Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

XIV. Zusätze zum vierzehnten Capitel.

XIV.

Zusätze zum vierzehnten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von der Multiplication und Division der Winkel.

1. Bestimmung der trigonometrischen Linien solcher Bogen oder Winkel, die in einer arithmetischen Progression fortschreiten, §. 234 — 257.
   a. der Sinus, §. 234 — 241.
   b. der Cosinus, §. 242 — 245.
   c. der Secanten, §. 246. 247.
   d. der Cosecanten, §. 248.
   e. der Tangenten und Cotangenten, §. 249 — 257.
2. Summation der Sinus und Cosinus der Winkel, die in einer arithmetischen Progression fortgehen, §. 258—260. Den Beschluß machen einige Winke zur weitern Benutzung des Bisherigen nebst dem Verzeichniß einiger dazu nothwendigen Sätze, §. 261—263.

B. Zusatz zu §. 234 — 241.

1. Wenn z einen Bogen eines Kreises bedeutet, dessen Radius $= 1$ ist, und dabey $\sin. z = x$, und $\cos. z = y$ gesetzt wird, so findet man zwar, wenn man x oder y aus z bestimmt, sowohl für x als für y nicht mehr als einen Werth, aber dagegen gehören zu jedem x und y unendlich viele

viele Bogen, so daß in diesem Fall z eine unendlich vielfache Bedeutung bekommt. Die Wahrheit dieser Behauptung erhellet, sowohl, wenn man den Begriff eines Sinus und Cosinus genau überlegt, als auch aus den oben im achten Capitel, §. 134, gefundenen Formeln, nach welchen

$$\sin. z = z - \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^5}{1.2.3.4.5} - \frac{z^7}{1.2.3.4.5.6.7} + \text{rc.}$$

und

$$\cos. z = 1 - \frac{z^2}{1.2} + \frac{z^4}{1.2.3.4} - \frac{z^6}{1.2.3.4.5.6} + \text{rc.}$$

ist.

2. Will man folglich einen Sinus oder Cosinus bloß auf die Art ausdrucken, daß man den Bogen anzeigt, zu welchem er gehöret: so kann man solches auf unzählige Arten thun. Bedeutet nemlich s irgend einen Bogen, und π den halben Umkreis, so ist, wenn man bey der Bestimmung der Sinus und Cosinus außer der Größe derselben auch ihre Lage in Erwägung zieht, und also die positiven von den negativen unterscheidet,

$$\sin. s = \sin.(\pi - s) = \sin.(2\pi + s) = \sin.(3\pi - s) = \sin.(4\pi + s) \text{ rc.}$$

und

$$\cos. s = \cos.(2\pi - s) = \cos.(2\pi + s) = \cos.(4\pi - s) = \cos.(4\pi + s) \text{ rc.}$$

Betrachtet man aber die Sinus und Cosinus bloß ihrer Größe nach oder absolute, so wird sogar

$$\sin. s = \sin.(\pi - s) = \sin.(\pi + s) = \sin.(2\pi - s) = \sin.(2\pi + s) = \sin.(3\pi - s) = \sin.(3\pi + s) = \sin.(4\pi - s) \text{ rc.}$$

und

$$\cos. s = \cos.(\pi - s) = \cos.(\pi + s) = \cos.(2\pi - s) =$$

$$\cos.(2\pi + s) = \cos.(3\pi - s) = \cos.(3\pi + s) = \cos.(4\pi - s) \text{ ꝛc.}$$

3. Da also in der Gleichung:

$$\sin. nz =$$
$$x\left(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \,.\, 2}2^{n-5}y^{n-5} - \text{ꝛc.}\right)$$

der Sinus in der ersten Hälfte oder sin. nz bloß durch den Bogen angezeigt ist, zu welchem er gehöret: so kann man dafür, wenn man $nz = s$ macht, ohne die Gleichung zu zerstören, entweder

$$\sin. s = \sin.(\pi - s) = \sin.(2\pi + s) = \sin.(3\pi - s) \text{ ꝛc.}$$

oder auch

$$\sin. s = \sin.(\pi - s) = \sin.(\pi + s) = \sin.(2\pi - s) = \sin.(2\pi + s) \text{ ꝛc.}$$

setzen, je nachdem man bey den Sinus entweder ihre Größe und Lage, oder ihre Größe allein in Erwägung zieht. Ferner kann man darin für x, da x durch diese Gleichung nicht weiter bestimmt wird, als daß es der Sinus von $\frac{1}{n}$ von dem Bogen seyn soll, dessen Sinus ihre erste Hälfte ausmacht, entweder

$$\sin. \frac{s}{n} \text{ oder } \sin. \frac{\pi - s}{n} \text{ oder } \sin. \frac{2\pi + s}{n} \text{ oder } \sin. \frac{3\pi - s}{n} \text{ ꝛc.}$$

oder

$$\sin. \frac{s}{n} \text{ oder } \sin. \frac{\pi - s}{n} \text{ oder } \sin. \frac{\pi + s}{n} \text{ oder } \sin. \frac{2\pi - s}{n} \text{ ꝛc.}$$

setzen, je nachdem wieder entweder der erste oder der zweyte von den so eben gedachten Fällen angenommen wird. Zugleich wird dabey immer y, als der Cosinus des Bogens, von welchem x der Sinus ist, $= \sqrt{(1 - xx)}$.

4. Bringt man nun den jetzt gedachten Werth $y = \sqrt{(1 - xx)}$ in die Gleichung:

sin.

$$\sin. nz =$$

$$x(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} 2^{n-5}y^{n-5} - \text{etc.})$$

so erhält man dadurch eine solche, die bloß x enthält, und dieser Gleichung thun folglich, weil bey der Erfindung derjenigen, woraus sie abgeleitet ist, die Lage der Sinus mit in Erwägung gezogen worden, die Werthe

$$\sin. \frac{s}{n};\ \sin. \frac{\pi - s}{n};\ \sin. \frac{2\pi + s}{n};\ \sin. \frac{3\pi - s}{n};\ \text{etc.}$$

in aller Rücksicht; die Werthe aber

$$\sin. \frac{s}{n};\ \sin. \frac{\pi - s}{n};\ \sin. \frac{\pi + s}{n};\ \sin. \frac{2\pi - s}{n};\ \text{etc.}$$

in so fern ein Genüge, als sie und ihre Grundgleichung durch Beyseitsetzung der Lage der Sinus nicht geändert wird.

5. So weit ist man also im Stande, die Werthe, welche x in der aus der Gleichung:

$$\sin. nz =$$

$$x(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} 2^{n-5}y^{n-5} - \text{etc.})$$

durch die Substitution $y = \sqrt{(1 - xx)}$ entspringenden Formel haben kann, mit der vollkommensten Gewißheit zu bestimmen, ohne daß man nöthig hat, diese Substitution wirklich zu gebrauchen, und ohne die Anzahl der Dimensionen von x in der dadurch entstehenden Gleichung zu wissen. Allein unter den unendlich vielen Werthen, die x auf diese Art in der gedachten Gleichung haben kann, giebt es bey jedem bestimmten Werthe von n auch nur eine bestimmte Anzahl von einander verschiedener Werthe von x, und die Kenntniß dieser Werthe ist es, worauf es hier vorzüglich ankommt. Man gelangt dazu durch folgende Betrachtungen.

6. Zuvörderst kehren von sin. $\frac{2n\pi + s}{n}$ an die schon dagewesenen Werthe in eben der Ordnung wieder, indem sin. $\frac{2n\pi + s}{n}$ = sin. $\frac{s}{n}$; sin. $\frac{(2n+1)\pi - s}{n}$ = sin. $\frac{\pi - s}{n}$; rc. ist, und es kann also die Anzahl der von einander verschiedenen Werthe von x, wenn man die Sinus der Größe und Lage nach betrachtet, nicht größer als $2n$, wenn man sie aber absolute nimmt, nicht größer als $4n$ seyn. Zum andern sind, wenn n eine ungerade Zahl ist, unter den $2n$ Werthen im ersten Falle je zwey, und unter den $4n$ Werthen im andern Falle je vier Werthe einander gleich, so daß, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet, für x nicht mehr als n von einander verschiedene Werthe übrig bleiben. Denn einmal ist

$$\sin.\frac{s}{n} = \sin.\frac{n\pi - s}{n}$$

$$\sin.\frac{\pi - s}{n} = \sin.\frac{(n-1)\pi + s}{n}$$

$$\sin.\frac{2\pi + s}{n} = \sin.\frac{(n-2)\pi - s}{n}$$

rc.

desgleichen

$$\sin.\frac{(n+1)\pi + s}{n} = \sin.\frac{(2n-1)\pi - s}{n}$$

$$\sin.\frac{(n+2)\pi - s}{n} = \sin.\frac{(2n-2)\pi + s}{n}$$

$$\sin.\frac{(n+3)\pi + s}{n} = \sin.\frac{(2n-3)\pi - s}{n}$$

rc.

Zweytens sind, wenn man die Sinus absolute betrachtet, die Sinus von

$\sin.\frac{s}{n}$ an bis zum $\sin.\frac{n\varpi - s}{n}$

von den Sinus von

$\sin.\frac{n\varpi + s}{n}$ an bis zum $\sin.\frac{2n\varpi - s}{n}$

nicht verschieden, und außerdem ist auch

$$\sin.\frac{s}{n} = \sin.\frac{n\varpi - s}{n}$$

$$\sin.\frac{\varpi - s}{n} = \sin.\frac{(n-1)n + s}{n}$$

$$\sin.\frac{\varpi + s}{n} = \sin.\frac{(n-1)n - s}{n}$$

rc.

desgleichen

$$\sin.\frac{n\varpi + s}{n} = \sin.\frac{2n\varpi - s}{n}$$

$$\sin.\frac{(n+1)\pi - s}{n} = \sin.\frac{(2n-1)\pi + s}{n}$$

$$\sin.\frac{(n+1)\varpi + s}{n} = \sin.\frac{(2n-1)\varpi - s}{n}$$

rc.

Zum dritten sind, wenn n eine gerade Zahl bedeutet, unter den vorhin gedachten 2n Werthen n positive und n negative, und unter den erwähnten 4n Werthen 2n Sinus, die zu Bogen gehören, die kleiner sind als ϖ, und 2n Sinus, die zu Bogen gehören, die größer sind als ϖ und kleiner als 2ϖ, und unter jenen sowohl als unter diesen je zwey, und unter allen je vier gleiche, so daß, wenn n eine gerade Zahl ist, für x entweder die Anzahl von 2n Werthen, n positiven und n negativen, mit jenen gleich großen, oder von n absoluten Werthen entsteht. Denn einmal unterscheiden sich, wenn n eine gerade Zahl ist, die Sinus.

sin.

$$\sin.\frac{s}{n},\ \sin.\frac{\varpi - s}{n},\ \sin.\frac{2\varpi + s}{n} \ldots\ldots \sin.\frac{(n-1)\varpi - s}{n}$$

von den Sinus

$$\sin.\frac{n\varpi + s}{n},\ \sin.\frac{(n+1)\varpi - s}{n},\ \sin.\frac{(n+2)\varpi + s}{n} \ldots$$

$$\ldots \sin.\frac{(2n-1)\varpi - s}{n}$$

bloß durch ihre Lage; und zweytens ist wieder, wie vorhin,

$$\sin.\frac{s}{n} = \sin.\frac{n\varpi - s}{n}$$

$$\sin.\frac{\varpi - s}{n} = \sin.\frac{(n-1)\varpi + s}{n}$$

$$\sin.\frac{\varpi + s}{n} = \sin.\frac{(n-1)\varpi - s}{n}$$

rc.

desgleichen

$$\sin.\frac{n\varpi + s}{n} = \sin.\frac{2n\varpi - s}{n}$$

$$\sin.\frac{(n+1)\varpi - s}{n} = \sin.\frac{(2n-1)\varpi + s}{n}$$

$$\sin.\frac{(n+1)\varpi - s}{n} = \sin.\frac{(2n-1)\varpi - s}{n}$$

rc.

7. Will man also bloß alle von einander verschiedene Werthe haben, die x in der aus

$$\sin. n z =$$

$$x\left(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1\,.\,2}2^{n-5}y^{n-5} - \text{rc.}\right)$$

durch die Substitution $y = \sqrt{(1 - xx)}$ entspringenden Gleichung bekommen kann, und dieselben auf die bequemste Art ausdrucken: so sind dieselben

1. wenn n eine ungerade Zahl ist, und zwar

a.

a. wenn die Sinus sowohl ihrer Lage als ihrer Größe nach betrachtet werden:

$$\sin. z;\ \sin.\left(\frac{2\varpi}{n} + z\right);\ \sin.\left(\frac{4\varpi}{n} + z\right);\ \ldots\ldots \sin.\left(\frac{(2n-2)\varpi}{n} + z\right)$$

b. wenn die Sinus bloß ihrer Größe nach genommen werden:

$$\sin. z;\ \sin.\left(\frac{\varpi}{n} - z\right);\ \sin.\left(\frac{\pi}{n} + z\right);\ \sin.\left(\frac{2\varpi}{n} - z\right);\ \sin.\left(\frac{2\varpi}{n} + z\right);$$

$$\cdot\ \sin.\left(\frac{3\varpi}{n} - z\right) \ldots\ldots \sin.\left(\frac{\frac{1}{2}(n-1)\varpi}{n} + z\right).$$

2. wenn n eine gerade Zahl ist, und zwar

a. wenn man die Sinus nach Größe und Lage zugleich betrachtet,

$$\pm \sin. z;\ \pm \sin.\left(\frac{\varpi}{n} - z\right);\ \pm \sin.\left(\frac{2\varpi}{n} + z\right);\ \ldots$$

$$\ldots \pm \sin.\left(\frac{(n-1)\varpi}{n} - z\right)$$

b. wenn man sie bloß nach der Größe betrachtet,

$$\sin. z;\ \sin.\left(\frac{n}{n} - z\right);\ \sin.\left(\frac{\varpi}{n} + z\right);\ \sin.\left(\frac{2\varpi}{n} - z\right);$$

$$\sin.\left(\frac{2\varpi}{n} + z\right);\ \sin.\left(\frac{3\varpi}{n} - z\right) \ldots\ \sin.\left(\tfrac{1}{2}\varpi - z\right).$$

8. Da sich das Allgemeine allemal in das ihm untergeordnete Besondere durch Hinzusetzung dessen, was aus dem specifischen Unterschiede fließt, muß verwandeln lassen: so muß man auch aus den Werthen von x

$$\sin. z;\ \sin. \frac{\varpi}{n} - z);\ \sin.\left(\frac{\varpi}{n} + z\right);\ \sin.\left(\frac{2\varpi}{n} - z\right);\ \text{ꝛc.}$$

wenn n eine ungerade Zahl ist, die Werthe

$$\sin. z;\ \sin.\left(\frac{2\varpi}{n} + z\right);\ \sin.\left(\frac{4\varpi}{n} + z\right);\ \sin.\left(\frac{6\varpi}{n} + z\right);\ \text{ꝛc.}$$

so wie auch, wenn n eine gerade Zahl ist, folgende

±

$$\pm \sin. z\,; \pm \sin.\left(\frac{\varpi}{n} - z\right); \pm \sin.\left(\frac{2\varpi}{n} + z\right); \pm \sin.\left(\frac{3\varpi}{n} - z\right); \text{ꝛc.}$$

bloß durch Hinzufügung der Zeichen + und — herleiten können. Nun ist in Ansehung der ersten Werthe

$$\sin.\, z = \sin.\, z$$

$$\sin.\left(\frac{\varpi}{n} - z\right) = \sin.\left(\frac{(n-1)\varpi}{n} + z\right)$$

$$-\sin.\left(\frac{\varpi}{n} + z\right) = \sin.\left(\frac{(n+1)\varpi}{n} + z\right) = \sin.\left(\frac{(2n-1)\varpi}{n} - z\right)$$

$$-\sin.\left(\frac{2\varpi}{n} - z\right) = \sin.\left(\frac{(n+2)\varpi}{n} - z\right) = \sin.\left(\frac{(2n-2)\varpi}{n} + z\right)$$

ꝛc.

und in Ansehnng der andern

$$\pm \sin. z = \pm \sin. z$$

$$\pm \sin.\left(\frac{\varpi}{n} - z\right) = \pm \sin.\left(\frac{\varpi}{n} - z\right);$$

$$\pm \sin.\left(\frac{\varpi}{n} + z\right) = \pm \sin.\left(\frac{(n-1)\varpi}{n} - z\right);$$

$$\pm \sin.\left(\frac{2\varpi}{n} - z\right) = \pm \sin.\left(\frac{(n-2)\varpi}{n} + z\right);$$

ꝛc.

Man kann demnach, wenn die Sinus der Größe und Lage nach betrachtet werden, die Werthe für x, wenn n eine ungerade Zahl bedeutet, auch durch

$$\sin. z\,; + \sin.\left(\frac{\varpi}{n} - z\right); - \sin.\left(\frac{\varpi}{n} + z\right); - \sin.\left(\frac{2\varpi}{n} - z\right);$$

$$+ \sin.\left(\frac{2\varpi}{n} + z\right); + \sin.\left(\frac{3\varpi}{n} - z\right); - \sin.\left(\frac{3\varpi}{n} + z\right);$$

$$- \sin.\left(\frac{4\varpi}{n} - z\right); + \sin.\left(\frac{4\varpi}{n} + z\right); + \text{ꝛc.}$$

und wenn n eine gerade Zahl ist, auch durch

$$\pm \sin. z\,; \pm \sin.\left(\frac{\varpi}{n} - z\right); \pm \sin.\left(\frac{\varpi}{n} + z\right); \pm \sin.\left(\frac{2\varpi}{n} - z\right) \text{ꝛc.}$$

aus=

ausdrucken. Im ersten Falle findet man bey einigem Nachdenken überdem auch bald, daß die Anzahl der negativen Werthe jedesmal die kleinere Hälfte von n, und folglich allezeit eine gerade Zahl ist.

9. Bringt man nunmehr den Werth $y = \sqrt{(1 - xx)}$ in die Gleichung

$$\sin. nz =$$
$$x(2^{n-1}y^{n-1} - (n-2)2^{n-3}y^{n-3} + \frac{(n-3)(n-4)}{1 \cdot 2} 2^{n-5}y^{n-5} - \text{rc.})$$

wobey es am besten ist, daß man den von Eulern eingeschlagenen Werth betritt; so erhält man, wenn n eine ungerade Zahl ist, eine rationale Gleichung von n, und wenn n eine gerade Zahl ist, eine rationale Gleichung von 2n Dimensionen. Von diesen Gleichungen sind also aus dem Vorhergehenden alle Wurzeln aufs vollkommenste bekannt, weil die Anzahl derselben im ersten Falle $= n$, und im andern $= 2n$ ist, und man kann also nun diese Wurzeln mit den Gliedern der Gleichung mit vollkommener Sicherheit vergleichen.

10. Dadurch, daß die Wurzeln der gedachten Gleichungen in dem Vorhergehenden auf mehr denn eine Art bestimmt sind, wird diese Vergleichung sehr erleichtert. So sieht man z. B. den Grund von den im dritten Exempel, S. 276. stehenden Gleichungen darnach sehr bald, so wie daraus auch die Gleichung des 240sten §. leicht gefunden werden kann. Bey dieser Gleichung kann außerdem der Gebrauch der absoluten Werthe von x von Nutzen seyn, zumal, wenn man davon die Anwendung machen will, deren Euler im 241 und 245sten §. gedenkt. Uebrigens finde ich nicht nöthig, auf eine ähnliche Art die Wurzeln der Gleichung zu betrachten, welche Euler im 243sten § mitgetheilt hat, um darauf die Betrachtung der Cosinus viel-

facher Winkel zu gründen; denn wer das Bisherige mit Aufmerksamkeit gelesen hat, muß die dabey nöthigen Ueberlegungen selbst anstellen können.

C. Einige Sätze von Bogen, die in einer geometrischen Progression fortgehen.

1. Die Sätze von den Bogen und ihren Sinus, Cosinus, Tangenten, Secanten u. s. f., welche das vierzehnte Capitel des ersten Theils der Eulerischen Einleitung in die Analysis des Unendlichen enthält, beruhen auf der Betrachtung solcher Bogen oder Winkel, die in einer arithmetischen Progression fortschreiten. Man kann ihre Anzahl beträchtlich vermehren, wenn man dazu die Untersuchung solcher Winkel setzt, die in einer geometrischen Progression stehen; und es wird nicht undienlich seyn, einige von den Sätzen, worauf diese Untersuchung der Bogen führt, aus Eulers Opusculis analyticis, und zwar aus der Abhandlung im ersten Theile, welche den Titel: Variae observationes circa angulos in progressione geometrica progredientes, führt, herzusetzen.

2. Da

$$\sin. 2\varphi = 2 \sin. \varphi. \cos. \varphi$$

ist, so wird, wenn s irgend einen Winkel bedeutet,

$$\sin. s = 2 \sin. \tfrac{1}{2} s. \cos. \tfrac{1}{2} s$$
$$\sin. \tfrac{1}{2} s = 2 \sin. \tfrac{1}{4} s. \cos. \tfrac{1}{4} s$$
$$\sin. \tfrac{1}{4} s = 2 \sin. \tfrac{1}{8} s. \cos. \tfrac{1}{8} s$$
$$\sin. \tfrac{1}{8} s = 2 \sin. \tfrac{1}{16} s. \cos. \tfrac{1}{16} s$$

rc.

Hieraus fließt

$$\sin. s = 16. \sin. \tfrac{1}{16} s. \cos. \tfrac{1}{2} s. \cos. \tfrac{1}{4} s. \cos. \tfrac{1}{8} s. \cos. \tfrac{1}{16} s$$

und überhaupt

wenn i eine unendlich große Potestät der 2 bedeutet,

sin.

$$\sin. s = i. \sin. \frac{s}{i}. \cos. \tfrac{1}{2} s. \cos. \tfrac{1}{4} s. \cos. \tfrac{1}{8} s. \cos. \tfrac{1}{16} s. \text{ rc.}$$

oder

$$\sin. s = s. \cos. \tfrac{1}{2} s. \cos. \tfrac{1}{4} s. \cos. \tfrac{1}{8} s. \cos. \tfrac{1}{16} s. \cos. \tfrac{1}{32} s. \text{ rc.}$$

weil $\sin. \frac{s}{i}$, wegen der unendlichen Größe von i, $= \frac{s}{i}$, und

also $i. \sin. \frac{s}{i} = s$ ist.

3. Hieraus ergiebt sich

$$s = \frac{\sin. s}{\cos. \tfrac{1}{2} s. \cos. \tfrac{1}{4} s. \cos. \tfrac{1}{8} s. \cos. \tfrac{1}{16} s. \cos. \tfrac{1}{32} s \text{ rc.}}$$

oder

$$s = \sin. s. \sec. \tfrac{1}{2} s. \sec. \tfrac{1}{4} s. \sec. \tfrac{1}{8} s. \sec. \tfrac{1}{16} s. \sec. \tfrac{1}{32} s. \text{ rc.}$$

und daraus erhält man, wenn man die Logarithmen nimmt,

$$l s = l \sin. s + l \sec. \tfrac{1}{2} s + l \sec. \tfrac{1}{4} s + l \sec. \tfrac{1}{8} s + l \sec. \tfrac{1}{16} s + \text{rc.}$$

4. Setzt man $s = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$, so wird

$$l \frac{\pi}{2} = 0 + l \sec. 45^\circ + l \sec. 22^\circ, 30' + l \sec. 11^\circ, 15' + \text{rc.}$$

Da nun

$l \sec. 45^\circ$	$= 0,1505150$
$l \sec. 22^\circ, 30'$	$= 0,0343847$
$l \sec. 11^\circ, 15'$	$= 0,0084261$
$l \sec. 5^\circ, 37\tfrac{1}{2}'$	$= 0,0020963$
$l \sec. 2^\circ, 48\tfrac{3}{4}$	$= 0,0005235$
$l \sec. 1^\circ, 24\tfrac{3}{8}$	$= 0,0001309$
$l \sec. 0^\circ, 42\tfrac{3}{16}$	$= 0,0000327$
$l \sec. 0^\circ, 21\tfrac{3}{32}$	$= 0,0000082$

und die Summe der übrigen $= 0,0000027$ ist, so wird

$$l \frac{\pi}{2} = 0,1961201, \text{ und da}$$

$$l\,2 = 0,3010300,$$

$$l\,\pi = 0,4971501, \text{ und folglich}$$
$$\pi = 3,1415941.$$

5. Ferner ist aus

$$4(\sin.\phi)^3 = 3\sin.\phi - \sin.3\phi,$$

Cap. 8. §. 130. Anmerkung,

$$\sin.3\phi = 3\sin.\phi - 4\sin.\phi^3 = 3\sin.\phi(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\phi^2).$$

Bedeutet daher s irgend einen Bogen, so wird

$$\sin.s = 3\sin.\tfrac{1}{3}s(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\frac{s^2}{3})$$

$$\sin.\tfrac{1}{3}s = 3\sin.\frac{s}{9}(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\frac{s^2}{9})$$

$$\sin.\frac{s}{9}s = 3\sin.\frac{s}{27}(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\frac{s^2}{27})$$

rc.

und folglich, wenn man auf diese Art fortfährt

$$\sin.s = s(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\frac{s^2}{3})(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\frac{s^2}{9})(1 - \tfrac{4}{3}\sin.\frac{s^2}{27})\text{ rc.}$$

6. Es lassen sich aber diese zusammengesetzten Faktoren auf folgende Art einfacher ausdrucken. Da

$$\sin.\phi^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\cos.2\phi$$

ist (Cap. 8. §. 130. Anmerk.) so wird

$$1 - \tfrac{4}{3}\sin.\phi^2 = \tfrac{1}{3} + \tfrac{2}{3}\cos.2\phi = \frac{2\cos.60^0 + 2\cos.2\phi}{3}$$

Nun ist

$$\cos.a + \cos.b = 2(\cos.\frac{a+b}{2})(\cos.\frac{a-b}{2}), \text{ §. 131.}$$

folglich

$$\cos.60^0 + \cos.2\phi = 2\cos.(30^0 + \phi)\cos.(30^0 - \phi)$$

und daher

$$1 - \tfrac{4}{3}\sin.\phi^2 = \tfrac{2}{3}(\cos.60^\circ + \cos.2\phi) = \tfrac{4}{3}\cos.(30^\circ + \phi)$$
$$(\cos.30^\circ - \phi)$$

Bringt man diese Werthe in die vorhin gefundene Formel, so bekommt man

$$\frac{\sin.s}{s} = \frac{4}{3}\cos.(30^\circ + \frac{s}{3})\cos.(30^\circ - \frac{s}{3})$$
$$\frac{4}{3}\cos.(30^\circ + \frac{s}{9})\cos.(30^\circ - \frac{s}{9})$$
$$\frac{4}{3}\cos.(30^\circ + \frac{s}{27})\cos.(30^\circ - \frac{s}{27})$$
$$\text{etc.}$$

und, wenn man die Secanten braucht,

$$\frac{s}{\sin.s} = \frac{3}{4}\sec.(30^\circ + \frac{s}{3})\sec.(30^\circ - \frac{s}{3})$$
$$\frac{3}{4}\sec.(30^\circ + \frac{s}{9})\sec.(30^\circ - \frac{s}{9})$$
$$\frac{3}{4}\sec.(30^\circ + \frac{s}{27})\sec.(30^\circ - \frac{s}{27})$$
$$\text{etc.}$$

7. Diesen beyden Beyspielen ein drittes von den Tangenten beyzufügen, so ist aus dem 249sten § des 14ten Capitels, wenn man $\tang.\phi = t$ setzt,

$$\tang.3\phi = \frac{3t - t^3}{1 - 3tt}, \text{ und folglich}$$

$$\cot.3\phi = \frac{1 - 3tt}{3t - t^3}, \text{ und } 3\cot.3\phi = \frac{3 - 9tt}{t(3 - tt)}.$$

Da nun $\cot.\phi = \frac{1}{t}$ ist, so findet man daraus

$$3\cot.3\phi - \cot.\phi = \frac{-8tt}{t(3 - tt)} = \frac{-8t}{3 - tt}$$

und wenn man $t = \frac{\sin.\phi}{\cos.\phi}$ setzt,

$$3\,\text{cot.}\,3\varphi - \text{cot.}\,\varphi = \frac{-8\,\text{sin.}\,\varphi.\,\text{cos.}\,\varphi}{3\,\text{cos.}\,\varphi^2 - \text{sin.}\,\varphi^2}.$$

Ferner ist

$$\text{cos.}\,\varphi^2 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,2\varphi, \text{ und}$$
$$\text{sin.}\,\varphi^2 = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}\,\text{cos.}\,2\varphi$$

folglich

$$3\,\text{cos.}\,\varphi^2 - \text{sin.}\,\varphi^2 = 1 + 2\,\text{cos.}\,2\varphi = 2(\text{cos.}\,60^\circ + \text{cos.}\,2\varphi)$$
$$= 4\,\text{cos.}\,(30^\circ + \varphi)\,\text{cos.}\,(30^\circ - \varphi)$$

weil $\text{cos.}\,a + \text{cos.}\,b = 2\,\text{cos.}\,\frac{a+b}{2}.\,\text{cos.}\,\frac{a-b}{2}$ ist, und dabey hat man

$$-8\,\text{sin.}\,\varphi.\,\text{cos.}\,\varphi = -4\,\text{sin.}\,2\varphi, \text{ §. 129. Anmerk.}$$

Da nun überhaupt

$$\text{sin.}\,2\varphi = \text{sin.}\,(a + \varphi)\,\text{cos.}\,(a - \varphi) - \text{cos.}\,(a + \varphi)\,\text{sin.}\,(a - \varphi)$$

ist, so wird, wenn man $a = 30^\circ$ setzt,

$$3\,\text{cot.}\,3\varphi - \text{cot.}\,\varphi =$$
$$-\frac{\text{sin.}\,(30^\circ + \varphi)\,\text{cos.}\,(30^\circ - \varphi) + \text{cos.}\,(30^\circ + \varphi)\,\text{sin.}\,(30^\circ - \varphi)}{\text{cos.}\,(30^\circ + \varphi)\,\text{cos.}\,(30^\circ - \varphi)}$$
$$=$$
$$-\text{tang.}\,(30^\circ + \varphi) + \text{tang.}\,(30^\circ - \varphi)$$

und es ist folglich

$$\text{cot.}\,3\varphi = \tfrac{1}{3}\,\text{cot.}\,\varphi - \tfrac{1}{3}\,\text{tang.}\,(30^\circ + \varphi) + \tfrac{1}{3}\,\text{tang.}\,(30^\circ - \varphi)$$

8. Setzt man also s anstatt 3φ, so erhält man

$$\text{cot.}\,s = \frac{1}{3}\,\text{cot.}\,\frac{s}{3} - \frac{1}{3}\,\text{tang.}\,(30^\circ + \frac{s}{3}) + \frac{1}{2}\,\text{tang.}\,(30^\circ - \frac{s}{3})$$

und auf eine ähnliche Art ist denn auch

$$\frac{1}{3}\,\text{cot.}\,\frac{s}{3} = \frac{1}{9}\,\text{cot.}\,\frac{s}{9} - \frac{1}{9}\,\text{tang.}\,(30^\circ + \frac{s}{9}) + \frac{1}{9}\,\text{tang.}\,(30^\circ - \frac{s}{9})$$
$$\frac{1}{9}\,\text{cot.}\,\frac{s}{9} = \frac{1}{27}\,\text{cot.}\,\frac{s}{27} - \frac{1}{27}\,\text{tang.}\,(30^\circ + \frac{s}{27}) + \frac{1}{27}\,\text{tang.}\,(30^\circ - \frac{s}{27})$$

ꝛc.

Geht

Geht man auf diese Art ohne Ende fort, so wird endlich

$$\frac{1}{i}\cot.\frac{s}{i} = \frac{\cos.\frac{s}{i}}{\sin.\frac{s}{i}}$$

und folglich

$$\cot. s = \begin{cases} -\frac{1}{3}\tang.(30^\circ + \frac{s}{3}) - \frac{1}{9}\tang.(30^\circ + \frac{s}{9}) - \\ \quad \frac{1}{27}\tang.(30^\circ + \frac{s}{27}) \ldots\ldots \frac{1}{s} \\ +\frac{1}{3}\tang.(30^\circ - \frac{s}{3}) + \frac{1}{9}\tang.(30^\circ - \frac{s}{9}) + \\ \quad \frac{1}{27}\tang.(30^\circ - \frac{s}{27}) \ldots\ldots \end{cases}$$

Es ist daher

$$\frac{1}{s} = \cot. s + \frac{1}{3}\tang.(30^\circ + \frac{s}{3}) + \frac{1}{9}\tang.(30^\circ + \frac{s}{9}) +$$
$$\frac{1}{27}\tang.(30^\circ + \frac{s}{27}) + \text{rc.}$$
$$-\frac{1}{3}\tang.(30^\circ - \frac{s}{3}) - \frac{1}{9}\tang.(30^\circ - \frac{s}{9}) -$$
$$\frac{1}{27}\tang.(30^\circ - \frac{s}{27}) + \text{rc.}$$

9. Diese Formel hat Euler in der Abhandlung, woraus das Vorhergehende insgesammt entlehnt ist, auch aus der Formel

$$\frac{s}{\sin. s} = \frac{3}{4}\sec.(30^\circ + \frac{s}{3})\sec.(30^\circ - \frac{s}{3})$$
$$\frac{3}{4}\sec.(30^\circ + \frac{s}{9})\sec.(30^\circ - \frac{s}{9})$$
$$\frac{3}{4}\sec.(30^\circ + \frac{s}{27})\sec.(30^\circ - \frac{s}{27})$$
$$\text{rc.}$$

durch die Differentiation gefunden, und außerdem folgende aus

$$\sin.4\varphi = 8\sin.\varphi.\cos.(45^\circ + \varphi)\cos.(45^\circ - \varphi)\cos.\varphi$$

und

$$\sin.5\varphi = 16\sin.\varphi.\cos.(18^\circ + \varphi)\cos.(18^\circ - \varphi)\cos.(54^\circ + \varphi)\cos.(54^\circ - \varphi)$$

fließende Formeln mitgetheilt:

$$\frac{1}{s} = \cot.s + \frac{1}{4}\tan g.\frac{s}{4} + \frac{1}{16}\tan g.\frac{s}{16} + \frac{1}{64}\tan g.\frac{s}{64} \text{ ꝛc.}$$
$$+ \frac{1}{4}\tan g.\left(45^\circ + \frac{s}{4}\right) + \frac{1}{16}\tan g.\left(45^\circ + \frac{s}{16}\right) + \frac{1}{64}\tan g.\left(45^\circ + \frac{s}{64}\right) + \text{ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{4}\tan g.\left(45^\circ - \frac{s}{4}\right) - \frac{1}{16}\tan g.\left(45^\circ - \frac{s}{16}\right) - \frac{1}{64}\tan g.\left(45^\circ - \frac{s}{64}\right) - \text{ꝛc.}$$

$$\frac{1}{s} = \cot.s + \frac{1}{5}\tan g.\left(18^\circ + \frac{s}{5}\right) + \frac{1}{25}\tan g.\left(18^\circ + \frac{s}{25}\right) \text{ ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{5}\tan g.\left(18^\circ - \frac{s}{5}\right) - \frac{1}{25}\tan g.\left(18^\circ - \frac{s}{25}\right) \text{ ꝛc.}$$
$$+ \frac{1}{5}\tan g.\left(54^\circ + \frac{s}{5}\right) + \frac{1}{25}\tan g.\left(54^\circ + \frac{s}{25}\right) \text{ ꝛc.}$$
$$- \frac{1}{5}\tan g.\left(54^\circ - \frac{s}{5}\right) - \frac{1}{25}\tan g.\left(54^\circ - \frac{s}{25}\right) \text{ ꝛc.}$$