Peter BENDER, Neuss

Geometrielernen unter operativen Gesichtspunkten

(Kurzbericht über den didaktischen Teil einer Arbeit von A. Schreiber, Neuss, und mir)

Die Frage: Trägt die Betrachtung geometrischer Phänomene aus der Umwelt der Schüler zur Bildung geometrischer Begriffe bei diesen bei? muß umgekehrt gestellt werden: Trägt die geometrische Begriffswelt zur Umwelterschließung durch die Schüler bei? Ist der Wirklichkeitsbezug Bestandteil des Geometrieunterrichts oder nur eine (erfreuliche, lästige) Zugabe?

Die in unserer Umwelt (Alltag, Technik) auftretenden geometrischen Formen (Ebenen, Kugeln, Zylinder, Geraden, Kreise, Schraubenlinien, Senkrechten, Parallelen, Tangenten, Normalen, Kegel, Polyeder, Parabeln usw.) sind fast durchweg von Menschen zur Befriedigung mehr oder weniger existentieller Bedürfnisse hergestellt; sie haben einen Zweck. Dabei geht es meist um das Passen, eingeschränkte Beweglichkeit oder Optimierung. Es ist das von H. Dingler formulierte vorgeometrische Prinzip der Ununterscheidbarkeit von Stellen (Homogenität), mit dessen Erfüllung oder zielgerichteten Durchbrechung die geometrischen Formen funktionieren.

Die geometrischen Begriffe werden nicht aus der Wirklichkeit durch Abstraktion gewonnen. Was wäre denn z.B. das Gemeinsame aller realen Ebenen, das dann den Begriff 'Ebene' ausmachen würde? Die Begriffsbildung geht vielmehr ideativ vor sich, d.h. geometrische Begriffe werden in die Wirklichkeit eingebracht, ihr aufgeprägt in Form von Anweisungen zu zielgerichtetem Handeln. Ideen sind also vor ihren Realisaten da, sie entstammen nicht der Wahrnehmungs-, sondern der Bedürfnissphäre. Indem diese Herstellvorschriften in zunehmender, zweckentsprechender Güte von den Realisaten erfüllt werden, sie von diesen dadurch exhauriert (angenähert, ausgeschöpft) werden, findet der Bezug zwischen Ideen und Wirklichkeit statt, sind die Ideen auf die Wirklichkeit anwendbar.

Häufig besteht die Idee aus Homogenitätsforderungen, etwa: Alle Stellen einer Ebene, sowie ihre beiden Seiten sind ununterscheidbar (damit erfüllen die realen Ebenen ihre Zwecke). Dies führt zum Dreiplattenschleifverfahren als Herstellverfahren für die Ebene. Die Ununterscheidbarkeit der Stellen wird nach P. Lorenzen so formalisiert: $P \in E \wedge P' \in E \wedge A(P,E) \longrightarrow A(P',E)$, wobei A eine einschlägige geometrische Aussage über Punkt P und Ebene E ist, in der außer P und E keine freien Variablen und keine Konstanten für Objekte vorkommen. Geraden (Kanten) und Punkte (Ecken) sind Ebenenschnitte. Der andere wichtige Grundbegriff neben der Ebene ist der starre Körper; aus diesem werden u.a. Kongruenz, Orthogonalität und Parallelität abgeleitet.

Das Prinzip der Bildung operativer Begriffe in der Geometrie lautet: Geometrische Begriffe sind Hanldungsvorschriften (ideative Normen), die in der Wirklichkeit exhauriert werden können, zur Erfüllung gewisser Zwecke. Dieses Prinzip ist sinnentsprechend auf geometrische Schlußweisen, Theoriebildung usw. zu erweitern.

Im Unterricht ist man aus zeitlichen und organisatorischen Gründen oft nicht in der Lage, die Schüler in Problemsituationen zu bringen, sie diese durch Herstellung geeigneter geometrischer Formen und Anwendung geometrischer Verfahren lösen zu lassen und sie dabei zur Bildung der entsprechenden geometrischen Begriffe anzuregen - die Probleme wären ja auch nicht echt, sondern gestellt. An die Stelle der Erzeugung muß dann der Gebrauch und die Analyse der Zweckmäßigkeit treten - bloßes Beschreiben der sinnlichen Wahrnehmung genügt nicht. In einem zweiten Stadium werden die Begriffe in ein System gebracht, präzisiert, mit beweisartigen Schlüssen fundiert, verallgemeinert, auch mathematisiert und die Ergebnisse wieder auf die Realität angewandt. Im dritten Stadium schließlich werden Axiomensysteme aufgebaut, verglichen, Axiome gerechtfertigt und aus ihnen Sätze formal abgeleitet.

Diese Einteilung in Stadien, die sich aus dem operativen Ansatz ergibt, ist eher heuristisch zu verstehen, besonders die beiden ersten Stadien überlappen sich. Der operative Standpunkt soll auch gar <u>nicht</u> eine lückenlose Geometriegenese liefern, die den herkömmlichen Geometrieunterricht vollständig ablöst, neue geometrische Inhalte in den Schulunterricht einführen oder die Geometrie an der Schule auf ein bestimmtes Axiomensystem festlegen. Stattdessen soll er ein wesentliches Organisationsprinzip sein und eine kontinuierliche Realitätsverbundenheit gewährleisten. Eine direkte Konsequenz ist die stärkere Betonung des räumlichen und des kinematischen Aspekts und der Unterrichtsform Projektionsunterricht.

Beispiele für Projekte sind der Sport, Landfahrzeuge, die Eisenbahn, Haushaltsgegenstände, Maschinen, an denen mit beliebigem Tiefgang weite Teile der Geometrie studiert werden können und die auch die Verbindung zu anderen Teilen der Mathematik und zu den Fächern Physik, Werkunterricht, Technik herstellen.

Aus den zahlreichen Einzelbeispielen seien einige weniger geläufige herausgegriffen: Berechnung der Länge der Schraubenlinie über Strahlen- und Pythagorassatz als Länge des Wegs, den ein Zylinder beim schrägen Abrollen auf einer scharfen Kante zwecks Erzeugung der Schraubenlinie zurücklegt; Heranziehung des Begriffs des Schwerpunkts zu zahlreichen Überlegungen, dabei u.a. Ausbildung des Begriffs der konvexen Hülle, Anwendung bei der Untersuchung der Standgestigkeit von Bürostühlen usw; Begründung aus dem Falten und Biegen von Papier, daß Kugeln nicht in die Ebene abgewickelt werden können und daher stabil sind, usw.

Immer wieder treten die homogenen Gebilde Ebene, Kugel, Zylinder, Gerade, Kreis, Schraubenlinie als Grundform auf. Sie lassen sich auch durch ihre freie Beweglichkeit in ihrem Lager charakterisieren, d.h. sie sind die Formen, bei denen jeder Punkt an die Stelle jedes anderen bewegt werden kann, ohne daß sie insgesamt ihren Ort im Raum verändern müßten.

Ihre (bzw. überhaupt:) Homogenität wird mathematisch in der Idee der Symmetrie gefaßt. Die reale Operation der Exhaustion entspricht der Idee der Approximation. In einem operativ orientierten Geometrieunterricht spielen diese beiden zentralen mathematischen Ideen auch eine zentrale Rolle, vom praktischen Messen im vormathematischen Bereich mit seiner Problematik über Herstellen, Zeichnen, Prüfen bis hin zu exakten Maßbestimmungen, Konstruktionen, Beweisen im formalen Bereich.