phi)$

$n=3 \mid \sin.3\phi = 4\sin.\phi\sin.(\frac{\pi}{3}-\phi)\sin.(\frac{\pi}{3}+\phi)$

$n=4 \mid \sin.4\phi = 8\sin.\phi\sin.(\frac{\pi}{4}-\phi)\sin.(\frac{\pi}{4}+\phi)\sin.(\frac{2\pi}{4}-\phi)$

$n=5 \mid \sin.5\phi = 16\sin.\phi\sin.(\frac{\pi}{5}-\phi)\sin.(\frac{\pi}{5}+\phi)\sin.(\frac{2\pi}{5}-\phi)$

$\sin.(\frac{2\pi}{5}+\phi)$

$n=6 \mid \sin.6\phi = 32\sin.\phi\sin.(\frac{\pi}{6}-\phi)\sin.(\frac{\pi}{6}+\phi)\sin.(\frac{2\pi}{6}-\phi)$

$\sin.(\frac{2\pi}{6}+\phi)\sin.(\frac{3\pi}{6}-\phi).$

2c.

8. Was den Gebrauch betrifft, den Euler an dem Orte, woher dieser Zusatz genommen ist, von den für sin. n z und cos. n z gefundenen Bestimmungen macht, indem er daraus durch Hülfe der Logarithmen und der Differentiation Formeln für die Tangenten und Cotangenten vielfacher Winkel ableitet, so muß ich ihn übergehen, weil er außer den Grenzen einer Einleitung in die Analysis des Unendlichen liegt.