Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

X. Zusätze zum zehnten Capitel.

urn:nbn:de:hbz:466:1-53541

X.

Zusätze zum zehnten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von dem Gebrauche der trinomischen Faktoren bey der Summirung der Reihen.

1. Vorläufig ein Hülfssatz, von dem Verhältnisse der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potestäten ihrer Wurzeln, §. 165. 166.
2. Summirung verschiedener unendlicher Reihen, §. 167 bis 183, nemlich

a. derer, die unter $1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} +$ ꝛc. begriffen sind, wenn n eine gerade Zahl bedeutet, §. 167, 168.

α. Darstellung der Summen dieser Reihe überhaupt, §. 167.

β. Darstellung derselben in einer mehr entwickelten Form, §. 168.

b. derer, die unter die Form $1 \pm \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} \pm \frac{1}{4^n} +$ ꝛc. und $1 + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{7^n} + \frac{1}{9^n} +$ ꝛc. gehören, wenn n eine gerade Zahl ist, §. 169, 170.

c. derer, deren allgemeine Form $\frac{1}{(n-m)^n} \mp \frac{1}{(n+m)^n}$

+

$$+ \frac{1}{(3n-m)^n} \mp \frac{1}{(3n+m)^n} + \frac{1}{(5n-m)^n} \mp \text{2c., oder}$$

$$\frac{1}{(m)^n} \mp \frac{1}{(2n-m)^n} + \frac{1}{(2n+m)^n} \mp \frac{1}{(4n-m)^n} + \text{2c. ist,}$$

so daß die obern Zeichen gelten, wenn n eine ungerade, und die untern, wenn es eine gerade Zahl bedeutet, §. 171 — 177.

α. Summirung dieser Reihen in ihrer allgemeinen Form, §. 171 — 174, nemlich

aa. der Reihen $\frac{1}{(n-m)^n} \mp \frac{1}{(n+m)^n} + \frac{1}{(3n-m)^n} \mp$ 2c. §. 171. 172.

bb. der Reihen $\frac{1}{m^n} \mp \frac{1}{(2n-m)^n} + \frac{1}{(2n+m)^n} \mp$ 2c. §. 173. 174.

β. Summirung verschiedener aus ihnen abgeleiteten besondern Reihen, §. 175 — 177, und zwar solcher, die aus ihnen entstanden sind,

aa. durch die Substitution $m = 1$, und $n = 2$, §. 175.

bb. durch die Substitution $m = 1$, und $n = 3$, §. 176, 177.

αα. aus der ersten allgemeinen Reihe, §. 176.

ββ. aus der andern, §. 177.

d. derer Reihen, die man aus den bey c angeführten durch die Addition und Subtraction derselben zu und von einander findet, §. 178 — 180.

α. Summirung der auf diese Art gefundenen allgemeinen Reihen, §. 178.

β. Summirung verschiedener aus ihnen abgeleiteten besondern Reihen, §. 179. 180.

aa. solcher, die man aus ihnen durch Setzung bestimmter Werthe für m und n erhält, §. 179.

bb. solcher, die man aus den hierdurch gefundenen Reihen durch Combination derselben ferner ableiten kann, §. 180.

e. derer Reihen, die man aus den bey d beschriebenen durch die Vereinigung je zweyer Glieder in eine Summe, und die Addition der hierdurch gefundenen Reihen erhalten kann, §. 181 — 183.

α. Summirung dieser Reihen in der Form, in welcher man sie gefunden hat, §. 181.

β. Summirung derselben in abgeänderter Form, §. 182. 183.

B. Zusatz zu §. 166.

1. Ich muß mich hier des in der Anmerkung zum vorstehenden § gethanen Versprechens entledigen, und ich will es auf die Art thun, daß ich zuvörderst die hieher gehörigen von Eulern gegebenen Beweise mittheile, und dann einige Anmerkungen hinzufüge. Der erste Beweis, den ich hersetzen werde, ist in der Abhandlung in Eulers Opusculis varii argumenti, welche den Titel führt: Demonstratio gemina theorematis Neutoniani, quo traditur relatio inter coëfficientes cujusvis aequationis algebraicae et summas potestatum radicum ejusdem, und in der zweyten Sammlung S. 108 anfängt, der zweyte, und daselbst von §. 8 bis zu Ende enthalten. Euler schlägt darin den Weg ein, daß er die Wahrheit des zu beweisenden Satzes bloß an einer algebraischen Gleichung vom fünften Grade

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

aber auf eine solche Art zeigt, daß leicht in die Augen fällt, daß

daß eben derselbe Beweis bey jeder andern Gleichung geführt werden könne. Der ganze Beweis ist folgender.

2. Es sey die Gleichung

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

gegeben, und α, β, γ, δ, und ε seyen die Wurzeln dieser Gleichung; auch sey

$$\begin{aligned}
S\alpha &= \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon \\
S\alpha^2 &= \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 \\
S\alpha^3 &= \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 \\
S\alpha^4 &= \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4 \\
S\alpha^5 &= \alpha^5 + \beta^5 + \gamma^5 + \delta^5 + \varepsilon^5
\end{aligned}$$

Dieses vorausgesetzt, so ist zuvörderst

$$\begin{aligned}
\alpha^5 - A\alpha^4 + B\alpha^3 - C\alpha^2 + D\alpha - E &= 0 \\
\beta^5 - A\beta^4 + B\beta^3 - C\beta^2 + D\beta - E &= 0 \\
\gamma^5 - A\gamma^4 + B\gamma^3 - C\gamma^2 + D\gamma - E &= 0 \\
\delta^5 - A\delta^4 + B\delta^3 - C\delta^2 + D\delta - E &= 0 \\
\varepsilon^5 - A\varepsilon^4 + B\varepsilon^3 - C\varepsilon^2 + D\varepsilon - E &= 0
\end{aligned}$$

und hieraus erhält man durch die Addition

$$S\alpha^5 - AS\alpha^4 + BS\alpha^3 - CS\alpha^2 + DS\alpha - 5E = 0$$

oder

$$S\alpha^5 = AS\alpha^2 - BS\alpha^3 + CS\alpha^2 - DS\alpha + 5E.$$

3. Ist daher irgend eine algebraische Gleichung, sie mag zu einem Grade gehören, zu was für einem sie will, oder

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \ldots \pm Mx \mp N = 0$$

gegeben, wo in den letzten Gliedern die obern Zeichen gelten, wenn n eine ungerade, und die untern, wenn es eine gerade Zahl ist: so ist offenbar, daß, wenn α jede Wurzel dieser Gleichung bedeutet,

$$S\alpha^n = AS\alpha^{n-1} - BS\alpha^{n-2} + CS\alpha^{n-3} - \ldots \mp MS\alpha \pm nN$$

seyn werde. Es erhellet also auf diese Art die Wahrheit des Newtonianischen Satzes für einen Fall allemal, und es ist folglich nur noch übrig, dieselbe auch für die höhern und niedern Dignitäten zu beweisen.

4. Für die höhern Potestäten läßt sich indeß eben derselbe Beweis führen. Denn thun die Werthe, α, β, γ, δ, ε, der Gleichung

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

ein Genüge, so gehören sie auch zu den Wurzeln folgender Gleichungen:

$$x^6 - Ax^5 + Bx^4 - Cx^3 + Dx^2 - Ex = 0$$
$$x^7 - Ax^6 + Bx^5 - Cx^4 + Dx^3 - Ex^2 = 0$$
$$x^8 - Ax^7 + Bx^6 - Cx^5 + Dx^4 - Ex^3 = 0$$

ꝛc.

und setzt man daher in jede dieser Gleichungen für x die Werthe α, β, γ, δ, und ε, und addirt die hierdurch gefundenen zu einander, so wird

$$S\alpha^6 = AS\alpha^5 - BS\alpha^4 + CS\alpha^3 - DS\alpha^2 + ES\alpha$$
$$S\alpha^7 = AS\alpha^6 - BS\alpha^5 + CS\alpha^4 - DS\alpha^3 + ES\alpha^2$$
$$S\alpha^8 = AS\alpha^7 - BS\alpha^6 + CS\alpha^5 - DS\alpha^4 + ES\alpha^3$$

ꝛc.

5. Bedeutet also α jede Wurzel der Gleichung:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \ldots \pm Mx \mp N = 0$$

so ist nicht nur, wie wir bereits gefunden haben,

$$S\alpha^n = AS\alpha^{n-1} - BS\alpha^{n-2} + CS\alpha^{n-3} - DS\alpha^{n-4} \ldots \mp MS\alpha \pm nN$$

sondern auch

$$S\alpha^{n+1} = AS\alpha^{n} - BS\alpha^{n-1} + CS\alpha^{n-2} - DS\alpha^{n-3} + \ldots \mp MS\alpha^{2} \pm NS\alpha$$

$$S\alpha^{n+2} = AS\alpha^{n+1} - BS\alpha^{n} + CS\alpha^{n-1} - DS\alpha^{n-2} + \ldots \mp MS\alpha^{3} \pm NS\alpha^{2}$$

$$S\alpha^{n+3} = AS\alpha^{n+2} - BS\alpha^{n+1} + CS\alpha^{n} - DS\alpha^{n-1} + \ldots \mp MS\alpha^{4} \pm NS\alpha^{3}$$

2c.

und überhaupt, wenn zu n irgend eine Zahl m hinzugesetzt wird

$$S\alpha^{n+m} = AS\alpha^{n+m-1} - BS\alpha^{n+m-2} + CS\alpha^{n+m-3} - \ldots \mp MS\alpha^{m+1} \pm NS\alpha^{m}$$

Aus dieser allgemeinen Formel erhält man die zuerst gefundene, wenn man $m = 0$ setzt, indem alsdann $\alpha^0 = 1$, $\beta^0 = 1$, $\gamma^0 = 1$, 2c. und also $S\alpha^0 = n$ wird.

6. Nun ist zwar diese Formel ebenfalls wahr, wenn man m negativ nimmt, und es finden deswegen für die Gleichung vom fünften Grade

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

auch folgende Formeln statt:

$$S\alpha^4 = AS\alpha^3 - BS\alpha^2 + CS\alpha^1 - DS\alpha^0 + ES\alpha^{-1}$$

$$S\alpha^3 = AS\alpha^2 - BS\alpha^1 + CS\alpha^0 - DS\alpha^{-1} + ES\alpha^{-2}$$

$$S\alpha^2 = AS\alpha^1 - BS\alpha^0 + CS\alpha^{-1} - DS\alpha^{-2} + ES\alpha^{-3}$$

2c.

allein dieses sind nicht die Formeln, welche nach dem Lehrsatze gefunden werden müssen. Es soll vielmehr bewiesen werden, daß

$$S\alpha^4 = AS\alpha^3 - BS\alpha^2 + CS\alpha - 4D$$

$$S\alpha^3 = AS\alpha^2 - BS\alpha + 3C$$

$$S\alpha^2 = AS\alpha - 2B$$

$$S\alpha = A$$

sey. Die Richtigkeit dieser Formeln erhellet also auf folgende Art.

7. Man mache mit Beybehaltung der Coefficienten der gegebenen Gleichung vom fünften Grade

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

folgende Gleichungen der niedern Grade:

$$z - A = 0,$$
$$z^2 - Az + B = 0$$
$$z^3 - Az^2 + Bz - C = 0$$
$$z^4 - Az^3 + Bz^2 - Cz + D = 0,$$

und setze die Wurzel der ersten Gleichung $= p$, ferner jede Wurzel der zweyten Gleichung $= q$, jede Wurzel der dritten Gleichung $= r$, und jede Wurzel der vierten Gleichung $= s$. Ob nun gleich die Wurzeln dieser Gleichung sehr von einander verschieden sind, so ist doch die Summe der Wurzeln einer jeden Gleichung $= A$, die Summe der Produkte aus je zwey und zwey Wurzeln der zweyten, dritten und vierten Gleichung $= B$, die Summe der Produkte aus je drey Wurzeln in der dritten und vierten Gleichung $= C$, und das Produkt aller vier Wurzeln der vierten Gleichung $= D$. Da nun, wenn in zwey oder mehrern Gleichungen nicht nur die Summen der einzeln Wurzeln, sondern auch die Summen der Produkte aus je zwey Wurzeln einander gleich sind, ebenfalls die Summen der Quadrate der Wurzeln dieselben sind, und eben dieses von den Summen der Würfel der Wurzeln behauptet werden kann, wenn außerdem noch die Summen der Produkte aus je drey Wurzeln, und von den Summen der Biquadrate der Wurzeln, wenn auch die Summen der Produkte aus je vier Wurzeln in den gedachten Gleichungen gleich sind: so ist

$$S\alpha = Ss = Sr = Sq = Sp$$
$$S\alpha^2 = Ss^2 = Sr^2 = Sq^2$$
$$S\alpha^3 = Ss^3 = Sr^3$$
$$S\alpha^4 = Ss^4$$

Es

Es beruhet aber der hierbey zu Hülfe genommene Satz darauf, daß die Summe der Quadrate mehrerer Größen durch die Summe dieser Größen und die Summe der Produkte aus je zweyen von ihnen, bestimmt werde, und daß zur Bestimmung der Summe der Würfel dieser Größen außerdem noch die Summe der Produkte aus je dreyen, und zur Bestimmung der Summe ihre Biquadrate noch die Summe der Produkte aus je vieren von ihnen erforderlich sey u. s. f.

8. Nun ist nach Absatz 3

$$Sp = A$$
$$Sq^2 = ASq - 2B$$
$$Sr^3 = ASr^2 - BSr + 3C$$
$$Ss^4 = ASs^3 - BSs^2 + CSs - D,$$

und folglich in der Gleichung vom fünften Grade:

$$x^5 - Ax^4 + Bx^3 - Cx^2 + Dx - E = 0$$

wenn man in diesen Formeln die Werthe des vorhergehenden Absatzes substituiret

$$S\alpha = A$$
$$S\alpha^2 = AS\alpha - 2B$$
$$S\alpha^3 = AS\alpha^2 - BS\alpha + 3C$$
$$S\alpha^4 = AS\alpha^3 - BS\alpha^2 + CS\alpha - 4D$$

und in der allgemeinen Gleichung:

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + Dx^{n-4} - \ldots \pm N = 0,$$

wenn α jede Wurzel bedeutet,

$$S\alpha = A$$
$$S\alpha^2 = AS\alpha - 2B$$
$$S\alpha^3 = AS\alpha^2 - BS\alpha + 3C$$
$$S\alpha^4 = AS\alpha^3 - BS\alpha^2 + CS\alpha - 4D$$
$$S\alpha^5 = AS\alpha^4 - BS\alpha^3 + CS\alpha^2 - DS\alpha + 5E$$

ꝛc.

9. Außer diesem Beweise hat Euler in seinen Opusculis analyticis, im ersten Theile, der zu Petersburg 1783 herausgekommen ist, und zwar in der Abhandlung, die den Titel, Miscellanea analytica führt, S. 337. f. das Verhältniß der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potestäten ihrer Wurzeln durch die Auflösung der Aufgabe gesucht: Wenn die Formel $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4 + Ez^5 +$ rc. ein Produkt aus den Faktoren $1 + \alpha z$, $1 + \beta z$, $1 + \gamma z$, $1 + \delta z$, $1 + \varepsilon z$, rc. ist, die Summe der Potestäten von α, β, γ, δ, ε, rc. zu finden. Nachdem er, um sich bey der Auflösung kurz ausdrucken zu können,

$$P = \alpha + \beta + \gamma + \delta + \varepsilon + \text{rc.}$$
$$Q = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 + \varepsilon^2 + \text{rc.}$$
$$R = \alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 + \varepsilon^3 + \text{rc.}$$
$$S = \alpha^4 + \beta^4 + \gamma^4 + \delta^4 + \varepsilon^4 + \text{rc.}$$
rc.

gesetzt und angemerkt hat, daß alles darauf ankomme, die Werthe von P, Q, R, S, rc. durch die Buchstaben A, B, C, D, rc. zu bestimmen; daß P bloß von A abhänge, weil $P = A$ ist; daß Q bloß durch A und B bestimmt werden könne, weil die Produkte aus je drey Buchstaben α, β, γ, δ, ε, nicht in die Bestimmung der Quadrate kommen; und daß aus ähnlichen Gründen zur Bestimmung von R bloß A, B und C, zur Bestimmung von S bloß A, B, C, D, erfordert werde, rc.: schließet er folgender Maaßen.

10. Wegen der so eben gedachten Beschaffenheit der Abhängigkeit der Buchstaben P, Q, R, S rc. von den Buchstaben A, B, C, D, rc. läßt sich der Buchstabe P auf eben die Art finden, als wenn bloß die Formel $1 + Az$ gegeben wäre, und die übrigen Buchstaben, B, C, D, E, rc. verschwänden. Unter diesen Umständen aber hat $1 + Az$ nicht mehr als einen Faktor, der $1 + az$ seyn mag, so daß

$a = P$ sey. Setzt man also $1 + az = 0$, oder $z = -\frac{1}{a}$, so muß auch $1 + Az = 0$ werden, und folglich $1 - \frac{A}{a} = 0$, oder $a - A = 0$ seyn. Hieraus aber folgt $a = P = A$, wie auch schon ohnedem bekannt ist.

11. Ferner erhält der Buchstabe Q eben den Werth, als wenn bloß $1 + Az + Bzz$ da wäre, und die Glieder von Cz^3 an verschwänden. Da diese Formel zwey Faktoren hat, die $1 + az$ und $1 + bz$ seyn mögen, so wird dabey $P = a + b$, und $Q = a^2 + b^2$. Setzt man nun $1 + az = 0$, oder $z = -\frac{1}{a}$, so muß auch $1 + Az + Bzz = 0$ werden, und folglich $1 - \frac{A}{a} + \frac{B}{a^2} = 0$, oder $a^2 - Aa + B = 0$ seyn. Auf eben die Art aber erhält man aus dem andern Faktor die Gleichung $b^2 - Ab + B = 0$, und folglich aus beyden, wenn man sie zu einander addirt, und Q für $a^2 + b^2$, und P für $a + b$ schreibt, $Q - 2AP + 2B = 0$, oder

$$Q = AP - 2B.$$

12. Den wahren Werth von R findet man aus der Formel $1 + Az + Bz^2 + Cz^3$, welche man $= (1 + az)(1 + bz)(1 + cz)$ setzen kann, so daß $P = a + b + c$; $Q = a^2 + b^2 + c^2$, und $R = a^3 + b^3 + c^3$ wird. Alsdann geben die Substitutionen $z = -\frac{1}{a}$, $z = -\frac{1}{b}$, $z = -\frac{1}{c}$ die Gleichungen:

$$a^3 - Aa^2 + Ba - C = 0$$
$$b^3 - Ab^2 + Bb - C = 0$$
$$c^3 - Ac^2 + Bc - C = 0$$

und daraus findet man durch die Addition und den Gebrauch der Buchstaben R, Q, P

$$R - AQ + BP - 3C = 0, \text{ oder } R = AQ - BP + 3C.$$

13. Eben so findet man den Werth von S aus der Formel $1 + Az + Bz^2 + Cz^3 + Dz^4$. Setzt man nemlich dieselbe $= (1 + az)(1 + bz)(1 + cz)(1 + dz)$ und folglich

$$P = a + b + c + d, \quad Q = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$
$$R = a^3 + b^3 + c^3 + d^3 \quad S = a^4 + b^4 + c^4 + d^4$$

so bekömmt man durch die Substitutionen $z = -\frac{1}{a}$; $z = -\frac{1}{b}$; $z = -\frac{1}{c}$; $z = -\frac{1}{d}$ die Gleichungen:

$$a^4 - Aa^3 + Ba^2 - Ca + D = 0$$
$$b^4 - Ab^3 + Bb^2 - Cb + D = 0$$
$$c^4 - Ac^3 + Bc^2 - Cc + D = 0$$
$$d^4 - Ad^3 + Bd^2 - Cd + D = 0$$

die, zu einander addirt, $S - AR + BQ - CP + 4D = 0$, oder

$$S = AR - BQ + CP - 4D$$

geben.

14. Hieraus läßt sich schon abnehmen, wie die Summen der höhern Potestäten oder T, U, V, ꝛc. bestimmt werden. Es ist nemlich

$$P = A$$
$$Q = AP - 2B$$
$$R = AQ - BP + 3C$$
$$S = AR - BQ + CP - 4D$$
$$T = AS - BR + CQ - DP + 5E$$
$$U = AT - BS + CR - DQ + EP - 6F$$
$$V = AU - BT + CS - DR + EQ - FP + 7G$$

ꝛc.

15. Zu diesen beyden hier eigentlich nur her gehörenden Beweisen, weil dabey keine Differential-Rechnung gebraucht wird, kann ich aus gewissen Gründen nicht umhin, auch den vermittelst der Differential-Rechnung von Eulern geführten Beweis zu setzen. Es ist derselbe in der aus seinen Opuscules varii argumenti vorhin angeführten Abhandlung der erste, und folgender.

16. Es sey

$$x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \ldots\ldots \pm N = Z = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)(x-\delta)\ldots\ldots(x-\nu)$$

wo denn die Anzahl der Faktoren $(x-\alpha)(x-\beta)$ rc. $= n$ ist. Alsdann wird

$$lZ = l(x-\alpha) + l(x-\beta) + l(x-\gamma) + \ldots\ldots + l(x-\nu)$$

und, wenn man diese Gleichung differentiirt

$$\frac{dZ}{Z} = \frac{dx}{x-\alpha} + \frac{dx}{x-\beta} + \frac{dx}{x-\gamma} + \ldots\ldots \frac{dx}{x-\nu}$$

und das Gefundene durch dx dividirt

$$\frac{dZ}{Zdx} + \frac{1}{x-\alpha} + \frac{1}{x-\beta} + \frac{1}{x-\gamma} + \ldots\ldots \frac{1}{x-\nu}$$

Nun ist aber

$$\frac{1}{x-\alpha} = \frac{1}{x} + \frac{\alpha}{x^2} + \frac{\alpha^2}{x^3} + \frac{\alpha^3}{x^4} + \frac{\alpha^4}{x^5} + \text{rc.}$$

$$\frac{1}{x-\beta} = \frac{1}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\beta^2}{x^3} + \frac{\beta^3}{x^4} + \frac{\beta^4}{x^5} + \text{rc.}$$

$$\frac{1}{x-\gamma} = \frac{1}{x} + \frac{\gamma}{x^2} + \frac{\gamma^2}{x^3} + \frac{\gamma^3}{x^4} + \frac{\gamma^4}{x^5} + \text{rc.}$$

rc.

$$\frac{1}{x-\nu} = \frac{1}{x} + \frac{\nu}{x^2} + \frac{\nu^2}{x^3} + \frac{\nu^3}{x^4} + \frac{\nu^4}{x^5} + \text{rc.}$$

und folglich, da man n solcher Reihen erhält, vorausgesetzt, daß die Absatz 2 erklärten Bezeichnungen hier in eben der Bedeutung gebraucht werden,

$$\frac{dZ}{Zdx} = \frac{n}{x} + \frac{1}{x^2}S\alpha + \frac{1}{x^3}S\alpha^2 + \frac{1}{x^4}S\alpha^3 + \frac{1}{x^5}S\alpha^4 + \text{etc.}$$

17. Zum andern ist auch

$$dZ = nx^{n-1}dx - (n-1)Ax^{n-2}dx + (n-2)Bx^{n-3}dx - (n-3)Cx^{n-4}dx + (n-4)Dx^{n-5}dx - \text{etc.}$$

und daher, wenn man auch diese Gleichung durch dx dividirt,

$$\frac{dZ}{dx} = nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{etc.}$$

so wie hieraus, wenn man durch $Z = x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - \text{etc.}$ dividirt

$$\frac{dZ}{Zdx} = \frac{nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{etc.}}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{etc.}}$$

18. Da man also durch Vergleichung der beyden hier gefundenen Bestimmungen von $\frac{dZ}{Zdx}$

$$\frac{nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{etc.}}{x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{etc.}}$$

$$=$$

$$\frac{n}{x} + \frac{1}{x^2}S\alpha + \frac{1}{x^3}S\alpha^2 + \frac{1}{x^4}S\alpha^3 + \frac{1}{x^5}S\alpha^4 + \text{etc.}$$

bekommt, so wird, wenn man beyde Hälften dieser Gleichung durch $x^n - Ax^{n-1} + Bx^{n-2} - Cx^{n-3} + \text{etc.}$ multiplicirt,

$$nx^{n-1} - (n-1)Ax^{n-2} + (n-2)Bx^{n-3} - (n-3)Cx^{n-4} + \text{etc.}$$

$$=$$

$$\begin{aligned}
nx^{n-1} &+ x^{n-2}S\alpha + x^{n-3}S\alpha^2 + x^{n-4}S\alpha^3 + \text{etc.}\\
&- nAx^{n-2} - Ax^{n-3}S\alpha - Ax^{n-4}S\alpha^2 - \text{etc.}\\
&\qquad + nBx^{n-3} + Bx^{n-4}S\alpha + \text{etc.}\\
&\qquad\qquad - nCx^{n-4} - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Hier

Hier sind nun zu beyden Seiten die ersten Glieder nx^{n-1} einander gleich, und es müssen daher auch die zweyten, die dritten, die vierten ꝛc. einander gleich seyn. Folglich ist

$$-(n-1)A = S\alpha \quad -nA$$
$$+(n-2)B = S\alpha^2 - AS\alpha \quad +nB$$
$$-(n-3)C = S\alpha^3 - AS\alpha^2 + BS\alpha \quad -nC$$
$$+(n-4)D = S\alpha^4 - AS\alpha^3 + BS\alpha^2 - CS\alpha + nD$$

ꝛc.

Das Gesetz, nach welchem diese Gleichungen fortschreiten, ist leicht wahrzunehmen, und eben so leicht findet man aus diesen Gleichungen die Neutonianischen Bestimmungen:

$$S\alpha = A$$
$$S\alpha^2 = AS\alpha \quad -2B$$
$$S\alpha^3 = AS\alpha^2 - BS\alpha \quad +3C$$
$$S\alpha^4 = AS\alpha^3 - BS\alpha^2 + CS\alpha \quad -4D$$
$$S\alpha^5 = AS\alpha^4 - BS\alpha^3 + CS\alpha^2 - DS\alpha \quad +5E$$
$$S\alpha^6 = AS\alpha^5 - BS\alpha^4 + CS\alpha^3 - DS\alpha^2 + ES\alpha - 6F$$

ꝛc.

19. Vergleicht man diesen letzten Beweis mit den beyden vorhergehenden, so ist der Vorzug, welchen er vor denselben hat, gar nicht zu verkennen. Der Satz, der dadurch erhärtet werden soll, wird so allgemein und so strenge, und dabey auf eine so wenig weitläuftige Art dargethan, daß nichts weiter zu verlangen übrig bleibt. Bey dem ersten, Absatz 2 bis 8 mitgetheilten, Beweise wird Absatz 7 eine Behauptung zu Hülfe genommen, die einen neuen Beweis nöthig macht, da sie nicht zu den Elementar-Sätzen gehört; und vielleicht ist die genaue Bestimmung der darin genannten Summen von Potestäten nicht einmal anders möglich, als eben durch den Neutonianischen Satz. Bey dem andern, Absatz 9 bis 14 stehenden, Beweise ist das ein nicht ganz unwichtiger Umstand, daß dabey die

Buchstaben P, Q, R, S ꝛc. nicht immer Summen von einer und derselben Anzahl von Größen sind.

20. Der Herr Hofrath Kästner hat in seinen Anfangsgründen der Analysis endlicher Größen, am Ende, den Neutonianischen Satz von dem Verhältnisse der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potestäten ihrer Wurzeln auf seine Art, d. h. kurz, deutlich und bündig, bewiesen, und zugleich eines andern Beweises von dem ehemaligen Prof. Bärmann zu Wittenberg Erwähnung gethan Da indeß jeder deutsche Mathematiker des Herrn Hofrath Kästners Werke besitzen muß, so habe ich nicht nöthig, daraus hier etwas herzusetzen.

21. Der französische Uebersetzer des ersten Theils der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen, Herr Pezzi, dessen Uebersetzung Strasburg 1786 erschienen ist, hat ebenfalls in einem Anhange zum zehnten Capitel die von Eulern bey §. 166 gelassene Lücke durch einen ohne Differential-Rechnung geführten Beweis des Neutonianischen Satzes auszufüllen gesucht. Es empfiehlt sich indeß dieser Beweis weder durch Kürze, noch durch Leichtigkeit, und ich kann daher überhoben seyn, ihn abzuschreiben. Herr Pezzi hat des Hrn. Hofr. Kästners Werke nicht gekannt, das gesteht er selbst, daß er aber auch die Eulerischen hier mitgetheilten Beweise nicht gewußt hat, läßt sich daraus abnehmen, weil er sich rühmt, durch die Differential-Rechnung eine andere Methode gefunden zu haben, ohne dessen, was Euler in dieser Rücksicht schon im Jahr 1750 gethan hat, auch nur im mindesten zu erwähnen.

22. Uebrigens sind die Sätze aus der Differential-Rechnung, die bey dem Absatz 15 bis 17 stehenden Beweise gebraucht werden, von der Art, daß dieselben eher bekannt seyn

seyn können, als der Neutonianische Satz, so wie es Euler gethan hat, gebraucht wird. Ich habe daher um so weniger Bedenken getragen, den gedachten Beweis hier mitzutheilen, zumal, da er nicht so bekannt zu seyn scheint, als er es verdient. Wenigstens ist Euler dadurch wider den Vorwurf gesichert, als ob er das am Ende des 166sten § gethane Versprechen nicht gehalten, weil man den gedachten Beweis nicht in seiner Differential-Rechnung findet.

C. Zusatz zu §. 167 und 168.

1. Es ist eben so angenehm als nützlich, mehrere zu einem Ziele führenden Wege mit einander zu vergleichen. Ich will daher aus der Abhandlung de summis serierum reciprocarum im siebenten Bande der Commentarien der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften von den Jahren 1734 und 35 die Art und Weise mittheilen, wie Euler lange vor der Ausarbeitung der Einleitung in die Analysis des Unendlichen die Summen der in den oben stehenden §§ untersuchten Reihen mit Hülfe des Kreises bestimmt hat.

2. Wenn s einen Bogen, y den Sinus und x den Cosinus desselben bedeutet, so ist nach Capitel 8 der Einleitung §. 134.

$$y = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{rc., und}$$

$$x = 1 - \frac{s^2}{1.2} + \frac{s^4}{1.2.3.4} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{rc.}$$

Eigentlich werden durch diese Formeln die Sinus und Cosinus eines Bogens aus diesem Bogen bestimmt, man kann sie aber eben so gut gebrauchen, um nach jener einen Bogen durch seinen Sinus, und aus dieser durch den Cosinus zu finden. Zu dieser Absicht soll hier indeß bloß die erste

Formel untersucht werden, und dazu ist es am bequemsten ihr folgende Form zu geben:

$$o = 1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2.3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} + \text{rc.}$$

3. Da dieses eine Gleichung von unendlich vielen Dimensionen ist, so muß sie auch eine unendliche Anzahl von Wurzeln haben, und nennt man dieselben A, B, C, D, E, rc, so wird, wie aus der Lehre von den Gleichungen bekannt ist,

$$1 - \frac{s}{y} + \frac{s^3}{1.2\,3.y} - \frac{s^5}{1.2.3.4.5.y} + \frac{s^7}{1.2.3\ldots7.y} - \text{rc.}$$
$$=$$
$$(1 - \frac{s}{A})(1 - \frac{s}{B})(1 - \frac{s}{C})(1 - \frac{s}{D})(1 - \frac{s}{E}) \text{ rc.}$$

und folglich

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{A} + \frac{1}{B} + \frac{1}{C} + \frac{1}{D} + \frac{1}{E} + \text{rc.}$$

$o =$ der Summe der Produkte aus je zweyen

$-\frac{1}{1.2.3.y} =$ der Summe der Produkte aus je dreyen

$o =$ der Summe der Produkte aus je vieren

$\frac{1}{1.2\,3.4.5.y} =$ der Summe der Produkte aus je fünfen

von diesen Größen $\frac{1}{A}, \frac{1}{B}, \frac{1}{C}, \frac{1}{D}, \frac{1}{E}$ rc.

4. Nun sind aber die Wurzeln der Gleichung Absatz 2 keine andere als alle die Bogen, deren Sinus $= y$ ist, und also, wenn man den kleinsten dieser Bogen durch A und den halben Umkreis durch π ausdruckt, folgende:

$$A,\ \pi - A,\ 2\pi + A,\ 3\pi - A,\ 4\pi + A,\ 5\pi - A, \text{ rc.}$$

desgleichen

$$-\pi - A, -2\pi + A, -3\pi - A, -4\pi + A, -5\pi - A, \text{ rc.}$$

Es

Es ist demnach auch

die Summe aller dieser Größen $= \frac{1}{y}$

die Summe aller Produkte aus je zweyen $= 0$

die Summe aller Produkte aus je dreyen $= \frac{-1}{1.2.3.y}$

die Summe aller Produkte aus je vieren $= 0$

die Summe aller Produkten aus je fünfen $= \frac{1}{1.2.3.4.5.y}$

die Summe aller Produkte aus je sechsen von ihnen $= 0$

rc.

5. Setzt man nunmehr

$$P = \frac{1}{A} + \frac{1}{\pi - A} + \frac{1}{-\pi - A} + \frac{1}{2\pi + A} + \frac{1}{-2\pi - A} + \text{rc.}$$

$$Q = \frac{1}{A^2} + \frac{1}{(\pi - A)^2} + \frac{1}{(-\pi - A)^2} + \frac{1}{(2\pi + A)^2} + \frac{1}{(-2\pi - A)^2} + \text{rc.}$$

$$R = \frac{1}{A^3} + \frac{1}{(\pi - A)^3} + \frac{1}{(-\pi - A)^3} + \frac{1}{(2\pi + A)^3} + \frac{1}{(-2\pi - A)^3} + \text{rc.}$$

$$S = \frac{1}{A^4} + \frac{1}{(\pi - A)^4} + \frac{1}{(-\pi - A)^4} + \frac{1}{(2\pi + A)^4} + \frac{1}{(-2\pi - A)^4} + \text{rc.}$$

rc.

so wird nach dem in der Einleitung, Theil 1. Cap. 10. §. 166, angeführten Neutonianischen Satze

$$P = \frac{1}{y};$$

$$Q = \frac{P}{y} = \frac{1}{y^2};$$

$$R = \frac{Q}{y} - \frac{1}{1.2.y}$$

$$S = \frac{R}{y} - \frac{P}{1.2.3.y}$$

$$T = \frac{S}{y} - \frac{Q}{1.2.3.y} + \frac{1}{1.2.3.4.y}$$

$$V = \frac{T}{y} - \frac{R}{1.2.3.y} + \frac{P}{1.2.3.4.5.y}$$

$$W = \frac{V}{y} - \frac{S}{1.2.3.y} + \frac{Q}{1.2.3.4.5.y} - \frac{1}{1.2.3.4.5.6.y}$$

etc.

6. Angenommen also, daß $y = r = 1$ sey, so ist der kleinste Bogen A von denen, deren Sinus $= 1$ ist, $= \frac{1}{2}\pi$, oder wenn man $\frac{1}{2}\pi = q$ setzt, $A = q$ und $\pi = 2q$. Dabey verwandelt sich die obige Reihe Absatz 4 in folgende:

$$\frac{1}{q}, \frac{1}{q}, -\frac{1}{3q} - \frac{1}{3q}, +\frac{1}{5q}, +\frac{1}{5q}, -\frac{1}{7q}, -\frac{1}{7q} + \frac{1}{9q} + \frac{1}{9q}, + \text{etc.}$$

Hieraus aber fließt

$$\frac{2}{q}(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}) = P = 1$$

und es ist demnach

$$\frac{q}{2} = \frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

welches die bekannte Leibnitzische Reihe zur Bestimmung des halben Umfangs eines Kreises zum Radius, oder des ganzen Umfanges zum Durchmesser desselben ist.

7. Nimmt man nun die Quadrate derer Größen, die sich aus der Voraussetzung, $y = 1$, ergeben haben, so erhält man

$$+\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{9q^2} + \frac{1}{25q^2} + \frac{1}{25q^2} + \text{etc.}$$

und durch die Bestimmungen im fünften Absatze also

$$\frac{2}{q^2}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc.}) = Q = P = 1$$

oder

oder

$$\frac{q^2}{2} = \frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \&c.$$

Nun ist aber $1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \&c. = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \&c. - \frac{1}{4}(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \&c.)$, und es wird folglich

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \&c.$$

8. Da in dem Falle, wenn $y = 1$ ist, $P = Q = 1$ wird, so ist, für $y = 1$, $R = \frac{1}{2}$; $S = \frac{1}{3}$; $T = \frac{5}{24}$; $V = \frac{2}{15}$; $W = \frac{61}{720}$; $X = \frac{17}{315}$, &c. Aus $R = \frac{1}{2}$ aber hat man

$$\frac{2}{q^3}(1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \&c.) = \frac{1}{2}$$

oder

$$\frac{q^3}{4} = \frac{\pi^3}{32} = 1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \&c.$$

Ferner fließt aus aus $S = \frac{1}{3}$

$$\frac{2}{q^4}(1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \&c.) = \frac{1}{3}$$

oder

$$\frac{q^4}{6} = \frac{\pi^4}{96} = 1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \&c.$$

und da diese Reihe mit $\frac{16}{15}$ multiplicirt die Reihe

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \&c.$$

giebt,

giebt, so findet man dadurch

$$\frac{\pi^4}{90} = 1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{6^4} + \text{ꝛc.}$$

9. Auf eine ähnliche Art entdeckt man die Summen der höhern Potestäten, nemlich

$$1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{ꝛc.} = \frac{5q^5}{48} = \frac{5\pi^5}{1536}$$

und

$$1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{ꝛc.} = \frac{q^6}{15} = \frac{\pi^6}{960}$$

Aus dieser letzten Reihe aber ergiebt sich auch

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{6^6} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi^6}{945}$$

Für die siebenten Dignitäten erhält man

$$1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \text{ꝛc.} = \frac{61q^7}{1440} = \frac{61\pi^7}{184320}$$

und für die achten

$$1 + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{7^8} + \frac{1}{9^8} + \frac{1}{11^8} + \text{ꝛc.} = \frac{17q^8}{630} = \frac{17\pi^8}{161280}$$

woraus sich denn weiter

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \frac{1}{6^8} + \text{ꝛc.} = \frac{\pi^8}{9450}$$

ergiebt. Da bey ungeraden Exponenten die Zeichen vor den Gliedern abwechseln, und nur bloß bey den geraden Potestäten gleich sind, so ist dies die Ursache, daß man die allgemeine Form

$$1 + \frac{1}{2^n} + \frac{1}{3^n} + \frac{1}{4^n} + \frac{1}{5^n} + \frac{1}{6^n} + \frac{1}{7^n} + \text{ꝛc.}$$

nur in den Fällen summiren kann, wenn n eine gerade Zahl ist.

10. Setzt man den kleinsten zu y gehörigen Bogen $= \frac{1}{4}\pi$ und also $y = \frac{1}{\sqrt{2}}$, so wird

$$\frac{4}{\pi} + \frac{4}{3\pi} - \frac{4}{5\pi} - \frac{4}{7\pi} + \frac{4}{9\pi} + \frac{4}{11\pi} - \text{etc.} = P = \frac{1}{y} = \sqrt{2}$$

und folglich

$$\frac{\pi}{2\sqrt{2}} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} \text{ etc.}$$

Ferner ist die Summe der Quadrate jener Glieder oder

$$\frac{16}{\pi^2}(1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc.} = Q = 2, \text{ und also}$$

$$1 + \frac{1}{9} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{81} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{8}$$

wie bereits vorher gefunden worden ist.

11. Macht man $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ so wird der kleinste zu y gehörige Bogen $= \frac{1}{3}\pi$. Alsdann erhält man

$$\frac{3}{\pi} + \frac{3}{2\pi} - \frac{3}{4\pi} - \frac{3}{5\pi} + \frac{3}{7\pi} + \frac{3}{8\pi} \text{ etc.} = \frac{1}{y} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

und es ist daher

$$\frac{2\pi}{3\sqrt{3}} = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \text{etc.}$$

Ferner wird die Summe der Quadrate dieser Glieder $= \frac{1}{y^2} = \frac{4}{3}$ und folglich

$$\frac{4\pi^2}{27} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{49} + \frac{1}{64} + \text{etc.}$$

in welcher Reihe alle aus 3 zusammengesetzte Glieder fehlen. Es hängt aber diese Reihe auch mit folgender

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{6}$$

zu=

zusammen, indem diese mit $(1 - \frac{1}{9})$ multiplicirt, jene giebt, und ihre Summe ist daher $= \frac{\pi^2}{6}(1 - \frac{1}{9}) = \frac{4\pi^2}{27}$.

12. Setzt man $y = 0$, so verwandelt sich die im Anfange Absatz 2 zum Grunde gelegte Gleichung in folgende:

$$0 = s - \frac{s^3}{1.2.3} + \frac{s^5}{1.2.3.4.5} - \frac{s^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind alle die Bogen, deren Sinus $= 0$ ist. Die kleinste Wurzel ist daher $s = 0$, und dividirt man hierdurch die vorhergehende Gleichung, so bekömmt man

$$0 = 1 - \frac{s^2}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.5} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.}$$

und die Wurzeln dieser Gleichung sind alle übrige Bogen, deren Sinus $= 0$ ist, oder π, $-\pi$, $+2\pi$ -2π, $+3\pi$, -3π etc. Hieraus fließt

$$1 - \frac{s^2}{1.2.3} + \frac{s^4}{1.2.3.4.5} - \frac{s^6}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{etc.} = (1 - \frac{s}{\pi})$$

$$(1 + \frac{s}{\pi})(1 - \frac{s}{2\pi})(1 + \frac{s}{2\pi}) \text{etc.} = (1 - \frac{s^2}{\pi^2})(1 - \frac{s^2}{4\pi^2})$$

$$(1 - \frac{s^2}{9\pi^2})(1 - \frac{s^2}{16\pi^2})$$

$$\text{etc.}$$

13. Nimmt man nun auch hier den Neutonianischen Satz von dem Verhältnisse der Coefficienten einer Gleichung zu den Summen der Potestäten ihrer Wurzeln zu Hülfe, so findet man

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \text{etc.} = \frac{\pi^2}{6} \quad = P$$

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4} + \text{etc.} = \frac{\pi^4}{90} \quad = Q$$

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \frac{1}{5^6} + \text{etc.} = \frac{\pi^6}{945} = R$$

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \frac{1}{5^8} + \text{etc.} = \frac{\pi^8}{9450} = S$$

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \frac{1}{4^{10}} + \frac{1}{5^{10}} + \text{etc.} = \frac{\pi^{10}}{93555} = T$$

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \frac{1}{4^{12}} + \frac{1}{5^{12}} + \text{etc.} = \frac{691\,\pi^{12}}{6825 \cdot 93555} = V$$

und hieraus

$$\pi^2 = 6P = \frac{15Q}{P} = \frac{21R}{2Q} = \frac{10S}{R} = \frac{99T}{10S} = \frac{6825V}{691T} \text{ etc.}$$

14. Auch kann man aus den bisher gefundenen Bestimmungen folgende Werthe von π ableiten.

$$\pi = 4\left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}\right)$$

$$\pi = 2\left(\frac{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \text{etc.}}\right)$$

$$\pi = 4\left(\frac{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \frac{1}{9^2} + \frac{1}{11^2} + \text{etc.}}\right)$$

$$\pi = 3\left(\frac{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{5^3} - \frac{1}{7^3} + \frac{1}{9^3} - \frac{1}{11^3} + \text{etc.}}\right)$$

$$\pi = \frac{16}{5}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \frac{1}{7^4} + \frac{1}{9^4} + \frac{1}{11^4} + \text{etc.}}\right)$$

$$\pi = \frac{25}{8}\left(\frac{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}{1 - \frac{1}{3^5} + \frac{1}{5^5} - \frac{1}{7^5} + \frac{1}{9^5} - \frac{1}{11^5} + \text{etc.}}\right)$$

$$\pi = \frac{192}{61}\left(\frac{1 - \frac{1}{3^7} + \frac{1}{5^7} - \frac{1}{7^7} + \frac{1}{9^7} - \frac{1}{11^7} + \text{etc.}}{1 + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{5^6} + \frac{1}{7^6} + \frac{1}{9^6} + \frac{1}{11^6} + \text{etc.}}\right)$$