Leonhard Eulers Einleitung in die Analysis des Unendlichen

Euler, Leonhard

Berlin, 1788

XVI. Zusätze zum sechszehnten Capitel.

XVI.

Zusätze zum sechszehnten Capitel.

A. Inhalt dieses Capitels.

Von der Theilung der Zahlen.

1. Von der Theilung der Zahlen überhaupt, wo gezeigt gezeigt wird, daß die Entwickelung der Produkte:

$$(1 + x^{\alpha}z)(1 + x^{\beta}z)(1 + x^{\gamma}z)(1 + x^{\delta}z)(1 + x^{\epsilon}z) \text{ ꝛc.}$$

und

$$\frac{1}{(1 - x^{\alpha}z)(1 - x^{\beta}z)(1 - x^{\gamma}z)(1 - x^{\delta}z)(1 - x^{\epsilon}z) \text{ ꝛc.}}$$

auf Reihen führe, woraus man erkennen kann, nicht nur, auf wie vielerley Arten eine Zahl n die Summe von m verschiedenen Gliedern der Reihe $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \epsilon$ ꝛc. seyn, sondern auch auf wie vielerley Arten eine Zahl n aus m entweder gleichen oder verschiedenen Gliedern der angeführten Reihe durch die Addition entstehen kann, §. 297 — 305. Hierbey betrachtet Euler

2. die Reihe, die aus dem Produkte $(1 + x^{\alpha}z)(1 + x^{\beta})z$ $(1 + x^{\gamma}z)$ ꝛc. entspringt, §. 297 — 301, und zwar

   α. die daher entspringende ganz allgemeine Reihe, §. 297 — 299.

   β. die daher entstehenden besondern Reihen, §. 300 — 301, wenn man aa. für α, β, γ, δ, ε, ꝛc. die natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ꝛc. §. 300, und

bb. außerdem auch noch $z = 1$ setzt, §. 301.

b. die Reihe, die aus dem Produkte $\frac{1}{(1-x^{\alpha}z)(1-x^{\beta}z)(1-x^{\gamma}z)\text{ꝛc.}}$ entspringt, §. 302 — 305, und dabey wieder

α. die daher sich ergebende allgemeine Reihe, §. 302, 303.

β. die daher entspringenden besondern Reihen, §. 304, 305, wenn man

aa. für α, β, γ, δ, ε, ꝛc. die natürlichen Zahlen, §. 304, und

bb. außerdem noch $z = 1$ setzt, §. 305.

2. Von der Art und Weise, die Menge der Zusammensetzungen gegebener Zahlen aus den natürlichen Zahlen zu bestimmen, genauer betrachtet, wo gezeigt wird, daß es leicht sey, anzugeben, auf wie viel Arten sich eine Zahl entweder in m ungleiche, oder überhaupt in m Theile theilen lasse, wofern man nur wisse, auf wie viel Arten jede Zahl aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden könne, §. 306 bis 315. Hier werden

a. folgende zwey Sätze bewiesen:

α. Auf eben so viel Arten, als man eine Zahl n durch die Addition aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 .... m hervorbringen kann, auf eben so viele Arten läßt sich auch die Zahl $n + \frac{m(m+1)}{1.2}$ in m ungleiche Theile theilen, §. 306 — 312, und dabey werden

aa. die Coefficienten der Glieder der Reihe $1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 + \text{ꝛc.} = (1+xz)(1+x^2z)(1+x^3z)(1+x^4z)\text{ꝛc.}$ durch Funktionen von x ausgedruckt, §. 306, 307.

bb. daraus verschiedene specielle, unter dem angeführten begriffene Sätze abgeleitet, §. 308 – 311, und

cc. hierauf der gedachte allgemeine Satz gegründet, §. 312.

β. Auf eben so viel Arten, als man eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4 .... m durch die Addition hervorbringen kann, auf eben so viel Arten läßt sich auch die Zahl n + m in m Theile theilen, §. 313, 314. Auch hier werden

aa. die Coefficienten der Glieder der Reihe $1 + Pz + Qz^2 + Rz^3 + Sz^4 +$ rc. $= \frac{1}{(1-xz)(1-x^2z)(1-x^3z)}$ rc. durch Funktionen von x ausgedruckt, §. 313,

bb. daraus verschiedene specielle, unter dem angeführten allgemeinen begriffene Sätze abgeleitet, §. 314,

cc. hierauf der gedachte allgemeine Satz gegründet, §. 314.

b. werden aus den vorhergehenden Sätzen andere abgeleitet, welche lehren, auf wie viel Arten sich eine Zahl entweder in m ungleiche oder überhaupt in m Theile theilen läßt, wenn bekannt ist, auf wie vielerley Arten eine Zahl aus den Zahlen 1, 2, 3, 4....m durch die Addition hervorgebracht werden kann. §. 315.

3. Methode, die Menge der Arten, auf welche eine Zahl n aus den Zahlen 1, 2, 3, 4, ... m durch die Addition hervorgebracht werden kann, durch Formirung widerkehrendender Reihen zu finden, §. 316 – 318.

a. diese Methode überhaupt beschrieben, §. 316.
b. daraus abgeleitetes leichteres Verfahren, nebst der Beschreibung einer hiernach verfertigen Tabelle, §. 317, 318.

4. Verschiedene speciellere Betrachtungen, §. 319 — 332.
a. Vergleichung die in der vorhin gedachten Tabelle, und zwar in den Vertical-Reihen derselben stehende Zahlen mit den natürlichen Zahlen, den Trigonal-den Pyramidal-Zahlen, u. s. w. §. 319 — 322.
b. Ueber die Arten, auf welche eine Zahl durch die Addition der ungeraden Zahlen entstehen kann, §. 323 bis 327.
c. Von der Zusammensetzung der ganzen Zahlen aus den Potestäten der 2 und der 3. §. 328 — 331.

B. Zusatz zu §. 318.

1. Die bequemste Art, die im § gedachte Tabelle nach der Regel N = L + M zu verfertigen, wird sich am besten an folgender Tabelle erläutern lassen. Setzt man

$$\mathfrak{P} = \frac{1}{1-x} \qquad \mathfrak{Q} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)}$$

$$\mathfrak{R} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} \quad \mathfrak{S} = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)}$$

2c.

so ist:

	1,	x,	x^2,	x^3,	x^4,	x^5,	x^6,	x^7,	x^8,	x^9,	x^{10},	
P =	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1 +	1	+
			1	1	2	2	3	3	4	4	5	
Q =	1 +	1 +	2 +	2 +	3 +	3 +	4 +	4 +	5 +	5 +	6	+
				1	1	2	3	4	5	7	8	
R =	1 +	1 +	2 +	3 +	4 +	5 +	7 +	8 +	10 +	12 +	14	+
					1	1	2	3	5	6	9	
S =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	6 +	9 +	11 +	15 +	18 +	23	+
						1	1	2	3	5	7	
T =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	10 +	13 +	18 +	23 +	30	+
							1	1	2	3	5	
U =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	14 +	20 +	26 +	35	+
								1	1	2	3	
X =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	21 +	28 +	38	+
									1	1	2	
Y =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	29 +	40	+
										1	1	
Z =	1 +	1 +	2 +	3 +	5 +	7 +	11 +	15 +	22 +	30 +	41	+
											1	

rc.

Läßt man nemlich n^{*m*} die Menge der Arten anzeigen, auf welche die Zahl n aus den Zahlen $1, 2, 3, 4 \ldots\ldots m$ durch die Addition hervorgebracht werden kann, so verwandelt sich die Regel $N = L + M$ in folgende:

$$n^{*m*} = n^{*m-1*} + (n-m)^{*m*}$$

wobey aber zu bemerken ist, daß der Ausdruck $(n-m)^{*m*} = 0$ wird, wenn n kleiner als m ist, und daß $(n-m)^{*m*} = 0^{*m*}$, wenn $n = m$ wird, desgleichen $1^{*m*} = 1$ gesetzt werden muß. Außerdem ist auch, da keine Zahl aus bloßen Einheiten

x^{11},	x^{12},	x^{13},	x^{14},	x^{15},	x^{16},	x^{17},	x^{18}	ꝛc.
1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ 1	+ ꝛc.
5	6	6	7	7	8	8	9	
6	+ 7	+ 7	+ 8	+ 8	+ 9	+ 9	+ 10	+ ꝛc.
10	12	14	16	19	21	24	27	
16	+ 19	+ 21	+ 24	+ 27	+ 30	+ 33	+ 37	+ ꝛc.
11	15	18	23	27	34	39	47	
27	+ 34	+ 39	+ 47	+ 54	+ 64	+ 72	+ 84	+ ꝛc.
10	13	18	23	30	37	47	57	
37	+ 47	+ 57	+ 70	+ 84	+ 101	+ 119	+ 141	+ ꝛc.
7	11	14	20	26	35	44	58	
44	+ 58	+ 71	+ 90	+ 110	+ 136	+ 163	+ 199	+ ꝛc.
5	7	11	15	21	28	38	49	
49	+ 65	+ 82	+ 105	+ 131	+ 164	+ 201	+ 248	+ ꝛc.
3	5	7	11	15	22	29	40	
52	+ 70	+ 89	+ 116	+ 146	+ 186	+ 230	+ 288	+ ꝛc.
2	3	5	7	11	15	22	30	
54	+ 73	+ 94	+ 123	+ 157	+ 201	+ 252	+ 318	+ ꝛc.
1	2	3	5	7	11	15	22	

ꝛc.

heiten auf mehr denn eine Art entstehen kann, allemal $n^{*1*} = 1$. Dies vorausgesetzt, so hat

die Reihe,	das allgem. Glied,	die Reihe,	das allgem. Glied,
P	$n^{*1*} = 1$	S	$n^{*4*} = n^{*3*} + (n-4)^{*4*}$
Q	$n^{*2*} = 1 + (n-2)^{*2*}$	T	$n^{*5*} = n^{*4*} + (n-5)^{*5*}$
R	$n^{*3*} = n^{*2*} + (n-3)^{*3*}$	U	$n^{*6*} = n^{*5*} + (n-6)^{*6*}$
		ꝛc.	

Um also aus der Reihe P die Reihe Q zu bekommen, darf man nur zu jedem nten Gliede der Reihe P, oder zu 1, das (n — 2)te Glied der Reihe Q; um aus der Reihe Q die Reihe R zu erhalten, zu jedem nten Gliede der Reihe Q des (n — 3)te Glied der Reihe R; um aus der Reihe R die Reihe S zu finden, zu jedem nten Gliede der Reihe R das (n — 4)te Glied der Reihe S setzen, u. s. f. Um also aus der (r — 1)ten Reihe die rte Reihe zu finden, addirt man zu jedem nten Gliede der (r — 1)ten Reihe das (n — r)te Glied der rten Reihe, und es sind folglich die ersten r Glieder beyder Reihen allemal einander gleich. Ferner findet man die zweyten r Glieder der rten Reihe, wenn man ihre ersten r Glieder unter die zweyten r Glieder der (r — 1)ten Reihe setzt, und beyde zusammen addirt; die dritten r Glieder der rten Reihe, wenn man ihre zweyten r Glieder unter die dritten r Glieder der (r — 1)ten Reihe setzt und beyde wieder zusammenaddirt u. s. w.

2. Die Regel: $N = L + M$, oder: $n^{*m*} = n^{*m-1*} + (n-m)^{*m*}$ läßt sich auch auf folgende Art finden. Wenn man unter n alle ganze Zahlen in ihrer natürlichen Folge versteht, so ist

$$P = \frac{1}{1-x} = n^{*1*}x^n$$

$$Q = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)} = n^{*2*}x^n$$

$$R = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)} = n^{*3*}x^n$$

und überhaupt

$$Y = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^{m-1})} = n^{*m-1*}x^n$$

$$Z = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\ldots(1-x^m)} = n^{*m*}x^n$$

Da

Da aber auch $\mathfrak{P} = \mathfrak{Q}(1 - x^2)$; $\mathfrak{Q} = \mathfrak{R}(1 - x^3)$; ꝛc. und $\mathfrak{Y} = \mathfrak{Z}(1 - x^m)$ ist, so wird hieraus, wenn man für $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{Y}$, $\mathfrak{Z}$ die aus ihren allgemeinen Gliedern entspringende Reihen setzt, die zweyte Hälfte der auf diese Art entstehenden Gleichungen entwickelt, und darauf die gleich hohen Potestäten beyder Hälften mit einander vergleicht,

$n^{*1*}x^n = (n^{*2*} - (n-2)^{*2*})x^n$

$n^{*2*}x^n = (n^{*3*} - (n-3)^{*3*})x^n$, und überhaupt

$n^{*m-1*}x^n = (n^{*m*} - (n-m)^{*m*})x^n$; folglich

$n^{*2*} = n^{*1*} + (n-2)^{*2*}$

$n^{*3*} = n^{*2*} + (n-3)^{*3*}$, und überhaupt

$n^{*m*} = n^{*m-1*} + (n-m)^{*m*}$.

3. Die bey S. 348. befindliche Tabelle kann auch dann gebraucht werden, wenn n größer ist als 59. Es sey z. B. $n = 60$ und $m = 20$, so ist nach der Regel $n^{*m*} = n^{*m-1*} + (n-m)^{*m*}$

$$60^{*20*} = 60^{*19*} + 40^{*20*};\ 60^{*19*} = 60^{*18*} + 41^{*19*};\ 60^{*18*} = 60^{*17*} + 42^{*18*} \text{ ꝛc.}$$

und folglich

$$60^{*20*} = 40^{*20*} + 41^{*19*} + 42^{*18*} + 43^{*17*} + \ldots \ldots\ldots 59^{*1*}$$

Sucht man diese Werthe in der Tabelle auf, so findet man $60^{*20*} = 791131$. Ist indeß der Unterschied zwischen der gegebenen Zahl und der höchsten in der Tabelle nur einigermaßen groß, so wird dieser Weg sehr beschwerlich.

C. Zusatz zu §. 323.

1. Daß die Vertical-Reihen der Tabelle S 348. alle auf einerley Art anfangen, und immer mehrere Glieder mit einander gemein haben, je größer die über ihnen stehende Zifer ist, davon fällt der Grund aus der Absatz 1 des vorhergehenden Zusatzes beschriebenen Verfertigungsart dieser

Tabelle sehr bald in die Augen. So wie nun n^{*1*} das allgemeine Glied der Vertical Reihe I, n^{*2*} das allgemeine Glied der Vertical-Reihe II; n^{*3*} das allgemeine Glied der Vertical-Reihe III u. s. w. ist: so läßt sich auch eine Reihe denken, deren allgemeines Glied $n^{*\infty*}$ ist, und diese Reihe ist dem Anfange nach diejenige, die in der Tabelle unter ∞ steht. Da in dieser Reihe für jeden Werth von n, doch so, daß dafür bloß ganze absolute Zahlen gesetzt werden,

$$n^{*\infty*} = (n-1)^{*1*} + (n-2)^{*2*} + (n-3)^{*3*} + \ldots$$
$$\ldots (n-n)^{*n*}$$

seyn muß, indem $n^{*\infty*}$, weil keine Zahl n aus mehr als aus n Zahlen durch die Addition hervorgebracht werden kann, eigentlich $= n^{*n*} = n^{*n-1*} + (n-n)^{*n*} = n^{*n-2*} + (n-n+1)^{*n-1*} + (n-n)^{*n*} = n^{*n-3*} + (n-n+2)^{*n-2*} + (n-n+1)^{*n-1*} + (n-n)^{*n*}$ u. s. f. ist: so erhellet hieraus, daß und wie diese Reihe aus den vorhergehenden durch die Addition gemacht werden kann. So ist z. B. $6^{*\infty*} = 5^{*1*} + 4^{*2*} + 3^{*3*} + 2^{*4*} + 1^{*5*} + 0^{*6*} = 1 + 3 + 3 + 2 + 1 + 1 = 11$

2. Aus

$$n^{*\infty*} = (n-1)^{*1*} + (n-2)^{*2*} + (n-3)^{*3*} +$$
$$(n-4)^{*4*} + \text{rc.}$$

wird, wenn man allenthalben $n-1$ statt n setzt, und der Gleichförmigkeit wegen $(n-1)^{*0*} = 0$ dazu schreibt,

$$(n-1)^{*\infty*} = (n-1)^{*0*} + (n-2)^{*1*} + (n-3)^{*2*} +$$
$$(n-4)^{*3*} + \text{rc.}$$

Zieht man diese letzte Gleichung von der vorhergehenden ab, und verändert dabey die Differenz nach $n^{*m*} - n^{*m-1*} = (n-m)^{*m*}$, so wird

$$n^{*\infty*} - (n-1)^{*\infty*} = (n-2)^{*1*} + (n-4)^{*2*} +$$
$$(n-6)^{*3*} + (n-8)^{*4*} + \text{rc.}$$

Setzt

Setzt man ferner in dieser Reihe $(n-2)$ für n, so wird, wenn man wieder der Gleichförmigkeit wegen $(n-2)^{*0*}=0$ dazu setzt, die gefundene Reihe von ihr abzieht, und die Differenz ebenfalls wie vorhin abändert,

$$\left.\begin{array}{l} n^{*\infty*} - (n-1)^{*\infty*} \\ -(n-2)^{*\infty*} + (n-3)^{*\infty*} \end{array}\right\} = (n-3)^{*1*} + (n-6)^{*2*} + (n-9)^{*3*} + \text{ꝛc.}$$

oder

$$n^{*\infty*} = (n-1)^{*\infty*} + (n-2)^{*\infty*} - (n-3)^{*\infty*} + P$$

wenn man P die zweyte Hälfte der letzten Gleichung bedeuten läßt. Fährt man auf diesem Wege fort, so verschwindet endlich P, und dann wird jedes Glied der Reihe ∞ bloß durch die vorhergehenden Glieder bestimmt, und ist also eine wiederkehrende Reihe.

3. Die Beziehungs-Scale dieser Reihe findet man, wenn man den Nenner des Bruchs

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\text{ ꝛc.}}$$

entwickelt, indem sie selbst aus der Entwickelung dieses Bruchs entspringt; und es wird demnach

$$\begin{aligned} n^{*\infty*} = {} & (n-1)^{*\infty*} + (n-2)^{*\infty*} - (n-5)^{*\infty*} - \\ & (n-7)^{*\infty*} + (n-12)^{*\infty*} + (n-15)^{*\infty*} - \\ & (n-22)^{*\infty*} - (n-26)^{*\infty*} + (n-35)^{*\infty*} + \\ & (n-40)^{*\infty*} - (n-51)^{*\infty*} - (n-57)^{*\infty*} + \text{ꝛc.} \end{aligned}$$

4. Da diese Reihe für den Werth $m=20$ schon in der Tabelle steht, so kann man sich dadurch die Findung der Reihe für den Werth $m=\infty$ erleichtern. Denn da die Reihe n^{*20*} aus der Entwickelung dieses Bruchs

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots\ldots(1-x^{20})}$$

die Reihe $n^{*\infty*}$ aber aus der Entwickelung des Bruchs

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)(1-x^4)\ldots\ldots(1-x^\infty)}$$

entspringt: so ist offenbar, daß man die erste Reihe erhält, wenn man die letztere durch

$$(1-x^{21})(1-x^{22})(1-x^{23})(1-x^{24})(1-x^{25})(1-x^{26})\text{ꝛc.}$$

oder durch

$$\begin{aligned}
&1 - x^{21} - x^{22} - x^{23} - x^{24} - x^{25} - x^{26} - \text{ꝛc.}\\
&\quad + x^{43} + x^{44} + 2x^{45} + 2x^{46} + 3x^{47} + 3x^{48} + \text{ꝛc.}\\
&\quad - x^{66} - x^{67} - 2x^{68} - 3x^{69} - 4x^{70} - 5x^{71} - \text{ꝛc.}\\
&\quad + x^{90} + x^{91} + 2x^{92} + 3x^{93} + 5x^{94} + 6x^{95} + \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

multiplicirt. Hiernach wird

$$\begin{aligned}
n^{*20*} = n^{*\infty*} &- (n-21)^{*\infty*} - (n-22)^{*\infty*} -\\
&\qquad (n-23)^{*\infty*} - \text{ꝛc.}\\
&+ (n-43)^{*\infty*} + (n-44)^{*\infty*} + 2(n-45)^{*\infty*} +\\
&\qquad 2(n-46)^{*\infty*} + \text{ꝛc.}\\
&- (n-66)^{*\infty*} - (n-67)^{*\infty*} - 2(n-68)^{*\infty*} -\\
&\qquad 3(n-69)^{*\infty*} - \text{ꝛc.}\\
&+ (n-90)^{*\infty*} + (n-91)^{*\infty*} + 2(n-92)^{*\infty*} +\\
&\qquad 3(n-93)^{*\infty*} + \text{ꝛc.}\\
&\text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

Die Coefficienten dieser Reihen sind die Glieder der oben für die Theilung der Zahlen in 2, 3, 4, 5, 6, ꝛc. Theile gefundenen Reihen.

5. Bedeutet $\int(n-21)^{*\infty*}$ die Summe aller Glieder der Reihe $n^{*\infty*}$ bis und mit zu dem Gliede $(n-21)^{*\infty*}$, und überhaupt $\int p^{*\infty*}$ die Summe aller Glieder eben dieser Reihe bis und mit dem Gliede $p^{*\infty*}$: so wird

$$\begin{aligned}
n^{*20*} = n^{*\infty*} - \int(n-21)^{*\infty*} &+ \int(n-43)^{*\infty*} +\\
\int(n-45)^{*\infty*} &+ \int(n-47)^{*\infty*} + \text{ꝛc.}\\
- \int(n-66)^{*\infty*} &- \int(n-68)^{*\infty*} -\\
\int(n-69)^{*\infty*} &- \int(n-70)^{*\infty*} - \text{ꝛc.}
\end{aligned}$$

+

$$+ \text{ſ}(n-90)^{*\infty*} + \text{ſ}(n-92)^{*\infty*} + \text{ſ}(n-93)^{*\infty*} + 2\text{ſ}(n-94)^{*\infty*} + \text{ꝛc.}$$
$$\text{ꝛc.}$$

und es ist folglich

$$n^{*\infty*} = n^{*20*} + \text{ſ}(n-21)^{*\infty*} - \text{ſ}(n-43)^{*\infty*} - \text{ſ}(n-45)^{*\infty*} - \text{ꝛc.}$$
$$+ \text{ſ}(n-66)^{*\infty*} + \text{ſ}(n-68)^{*\infty*} + \text{ſ}(n-69)^{*\infty*} + \text{ꝛc.}$$
$$- \text{ſ}(n-90)^{*\infty*} - \text{ſ}(n-92)^{*\infty*} - \text{ſ}(n-93)^{*\infty*} - \text{ꝛc.}$$
$$\text{ꝛc.}$$

Vermittelst dieser Formel läßt sich die Reihe $n^{*\infty*}$, wenn n keine zu große Zahl ist, aus der Reihe n^{*20*} leicht berechnen.

D. Anwendung der Lehre von der Theilung der Zahlen auf einen besondern Fall.

1. Die Frage: Auf wie viel Arten kann eine gegebene Zahl N mit einer gegebenen Anzahl n gemeiner Würfel geworfen werden? ist gleichbedeutend mit dieser: Auf wie viel Arten kann die Zahl N in n Theile getheilt werden, wenn diese Theile 1, 2, 3, 4, 5, 6 seyn, und dabey nicht bloß auf die Theile an und für sich, sondern auch auf ihre Ordnung gesehen werden soll? und man findet also die Antwort darauf, wenn man

$$(x^1 + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n$$
$$=$$
$$x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} + Dx^{n+4} + \ldots + x^{6n}$$

setzt, und die Werthe von A, B, C, D, ꝛc. sucht. Denn ist ein Glied dieser Reihe Mx^N, so zeigt der Coefficient M an, auf wie viel Arten die Zahl N in n Theile getheilt werden kann, so daß diese Theile 1, 2, 3, 4, 5, 6 seyn, und also auch, auf wie viel Arten die Zahl N mit n Würfeln geworfen werden kann.

2. Wenn man einige leichte Sätze aus der Differential-Rechnung zu Hülfe nehmen darf, so kann man die Werthe von A, B, C, D, ꝛc. auf folgende Art finden. Man setze

$$x^n(1+x+x^2+x^3+x^4+x^5)^n$$
$$= V =$$
$$x^n(1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{ꝛc.})$$

und $\frac{V}{x^n}=Z$. Alsdann ist nicht nur

$$\frac{xdZ}{Zdx} = \frac{nx+2nx^2+3nx^3+4nx^4+5nx^5}{1+x+x^2+x^3+x^4+x^5}$$

sondern auch

$$\frac{xdZ}{Zdx} = \frac{Ax+2Bx^2+3Cx^3+4Dx^4+5Ex^5+\text{ꝛc.}}{1+Ax+Bx^2+Cx^3+Dx^4+Ex^5+\text{ꝛc.}}$$

und folglich, wenn man diese beyden Bestimmungen einander gleich setzt, und mit den Nennern überzwerg multiplicirt,

$$\begin{array}{llllllll}
nx & +nAx^2 & +nBx^3 & +nCx^4 & +nDx^5 & +nEx^6 & + \\
 & +2n & +2nA & +2nB & +2nC & +2nD & + \\
 & & +3n & +3nA & +3nB & +3nC & +\text{ꝛc.} \\
 & & & +4n & +4nA & +4nB & + \\
 & & & & +5n & +5nA & +
\end{array}$$

$$=$$

$$\begin{array}{lllllll}
Ax & +2Bx^2 & +3Cx^3 & +4Dx^4 & +5Ex^5 & +6Fx^6 & + \\
 & +A & +2B & +3C & +4D & +5E & + \\
 & & +A & +2B & +3C & +4D & + \\
 & & & +A & +2B & +3C & +\text{ꝛc.} \\
 & & & & +A & +2B & + \\
 & & & & & +A & +
\end{array}$$

Hieraus aber fließen folgende Bestimmungen:

$$A = n$$
$$2B = (n-1)A + 2n$$
$$3C = (n-2)B + (2n-1)A + 3n$$
$$4D = (n-3)C + (2n-2)B + (3n-1)A + 4n$$
$$5E = (n-4)D + (2n-3)C + (3n-2)B + (4n-1)A + 5n$$
$$6F = (n-5)E + (2n-4)D + (3n-3)C + (4n-2)B + (5n-1)A$$
$$7G = (n-6)F + (2n-5)E + (3n-4)D + (4n-3)C + (5n-2)B$$
$$8H = (n-7)G + (2n-6)F + (3n-5)E + (4n-4)D + (5n-3)C$$

rc.

so daß also jeder Coefficient durch die fünf vorhergehenden bestimmt wird.

3. Wenn man von jeder dieser Gleichungen die unmittelbar vorhergehende abzieht, so wird

$$A = n$$
$$2B = nA + n$$
$$3C = nB + nA + n$$
$$4D = nC + nB + nA + n$$
$$5E = nD + nC + nB + nA + n$$
$$6F = nE + nD + nC + nB + nA + 5n$$
$$7G = nF + nE + nD + nC + nB - (5n-1)A$$
$$8H = nG + nF + nE + nD + nC - (5n-2)B$$

rc.

und nimmt man nochmals die Differenzen, so erhält man

$$2B = (n+1)A;\ 3C = (n+2)B;\ 4D = (n+3)C;$$
$$5E = (n+4)D;\ 6F = (n+5)E - 6n;$$
$$7G = (n+6)F - (6n-1)A + 5n$$
$$8H = (n+7)G - (6n-2)B + (5n-1)A$$
$$9I = (n+8)H - (6n-3)C + (5n-2)B$$
$$10K = (n+9)I - (6n-4)D + (5n-3)C$$

rc.

4. Es ist also

für zwey Würfel	für drey Würfel
$A = 2$	3
$2B = 3A$	$4A$
$3C = 4B$	$5B$
$4D = 5C$	$6C$
$5E = 6D$	$7D$
$6F = 7E - 12$	$8E - 18$
$7G = 8F - 11A + 10$	$9F - 17A + 15$
$8H = 9G - 10B + 9A$	$10G - 16B + 14A$
$9I = 10H - 9C + 8B$	$11H - 15C + 13B$
$10K = 11I - 8D + 7C$	$12I - 14D + 12C$
$11L = 12K - 7E + 6D$	$13K - 13E + 11D$
$12M = 13L - 6F + 5E$	$14L - 12F + 10E$

2c.

5. Druckt man die Menge der Fälle, da N mit n Würfeln geworfen werden kann, durch $[N]^{*n*}$ aus, so daß $[n]^{*n*} = 1$; $[n+1]^{*n*} = A$; $[n+2]^{*n*} = B$; $[n+3]^{*n*} = C$; . . . . $[n+9]^{*n*} = I$; $[n+10]^{*n*} = K$ wird: so ist

$$10[n+10]^{*n*} = (n+9)[n+9]^{*n*} - (6n-4)[n+4]^{*n*} + (5n-3)[n-3]^{*n*}$$

und überhaupt

$$\lambda[n+\lambda]^{*n*} = (n+\lambda-1)[n+\lambda-1]^{*n*} - (6n+6-\lambda)[n+\lambda-6]^{*n*} + (5n+7-\lambda)[n+\lambda-7]^{*n*}$$

Setzt man also $n+\lambda = N$, und folglich $\lambda = N - n$, so wird

$$[N]^{*n*} = \frac{(N-1)[N-1]^{*n*} - (7n+6-N)[N-6]^{*n*} + (6n+7-N)[N-7]^{*n*}}{N-n}$$

wo indeß zu bemerken ist, daß $[P]^{*n*} = 0$ gesetzt werden muß, wenn P kleiner als n ist.

6.

6. Kennt man den Werth der Coefficienten A, B, C, D, 2c. für irgend eine Anzahl von Würfeln, so läßt sich daraus der Werth eben dieser Buchstaben für die um eins vermehrte Anzahl von Würfeln auf folgende Art bestimmen. Es sey

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^n = x^n + A x^{n+1} + B x^{n+2} + C x^{n+3} + D x^{n+4} + \text{2c.}, \text{ und}$$

$$(x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6)^{n+1} = x^{n+1} + \mathfrak{A} x^{n+2} + \mathfrak{B} x^{n+3} + \mathfrak{C} x^{n+4} + \mathfrak{D} x^{n+5} + \text{2c.}$$

so ist, weil dieser letzte Ausdruck dem Produkte aus dem ersten in $x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 + x^6$ gleich ist

$$\begin{array}{lcl}
\mathfrak{A} = A + 1 & \text{und} & \\
\mathfrak{B} = B + A + 1 & \text{folglich} & \mathfrak{B} = \mathfrak{A} + B \\
\mathfrak{C} = C + B + A + 1 & & \mathfrak{C} = \mathfrak{B} + C \\
\mathfrak{D} = D + C + B + A + 1 & & \mathfrak{D} = \mathfrak{C} + D \\
\mathfrak{E} = E + D + C + B + A + 1 & & \mathfrak{E} = \mathfrak{D} + E \\
\mathfrak{F} = F + E + D + C + B + A & & \mathfrak{F} = \mathfrak{E} + F - 1 \\
\mathfrak{G} = G + F + E + D + C + B & & \mathfrak{G} = \mathfrak{F} + G - A \\
 & \text{2c.} &
\end{array}$$

7. Die letzte Gleichung $\mathfrak{G} = \mathfrak{F} + G - A$ kann man auch auf diese Art ausdrucken:

$$[n + 8]^{*n+1*} = [n + 7]^{*n+1*} + [n + 7]^{*n*} - [n + 1]^{*n*}$$

Allgemein ist also

$$[n + 1 + \lambda]^{*n+1*} = [n + \lambda]^{*n+1*} + [n + \lambda]^{*n*} - [n + \lambda - 6]^{*n*}$$

oder

$$[N + 1]^{*n+1*} = [N]^{*n+1*} + [N]^{*n*} - [N - 6]^{*n*}$$

wenn man $n + \lambda = N$ setzt. Es ist aber hierbey allemal $[N - 6]^{*n*} = 0$, wenn $N - 6$ kleiner als N ist. Aus dieser letzten Formel erhellet, daß die Coefficienten A, B, C, D, 2c. allemal ganze Zahlen sind.

8. Will man jeden der Buchstaben A, B, C, D, 2c. an und für sich bestimmen, so ist

1

$$1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + x^5 = \frac{1 - x^6}{1 - x}$$

und also, wenn V die Absatz 2 ihm beygelegte Bedeutung behält,

$$V = \frac{x^n(1 - x^6)^n}{(1 - x)^n} = (1 - x^6)^n \times \frac{x^n}{(1 - x)^n} =$$

$$\left(1 - nx^6 + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2}x^{12} - \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{18} + \text{ꝛc.}\right) \times$$

$$\left(x^n + nx^{n+1} + \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}x^{n+2} + \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}x^{n+3} + \text{ꝛc.}\right)$$

Hieraus wird, wenn man dies Produkt entwickelt, die Glieder desselben mit der Reihe $x^n + Ax^{n+1} + Bx^{n+2} + Cx^{n+3} +$ ꝛc. vergleicht, und für A, B, C, D, ꝛc. die Absatz 5 stehenden Bezeichnungen braucht

$$[n]^{*n*} = 1$$

$$[n+1]^{*n*} = n$$

$$[n+2]^{*n*} = \frac{n(n+1)}{1 \cdot 2}$$

$$[n+3]^{*n*} = \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$[n+4]^{*n*} = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$[n+5]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+4)}{1 \cdot 2 \ldots 5}$$

$$[n+6]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+5)}{1 \cdot 2 \ldots 6} - n$$

$$[n+7]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+6)}{1 \cdot 2 \ldots 7} - nn$$

$$[n+8]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+7)}{1 \cdot 2 \ldots 8} - \frac{nn(n+1)}{1 \cdot 2}$$

$$[n+9]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+8)}{1 \cdot 2 \ldots 9} - \frac{nn(n+1)(n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Tabelle zu S. 620. 621.

welche anzeigt

wie oft die Zahl N mit n gemeinen Würfeln geworfen werden kann.

N	n=1	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7	n=8
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0
4	1	3	3	1	0	0	0	0
5	1	4	6	4	1	0	0	0
6	1	5	10	10	5	1	0	0
7	0	6	15	20	15	6	1	0
8	0	5	21	35	35	21	7	1
9	0	4	25	56	70	56	28	8
10	0	3	27	80	126	126	84	36
11	0	2	27	104	205	252	210	120
12	0	1	25	125	305	456	462	330
13	0	0	21	140	420	756	917	792
14	0	0	15	146	540	1161	1667	1708
15	0	0	10	140	651	1666	2807	3368
16	0	0	6	125	735	2247	4417	6147
17	0	0	3	104	780	2856	6538	10480
18	0	0	1	80	780	3431	9142	16808
19	0	0	0	56	735	3906	12117	25488
20	0	0	0	35	651	4221	15267	36688
21	0	0	0	20	540	4332	18327	50288
22	0	0	0	10	420	4221	20993	65808
23	0	0	0	4	305	3906	22967	82384
24	0	0	0	1	205	3431	24017	98813
25	0	0	0	0	126	2856	24017	113688
26	0	0	0	0	70	2247	22967	125588
27	0	0	0	0	35	1666	20993	133288
28	0	0	0	0	15	1161	18327	135954
29	0	0	0	0	5	756	15267	133288
30	0	0	0	0	1	456	12117	125588
31	0	0	0	0	0	252	9142	113688
32	0	0	0	0	0	126	6538	98813
33	0	0	0	0	0	56	4417	82384
34	0	0	0	0	0	21	2807	65808
35	0	0	0	0	0	6	1667	50288
36	0	0	0	0	0	1	917	36688

$$[n+10]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+9)}{1.2\ldots.10} - \frac{nn(n+1)\ldots(n+3)}{1.2\ldots.4}$$

$$[n+11]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+10)}{1.2\ldots.11} - \frac{nn(n+1)\ldots(n+4)}{1.2\ldots.5}$$

$$[n+12]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+11)}{1.2\ldots.12} - \frac{nn(n+1)\ldots(n+5)}{1.2\ldots.6}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}.$$

$$[n+13]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+12)}{1.2\ldots.13} - \frac{nn(n+1)\ldots(n+6)}{1.2\ldots.7}$$

$$+ \frac{n.n(n-1)}{1.2}$$

2c.

und überhaupt

$$[n+\lambda]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+\lambda-1)}{1.2\ldots.\lambda} - \frac{n}{1}.\frac{n(n+1).+(n+\lambda-7)}{1.2\ldots.(\lambda-6)}$$

$$+ \frac{n(n-1)}{1.2}.\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)\ldots(n+\lambda-13)}{1.2.3.4\ldots.(\lambda-12)}$$

$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3}.\frac{n(n+1)(n+2)\ldots(n+\lambda-19)}{1.2.3\ldots.(\lambda-18)}$$

$$+ \text{2c.}$$

9. Wenn anstatt gemeiner Würfel andere genommen werden, deren Seiten mit den Zahlen 1, 2, 3 ...... m bezeichnet sind, so wird

$[N+1]^{*n+1*} = [N]^{*n+1*} + [N]^{*n*} - [N-m]^{*n*}$, oder

$[N+1]^{*n*} = [N]^{*n*} + [N]^{*n-1*} - [N-m]^{*n-1*}$, od.

$[n+\lambda]^{*n*} = [n+\lambda-1]^{*n*} + [n+\lambda-1]^{*n-1*} -$

$[n+\lambda-m-1]^{*n-1*}$

wenn man $N+1 = n+\lambda$ setzt; desgleichen

$\lambda[n+\lambda]^{*n*} = (n+\lambda-1)[n+\lambda-1]^{*n*} - (mn+m-\lambda)$

$[n+\lambda-m]^{*n*} + (mn-n+m+1-\lambda)[n+\lambda-m-1]^{*n*}$

endlich

[n

$$[n+\lambda]^{*n*} = \frac{n(n+1)\ldots(n+\lambda-1)}{1 . 2 \ldots \lambda} - \frac{n}{1} \cdot \frac{n(n+1)\ldots(n+\lambda-m-1)}{1 . 2 \ldots (\lambda-m)}$$
$$+ \frac{n(n-1)}{1 . 2} \cdot \frac{n(n+1)\ldots(n+\lambda-2m-1)}{1 . 2 \ldots\ldots (\lambda-2m)}$$
$$- \frac{n(n-1)(n-2)}{1 . 2 . 3} \cdot \frac{n(n+1)\ldots(n+\lambda-3m-1)}{1 . 2 \ldots (\lambda-3m)}$$
$$+ \text{ꝛc.}$$

Man vergleiche hiermit die Formeln Absatz 5 und Absatz 8. Es ist aber dabey $[n]^{*n*}=1$; $[N]^{*n*}=0$, wenn N kleiner als n oder größer als nm, und endlich $[N]^{*n*}=1$, wenn $N=mn$ ist.

10. Wenn die Würfel von einander verschieden sind, so läßt sich die Menge der Arten, auf welche man damit jede Zahl werfen kann, auf einem dem bisherigen ähnlichen Wege finden. Hätte z. B. der eine 6, der andere 8, und der dritte 12 Seiten, so würde es dabey auf die Entwickelung des Produkts

$$(x+x^2+x^3\ldots x^6)(x+x^2\ldots x^8)(x+x^2\ldots x^{12})=V$$

ankommen. Entwickelte man das Quadrat oder den Cubus der Reihe:

$$1+x+x^3+x^6+x^{10}+x^{15}+x^{21}+x^{28}+x^{36}+\text{ꝛc.}$$

so könnte man daraus erkennen, welche Zahlen Summen zweyer oder dreyer Trigonal-Zahlen sind, u. s. w. Uebrigens sind die gegenwärtigen Zusätze aus Eulers Abhandlung de partitione numerorum im dritten Bande der neuen Commentarien der Petersburgischen Akademie der Wissenschaften von den Jahren 1750 und 1751, und der Untersuchung de partitione numerorum in partes tam numero quam specie datas im vierzehnten Bande der gedachten Commentarien vom Jahr 1759 genommen.