Peter BENDER, Paderborn

Ausbildung von Grundvorstellungen und Grundverständnissen - ein tragendes didaktisches Konzept für den Mathematikunterricht - erläutert an Beispielen aus den Sekundarstufen, insbesondere der SII

Es ist eine Binsenweisheit, daß das Lernen von Mathematik ein ***sozial vermittelter, konstruktiver*** Akt des ***Individuums*** ist. Wenn diese Weisheit in didaktische Arbeiten und in den Unterricht kaum Einzug gehalten hat, dann liegt das u.a. an dem engen Mathematikbild vieler Autoren und Lehrer, das sich bei Stoffdidaktikern genauso findet wie bei ihren Kritikern, nämlich: Das Entscheidende seien die abstrakten mathematischen Beziehungen zwischen abstrakten mathematischen Objekten sowie gewisse Kalküle; und intuitive, anschauliche, dynamische, operative, anwendungsorientierte Zugänge seien eben nur Zugänge, mit denen man sich diesem Eigentlichen mehr oder weniger gut nähert, geplant oder ungeplant.

In diesem Mathematikbild kann man zwar die Inhalte genau identifizieren und psychologischen Untersuchungen, Intelligenz-Simulationen auf dem Computer oder Darstellungen in Lehrbüchern gut zugänglich machen, aber in ihm kommt es nicht auf ***Sinn*** und damit nicht auf die Konstitution von ***Sinn*** an.

Eine wesentliche Voraussetzung für das Treiben sinnhafter Mathematik ist die Ausbildung sogenannter ***Grundvorstellungen und Grundverständnisse (GVV)*** von den für einzelne Gebiete fundamentalen Begriffen; bzw. diese Herausbildung ist ***selbst schon sinnhafte Mathematik***. Dieses Konzept habe ich bei Heinz ***Griesel*** kennengelernt. Bei Anwendung auf konkrete Inhalte ist es so gut wie selbst-erklärend. Zugleich hat es die Potenz zu einem leistungsfähigen Paradigma für Theorie und Praxis des Mathematikunterrichts.

Das Bestimmungswort ***'Grund'*** prägt das Konzept mindestens dreifach:

(i) ***Allgemeine Verbindlichkeit***: So wichtig für das didaktische Handeln die Erkenntnis ist, daß Schüler ihre kognitive Strukturen (Frames) eigen'köpfig' zu konstruieren haben; sie darf nicht mit einer Beliebigkeit der auszubildenden Begriffe verwechselt werden. Vielmehr ist die Aufgabe umso dringlicher, daß die Schüler möglichst umfassend am ***epistemologischen Kern*** eines Begriffs teilhaben.

Dieser besteht nicht nur aus der mathematischen Definition, sondern aus einem ganzen System inner- und außermathematischer Zusammenhänge, das in einem hermeneutischen Forschungs- und Entwicklungsprozeß didaktisch aufbereitet wird und nicht in das o.a. Mathematikbild paßt. Auch wenn man den epistemologischen Kern wie Dörfler (1988) psychologisch versteht, und zwar als das Gemeinsame der Frames aller Beteiligten, muß ein Ziel nach wie vor sein, eine weite Übereinstimmung zu erzielen.

Schließlich geht es auch um die Möglichkeit zur ***Kommunikation*** im Unterricht. Die Rolle, die Krummheuer (1989) den Veranschaulichungen als Argumentations-"Formate" zuweist, kommt entsprechend den GVV zu.

(ii) ***Verankerung in der Lebenswelt***: Wo schon der Mathematiker sich laufend anthropomorphisierend ausdrückt, ist erst recht für den Lernenden eine Einbettung des mathematischen Lernstoffs in lebensweltliche Situationen i.w.S. für eine Konstituierung von Sinn unabdingbar, wobei Motivation und echte Anwendbarkeit hier sekundär sind. Die Situationen können märchenhafte Züge tragen; es müssen Menschen, Tiere, Gegenstände, mehr oder weniger anthropomorph, mehr oder weniger mathematisiert auftreten, die nach gewissen Regeln agieren, Vorhaben verfolgen usw.

Dieses Märchenhafte, sowie die Grenzen der verwendeten Bilder und ***Metaphern*** müssen den Schülern aber bewußt gemacht werden, um ihnenzu ermöglichen, ihren ***gesunden Menschwenverstand*** durchzuhalten.

(iii) ***Fundamentaler Charakter für das jeweilige Teilgebiet*** (im epistemologischen und psychologischen Sinn): GVV sind nicht bloß Aufhänger zur Einführung, sondern leiten durch Erweiterungen, Revidierungen, Interpretation von Begriffen, Integration mit anderen usw. die weitere Erarbeitung.

Mit ***'Vorstellungen'*** wird die ***bewußte*** Aktivierung ***anschaulicher*** Repräsentationen im Gedächtnis von Objekten, Situationen, Handlungen bezeichnet, wobei ein solcher Prozeß auf einen bestimmten Sinn hin organisiert wird, den der Vorstellende schon als Ziel mit einbringt (Verständnis!). Zwar ist der ***analoge*** Repräsentationsmodus dominierend, aber der ***propositionale*** ist nicht ausgeschlossen, zumal die Ausbildung und Aktivierung von GVV im Unterricht großenteils verbal erfolgt, auch in Reflexion der zugrundeliegenden Begrifflichkeit.

'Verstehen' kann man zwar einfach als Ausbildung, Aktivierung, Veränderung von und Einordnung in kognitive Strukturen erklären. Für das GVV-Konzept ist das nominale ***'Verständnisse'*** passender, sozusagen als stärker propositional ausgerichtetes, aber sonst ähnlich aufgebautes Konstrukt wie 'Vorstellungen'. Die Harmonisierung der beiden o.a. Modi ist ein didaktisches Problem, zu dessen Entschärfung das GVV-Konzept beitragen soll. Derzeit bedeutet das, als Ausgleich zum üblichen Unterricht, eine stärkere Betonung des analogen Modus.

Es existieren wohl ***keine Rezepte*** zur didaktischen Konstruktion von GVV; man kann lediglich einige Merkmale nennen (***sachliche und psychologische Adäquatheit, Ausbaufähigkeit***) und Hinweise geben: GVV sind ***robust***, und die Schüler bilden durchweg irgendwelche aus, ob der Lehrer Einfluß nimmt oder nicht. Bei ihrer Entstehung können scheinbare ***Kleinigkeiten*** (prägende Rede-, Schreibweisen) ***ausschlaggebend*** und verbale Erläuterungen nutzlos sein, wobei Irreführungen nicht selten auf unsaubere Vorstellungen schon beim Lehrenden zurückgehen. Die modische Parole von der Förderung ***dynamischer Vorstellungen*** kann auch ***nachteilig*** sein.

Am besten nähert man sich dem GVV-Konzept mit der Entwicklung und der Analyse von (geeigneten und ungeeigneten) Beispielen. Im Vortrag wurden einige aus meiner eigenen didaktischen Tätigkeit diskutiert:

Flächeninhalts-Funktion in der Integralrechnung: Zwischen 1. Achse und Graph der zu integrierenden Funktion liegt Sumpf, der zu ***ent***wässern ist, falls die Funktionswerte positiv, und Wüste, die zu ***be***wässern ist, falls sie negativ sind. Der Wasserstand im mitgeführten Behälter liefert an jeder Stelle ein (Längen-) Maß für die überstrichene (auch negative) Fläche. Hier zeigt sich exemplarisch: Die Metapher ist zwar lebenswelt-bezogen, aber keine echte Anwendung; ihre Grenzen sind herauszupräparieren, damit der gesunde Menschenverstand nicht unterdrückt wird.

Stammfunktion als Revision der Ableitung: Sie ist nicht nur formale Operation, sondern verbunden mit folgender GVV, bezogen auf das Differenzieren: Das Gegenstück zur Bildung von Änderungsraten (Quotienten von Differenzen und Grenzwerte davon) ist das ***Kumulieren*** (Summen von Produkten und Grenzwerte davon). Die starke Übereinstimmung mit dem Flächeninhalts-Konzept ergibt sich schon hier inhaltlich und nicht erst über den Hauptsatz.

Der *Kreis als verschmiertes 360-Eck* in der Logo-Geometrie ist eine unzulänglich motivierte *Verfälschung* des Kreis-Begriffs.

Bewegungs-GVV *führen nicht* auf den eigentlichen *geometrischen Abbildungsbegriff* (geradentreue Permutationen der Ebene). In der Theorie Dörflers: Die mathematische Operation tritt zwar in den Frames zu den Bewegungs-Vorstellungen steuernd hinzu, löst sie aber nicht ab.

Bewegungs-GVV sind für *funktionales Denken* in der Geometrie und in der Analysis unverzichtbar: Was geschieht im Wertebereich (z.B. Flächeninhalte) bei der Wanderung in einer bestimmten Weise durch den Definitionsbereich (hier: Polygone)? (Wobei man sich die Funktionsvorschrift als eine Art Storchenschnabel vorstellt, der zwischen beiden Bereichen vermittelt.)

Für die *Fehl*-GVV zum *Folgengrenzwert* (als eine Art letztes Glied; s. Davis & Vinner 1986) sind die Bemühungen der Mathematikdidaktik um *dynamische Vorstellungen* verantwortlich: Von Anfang an wird die Doppelnatur der Limes-Bildung als Grenz*prozeß* und als *Resultat* zunächst informell (bei $0,\overline{3}$ und bei π) und dann auch bei der formalen Schreibweise ' $\lim\limits_{n\to\infty}$ ' betont, wie man es von algebraischen Termen gewohnt ist. Prompt sehen die Schüler bei den Folgen letzte Glieder bzw. Werte, die erreicht werden, wenn man nur unendlich weit geht, aber bei 0,3... z.B. nicht 1/3, da es in der Folge nie auftritt. Es wird sogar (Fischbein 1989) $1/3=0,\overline{3}$, aber nicht $0,\overline{3}=1/3$ akzeptiert. Tatsächlich (und das ist vielen Lehrenden nicht bewußt) ist die Suggestion *irreführend, mit einem Grenzprozeß (als Durchlaufen einer Folge) könne man einen Grenzwert ermitteln*, auch durch die Rede vom "*Limes für n gegen unendlich*". Es fehlen *Erlebnisse* zum Durchlaufen einer Folge: Egal, wie weit man geht, man hat immer nur ein endliches Stück hinter sich, also nichts im Vergleich zu dem, was noch vor einem liegt (Idee von *dem Hauptstück* einer Folge; günstiger als das korrektere *'ein Hauptstück'* bei der Grenzwert-Definition). Die *Betragsstriche* in der formalen Definition bereiten Probleme, weil sie in den Bereich des Rechnens und damit weg vom (topologischen) Abstandsbegriff führen. Für das Durchschauen des *Achilles-Schildkröten-Paradoxons* empfiehlt sich die Vorstellung vom Drehen eines Films, wo immer zu den Zeitpunkten 1, 1,1, 1,11 usw. ein Bild belichtet wird (immer stärkere *Zeitlupe*). Ähnlich kann man sich klar machen, wieso ein idealisierter *Ball* bei abnehmender geometrischer Folge der Hüpfzeiten zwar unendlich oft *hüpft*, aber nur endliche Zeit dafür braucht.