Jahrbuch Überblicke Mathematik 1984, 9–36

Jahrbuch
Überblicke
Mathematik
1984

Soliton-Gleichungen

von B. Fuchssteiner

I. Einführung

Angeregt durch Erforschung, und weitere Analyse, der spektakulären Eigenschaften der Korteweg-de Vries Gleichung hat sich in den letzten zwei Jahrzehnten ein mathematisch-physikalisches Teilgebiet zu ungeahnter Blüte entwickelt, welches gleichermaßen bei Physikern wie Mathematikern (der verschiedensten Disziplinen) Interesse und Faszination geweckt hat. Von der Entwicklung dieses Gebiets, dessen endgültiger Name noch ungewiß scheint, und das durch die gewählte Überschrift nur oberflächlich, wenn nicht sogar falsch beschrieben wird, soll hier die Rede sein – natürlich von einem sehr subjektiven Standpunkt aus betrachtet!

Daß sich der endgültige Name dieser Disziplin genausowenig bestimmen läßt wie der ihr letztendlich zuzuweisende Platz im Himmel der Mathematischen Systeme kommt daher, daß eine Vielzahl von Methoden und Betrachtungsweisen einfließen, die ein so verwirrendes Bild entstehen lassen, daß jeder einen anderen Aspekt für wichtig halten kann. Der eine ordnet das Gebiet der Mathematischen Physik zu, dem anderen ist es Algebraische Geometrie, oder Streutheorie, oder symplektische Geometrie und Theorie vollständig integrabler Hamilton-Systeme, oder auch Lie-Algebra in Verbindung mit partiellen Differentialgleichungen, oder, . . . , oder . . .

Das Ganze begann in den 60-er Jahren mit einem wiedererwachenden Interesse an der Korteweg-de Vries Gleichung, da man feststellte, daß diese nichtlineare partielle Differentialgleichung nicht nur Flachwasserwellen sondern auch Phänomene der Plasmaphysik beschreiben kann.

Was wir heute Flachwasserwellen nennen, wurde erstmals – und ausgiebig – vom schottischen Pfarrerssohn John Scott Russel[1)] (1808–1882) er-

[1)] Ein Bericht über diesen brillianten, mit vielfältigen intellektuellen Gaben gesegneten Ingenieur befindet sich schon im Jahrbuch 1978 (Seiten 217–219). Russel hat beachtliche Leistungen im Schiffsbau erbracht, bei denen er seine Forschungen über Wasserwellen anzuwenden verstand. Trotz seiner vielen Talente brach allerdings die von ihm geleitete Schiffsbaufirma nach dem Mißerfolg beim Bau der „Great Eastern" zusammen. Für den deutschsprachigen Leser mag interessant sein, daß er der Erbauer der großen Rotunde zur Weltausstellung 1873 in Wien war, und daß wir ihm den Bau der ersten Eisenbahnfähren (den sogenannten Trajektbooten) auf dem Bodensee zwischen Deutschland und der Schweiz verdanken.

forscht, der den etwas treffenderen Namen „waves of translation" wählte. Sein Interesse an diesen Phänomenen wurde geweckt, als er im August 1834 eine Welle beobachtete, welche in einem Kanal durch ein von einem Treidelpfad aus gezogenem Boot erzeugt wurde. Auf dem Rücken seines Pferdes sitzend sah Russel, wie beim Abstoppen des Bootes die Wassermassen um den Bug in wilde, ungeordnete Bewegung gerieten, und wie sich dann aus diesem chaotischen Gefließe eine edle wohlgeformte Welle löste. Zwischen Reitersmann und Wasserschönheit war es Liebe auf den ersten Blick, er setzte ihr nach und verfolgte sie im Galopp über mehr als zwei Meilen, wobei ihre Beständigkeit (sie änderte weder Form noch Geschwindigkeit) nur seine Zuneigung noch erhöhte.

In der Folgezeit investierte Russel große experimentelle Mühe – und Geschick – in die Untersuchung seiner wohlgestalteten Schönheit. Er erkannte den nichtlinearen Charakter dieser Wellen und entdeckte, daß die Wellenbewegung durch eine über die ganze Wassertiefe erfolgende horizontale Translation der Wasserpartikel erfolgte (deshalb wave of translation). Wie scharf seine physikalische Analyse war, geht auch daraus hervor, daß er immer präzise und penibel zwischen Wellenbewegung und Wasserbewegung unterschied – eine Unterscheidung, die heutigen Mathematikern und Naturwissenschaftlern manchmal offensichtlich schwerfällt.[2] Völlig richtig erkannte er auch, daß es sich zum Beispiel bei der Gezeitenwelle, oder auch bei den – moderat zerstörerischen – Seiches um dieselben Phänomene, also waves of translations, handelte.

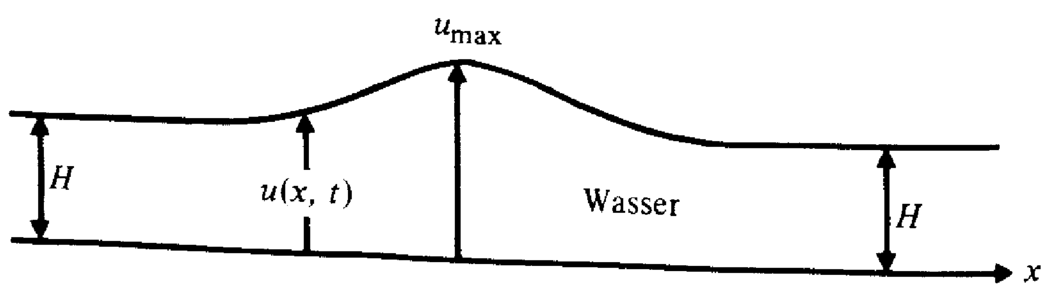

Fig. 1 – Längsschnitt durch Kanal zur Zeit t

Obwohl große Geister, unter anderem Lord Rayleigh, Boussinesque oder auch Airy (den Russel als großen Geist zu bezeichnen sich allerdings geweigert hätte) sich an der mathematischen Erklärung der Russel'schen Beobachtungen versuchten, gelang diese dann erst vollständig mehr als fünfzig Jahre später durch Korteweg und de Vries (1895). Zurückgehend auf die Dissertation von de Vries entdeckten sie, daß sich die „wave of trans-

---

2) Um eines von vielen Beispielen zu nennen: Der große Seismologe und Erdbebenergründer C.F. Richter unterscheidet – verzeihlicherweise – in seiner Tsunamierklärung (Elementary Seismology, San Francisco–London 1958, p. 112) nicht zwischen diesen beiden Größen.

lation" durch folgende nichtlineare partielle Differentialgleichung beschreiben läßt:

$$(1) \qquad u_t + \sqrt{g \cdot H}\, u_x + \frac{3\sqrt{g \cdot H}}{2H}\, u u_x + \frac{\sqrt{g \cdot H}\, H^2}{6}\, u_{xxx} = 0$$

wobei $u = u(x, t)$ die Wasserhöhe in Abhängigkeit vom Ort x und der Zeit t ist, und wobei g die Erdbeschleunigung und H die asymptotische Wassertiefe, also die Tiefe des ungestörten Wassers ist.

Die von Russel beobachtete Welle, die ja weder Form noch Geschwindigkeit änderte, muß dann eine Lösung der Form $u(x, t) = s(x - ct)$ sein. Wir nennen dies eine *Solitärwelle*. Da (1) mit diesem Ansatz in eine gewöhnliche *DGL* übergeht, läßt sich die Solitärwellenlösung leicht explizit ausrechnen, und sie stimmt mit den Russelschen Beobachtungen in der Tat gut überein. Außerdem sei bemerkt, daß die Gleichung (1) durch die Substitution $x \to x + \sqrt{g\, H}\; t$ und durch eine lineare Transformation in u offensichtlich auf die heute gebräuchliche Form

$$u_t = 6\, u u_x + u_{xxx} \qquad \text{(KdV)}$$

übergeht, die man zu Ehren von Korteweg und de Vries als KdV bezeichnet.

Die späte mathematische Durchdringung der von Russel beobachteten Wellen, über deren Ausbleiben Russel selbst schon weidlich gespottet hat, ist nicht etwa darauf zurückzuführen, daß man sich wellentheoretisch in der mathematischen Steinzeit[3] befand, sondern darauf, daß die KdV auf einer Reihe sehr subtiler, miteinander konkurrierender Approximationen beruht.

Danach kam eine lange Periode der Ruhe, während der, abgesehen von der kleinen Gilde der Wasserwellenfans, sich kaum jemand um die KdV kümmerte, bis sie dann in den 60-er Jahren dieses Jahrhunderts zur Beschreibung magnetohydrodynamischer Wellen im Plasma herangezogen wurde. Das numerische Studium der Wechselwirkungen [50] solcher Wellen führte nun bald zur Entdeckung der reichhaltigen mathematischen Struktur, von der in den folgenden Kapiteln die Rede sein soll.

Obwohl also allgemeine mathematische Strukturen das Thema dieses Aufsatzes sein werden, kann ich an dieser Stelle der Versuchung nicht widerstehen, anhand einer einfachen Überschlagsrechnung zu zeigen, daß die Phänomene, welche durch die KdV beschrieben werden, keineswegs nur von esoterischer, also nur den Mathematiker oder Physiker in seiner Studierstube interessierender Natur sind, sondern eine Erklärung gewaltiger, also wohl exoterischer, Naturerscheinungen darstellen.

Wir betrachten ein Erdbeben, dessen Zentrum über die Länge eines Tiefseegrabens gleichmäßig verteilt ist, und das auf eine tektonische Verschie-

[3] Dies sieht man schon daraus, daß der erste Band der Mécanique céleste schon sehr viel früher, nämlich im Jahre 1799 erschienen ist.

bung der in diesem Graben aneinanderstoßenden Erdplatten zurückgeht. Die Gleichverteilung des Erregungszentrums nehmen wir an, um nach Möglichkeit eindimensional rechnen zu können. Wir interessieren uns dafür, welche Wirkung dieses Beben auf eine in angemessenem Abstand vor diesem Graben liegende Insel haben mag. Um nachher eine konkrete Rechnung durchführen zu können, gehen wir von einer tektonischen Verschiebung um ca. 15 cm über die Länge des Marianengraben (Wassertiefe ca. 6000 m) aus. Dies entspricht einem Erdbeben von ca. 7–8 (Richter-skala), stellt also ein gar nicht so seltenes Ereignis dar. Natürlich fließt das Meer von der angehobenen auf die abgesenkte Platte ab, was zu einer sehr, sehr langen Welle von ebenfalls ca. 15 cm Höhe führt. Ein über dem Erdbebengebiet fahrendes Schiff wird von diesem Ereignis deshalb nichts wahrnehmen. Russels Beobachtung von Solitärwellen bedeutet aber, daß die Welle sich nahezu dispersionsfrei ausbreitet. Allerdings verändert sie sich mit veränderlicher Wassertiefe. Es wird also irgend etwas besonderes passieren, wenn sich die Welle einer Insel (Wassertiefe Null) nähert. Zum Zusammenhang zwischen Wassertiefe und Wellenhöhe betrachten wir die Kontinuitätsgleichung (Bezeichnung wie in Fig. 1)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} (u(x,t) - H)\mathrm{d}x = \text{constant (zeitunabhängig)},$$

die ja bei Inkompressibilität gelten muß.

Aus der KdV (1) erhalten wir, bei festem t, für die Gestalt der Solitärwelle

$$u(x) = H + 3\,k^2 H \cosh^{-2}\left(\frac{3}{2}\,k(x - x_0)\right)$$

wobei k ein Parameter ist, der mit $u_{\max}$ offensichtlich in folgendem Zusammenhang steht

$$(2) \qquad u_{\max} = H + 3\,k^2 H.$$

Die Kontinuitätsgleichung geht also über in

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 3\,k^2 H \cosh^{-2}\left(\frac{3}{2}\,kx\right)\mathrm{d}x = \text{const.}$$

Substitution liefert

$$k \cdot H = \text{const.},$$

oder mit (2)

$$u_{\max} \cdot H = \text{const.}$$

Also müssen wir bei Wassertiefe $H \to 0$ mit $u_{max} \to \infty$ rechnen – was natürlich so nicht sein kann, da die der Ableitung der KdV zugrunde liegenden physikalischen Annahmen bei beliebiger Wellenhöhe nicht mehr gelten werden und die Welle sich stattdessen brechen wird. Wir nehmen deshalb an, daß sich die Welle ungefähr bei $u_{max} = 2\,H$ brechen wird – ein Wert, den jeder passionierte Strandlieger größenordnungsmäßig bestätigen kann. Für unser Zahlenbeispiel

$$u_{max} \cdot H = (u_{max} \cdot H)_{\text{Marianengraben}} = 0{,}15 \cdot 6000 \text{ m}^2 = (30 \text{ m})^2$$

bedeutet dies, daß das auf der Insel zu erwartende maximale u_{max} gleich $(2/\sqrt{2})$ 30 m ist. Also beträgt die auf Hawaii beim Brechen zu erwartende Wellenhöhe $u_{max} - H = H$ ungefähr 20 Meter! Ein wahrhaft fruchtbares Ereignis! Aber in der Tat, solche Wellen gibt es, sie werden mit dem japanischen Wort Tsunami (Hafenwelle) bezeichnet.

Zum Beispiel wurde 1946 die schöne Stadt Hilo (auf der großen Insel) von einer solchen Welle, die auf ein Beben der Stärke 7,4 im Aleutengraben zurückging, weitgehend zerstört. Im Jahre 1933 gab es ein Tsunami, welches, an der amerikanischen Pazifikküste reflektiert, den Pazifik innerhalb zweier Tage sogar zweimal durchpflügte. Daß solche Tsunamis gefährlich sind, versteht sich von selbst. So wurden von dem Sanriku-Tsunami im Jahre 1896 in Japan über 27 Tausend Menschen ertränkt. Neben der sich gerade zum einhundertsten Male jährenden Explosion des Krakatau führte die Explosion des Santorin[4)] (ca. 1450 v.Chr.) zum wohl größten Tsunami in historischer Zeit – seine Zerstörungsgewalt bedeutete das Ende der minoischen Kultur.

II. Solitionen und Erhaltungssätze

Wie schon erwähnt, begann man in den frühen 60-er Jahren mit der numerischen Betrachtung von Lösungen der KdV [50]. Insbesondere interessierte man sich für Anfangsbedingungen, die für Zeiten $t \to -\infty$ aus der Überlagerung mehrerer weit auseinanderliegender Solitärwellen (mit verschiedenen Geschwindigkeiten) bestanden. Wegen des exponentiellen Abfalls der Solitärwellen für $x \to \pm\infty$ wurden die Überlagerungen dieser Wellen so klein, daß die Nichtlinearität der KdV anfangs nicht zum Tragen kam, und die einzelnen Wellen deshalb ungestört ihre „Bahnen ziehen" konnten. Das Hauptinteresse galt dabei der Wechselwirkung zwischen den Solitärwellen, die aufgrund der Nichtlinearität dann auftreten mußte, wenn die schnelleren Solitärwellen die langsameren eingeholt hatten. A priori war nicht zu erwarten, daß bei dieser Wechselwirkung irgendeine besondere Regelmäßigkeit auftreten würde. Zur großen Überraschung stellte sich aber heraus, daß für $t \to +\infty$ (also „nach" der Wechselwirkung) dieselben Solitärwellen zu beobachten waren, wie für $t \to -\infty$; nur eine Phasenverschiebung hatte stattgefunden. Das heißt, die Solitärwellen verhielten sich wie Partikel bei

4) private communication eines unbekannten kretischen Fremdenführers.

elastischer Streuung. Diese (Partikel-)struktur – die Russel übrigens schon im Experiment beobachtet hatte – gab dann den Anlaß, die Solitärwellen der KdV *Solitonen* zu nennen.

Es stellte sich jetzt die Aufgabe, diese speziellen und interessanten Solitonenlösungen mathematisch zu charakterisieren.[5] Dabei kam einem eine andere merkwürdige und unerwartete Entdeckung zu Hilfe. 1967 fanden Gardner, Greene, Kruskal und Miura [19] heraus, daß die KdV

$$(3) \qquad u_t = 6u_x u + u_{xxx}$$

einen isospektralen Fluß des eindimensionalen Schrödingeroperators beschreibt. Dies heißt folgendes: Nimmt man eine Schar (Scharparameter t) von Funktionen $u(x, t)$, die Elemente des $L^2(\mathrm{d}x)$ (Hilbertraum der quadratintegrablen Funktionen) sind, als Potentialterme im Schrödingeroperator

$$(4) \qquad L(t) = D^2 + u(\,\cdot\,, t),$$

wobei $D = \dfrac{\partial}{\partial x}$ der übliche Differentiationsoperator in $L^2(\mathrm{d}x)$ ist, dann gibt es, sofern $u(x, t)$ Lösung der KdV ist, eine von $u(\,\cdot\,, t)$ abhängige Schar selbstadjungierter Operatoren $B(t)$, so daß

$$(5) \qquad \frac{\partial}{\partial t} L(t) = i\,[B(t), L(t)].$$

Dabei ist $[B, L] = BL - LB$ der übliche Kommutator. Mit anderen Worten: $L(t)$ definiert dann eine Schar unitär äquivalenter Operatoren, insbesondere sind die Eigenwerte von $L(t)$ unabhängig von t.

In der Tat hat diese unscheinbare Entdeckung zu einer außerordentlich effektiven Lösungsmethode einer ganzen Klasse nichtlinearer partieller Differentialgleichungen geführt, der sogenannten *inversen Streumethode*[6]. Insbesondere gelang dadurch auch die explizite Berechnung der Solitonlösungen der KdV, da diese der speziellen Klasse von reflektionsfreien Schrödingerpotentialen (Bargmann-Potentiale) entsprechen. Über die inverse Streumethode wurde im Jahrbuch 1978 berichtet, so daß wir hier nicht darauf eingehen müssen. Außerdem gibt es inzwischen vorzügliche Lehrbücher zu diesem Thema ([26], aber besonders [2]). Für spätere Betrachtungen wollen wir in diesem Zusammenhang aber noch auf einen wichtigen Aspekt hinweisen: Behandelt man nämlich statt der zeitlichen Evolution der Funktion $u(x, t)$ die zeitliche Evolution der entsprechenden Streudaten von (4), so stellt man fest, daß deren zeitliche Entwicklung

---

5) Wir betrachten hier und im folgenden nur Lösungen $u(x, t)$, die für $x \to \pm\infty$ hinreichend schnell verschwinden.

6) Es sah eine ganze Weile so aus, als ob diese Methode nur für Probleme einer Raum- und einer Zeitdimension geeignet sei. Inzwischen wurden von Fokas und Ablowitz [10] aber auch mehrdimensionale Probleme behandelt.

durch eine lineare Gleichung beschrieben wird. Dies liegt daran, weil die Streudaten einer Auswertung bei $x = \pm\infty$ entsprechen, wo die von $u(\,\cdot\,, t)$ abhängigen Terme des lokalen Operators $B(t)$ in (5) verschwinden. Für uns ist an dieser Beobachtung wichtig, daß wir durch Betrachtung der Streudaten, den Fluß (3) auf die Beschränkung eines linearen Systems auf eine geeignete Teilmannigfaltigkeit eines Vektorraumes transformiert haben. Wir haben das Problem also fast linearisiert.

Bevor wir diesen Aspekt weiter verfolgen, wollen wir noch eine ganz einfache Methode [11] zur Bestimmung der Solitonlösungen vorstellen. Wir benötigen dazu den wichtigen Begriff des *Erhaltungssatzes*, den wir gleich für die allgemeine Situation definieren werden.

Wir betrachten eine ∞-oft differenzierbare[7)] Mannigfaltigkeit M. Die Variable in M bezeichnen wir mit u. Wir betrachten Funktionen, die M in eine zweite Mannigfaltigkeit (z.B. $\mathbb{R}$) abbilden. Wir interessieren uns im folgenden aber nur für solche Funktionen, die ∞-oft differenzierbar sind. Ist F eine Funktion auf M und m ein Tangentialvektor an der Stelle u, so bezeichne $F'(u)[m]$ die Ableitung von F an der Stelle u in Richtung m. Vektorfelder $K(u)$, $G(u)$ sind Funktionen, die jedem $u \in M$ einen Tangentialvektor an der Stelle u zuordnen. Vektorfelder tragen auf natürliche Weise eine Lie-Algebra Struktur, die durch

$$(6) \qquad [K, G](u) \underset{\text{def}}{=} K'(u)[G(u)] - G'(u)[K(u)]$$

gegeben ist.

Wir interessieren uns für *Evolutionsgleichungen* auf M.

Das sind Gleichungen der Form

$$(7) \qquad u_t = K(u),$$

wobei u_t die partielle Ableitung der Schar $u = u(t) \in M$ nach dem Zeitparameter t bedeutet, und wobei $K(u)$ ein Vektorfeld zu sein hat. Die KdV ist Beispiel für eine solche Evolutionsgleichung, wenn wir $K(u) = 6uu_x + u_{xxx}$ setzen; dabei haben wir die zugrunde liegende Mannigfaltigkeit allerdings noch nicht definiert. Der Einfachheit halber behandeln wir nur Evolutionsgleichungen, für die es einen global definierten *Fluß* gibt; das ist eine Funktion

$$F : (t, u_0) \in \mathbb{R} \times M \to M,$$

7) Wer etwas gegen Mannigfaltigkeiten hat, dem sei erlaubt, sich unter M einfach einen Vektorraum vorzustellen. Wir sind natürlich in erster Linie an ∞-dimensionalen Mannigfaltigkeiten interessiert. Der dabei vorausgesetzte Differenzierbarkeitsbegriff ist – wegen der Kettenregel – der der Hadamard-Differenzierbarkeit (liegt zwischen Gateaux und Fréchet). Der nicht sachkundige Leser schaue aber bitte nicht nach, was damit gemeint ist; es genügt völlig, wenn er ein intuitives Verständnis fürs Differenzieren hat.

so daß

$$F(0, u_0) = u_0 \text{ und} \frac{\partial}{\partial t} F(t, u_0) = K(F(t, u_0)) \text{ für alle } t, u_0.$$

Offensichtlich ist $F(t, u_0)$ nichts anderes als die Lösung von (7) zur Zeit t und zur Anfangsbedingung $u(t = 0) = u_0$. Für später wollen wir noch festhalten, daß die $F(t, \cdot)$ eine einparametrige kommutative Gruppe von Diffeomorphismen auf M darstellen; dies ergibt sich im wesentlichen aus der globalen Existenz des Flusses und aus

$$(8) \qquad F(t, \cdot) \circ F(\tau, \cdot) = F(t + \tau, \cdot),$$

was wieder daraus folgt, daß die Evolutionsgleichung (7) nicht explizit zeitabhängig ist. Das Vektorfeld $K(u)$ ist der infinitesimale Generator dieser Gruppe und die zugehörige Lie-Algebra ist die durch (6) eingeführte.

Eine Funktion $P : M \to \mathbb{R}$ (oder auch $\mathbb{C}$) bezeichnen wir als *Erhaltungsgröße* des Flusses (7), wenn

$$(9) \qquad P'(u)[K(u)] = 0 \quad \text{für alle } u \in M.$$

Da wir die Existenz eines globalen Flusses vorausgesetzt haben, ist dies äquivalent mit

$$P(F(t, u_0)) = P(u_0) \text{ für alle } t, u_0.$$

Mit anderen Worten: die Quantität P darf sich während jeder durch (7) gegebenen Bewegung nicht ändern. Das Covektorfeld $u \to P'(u)$ (Linearform auf dem Tangentialbündel) bezeichnen wir natürlich als den *Gradienten* von P.

Denkt man an die Bedeutung der Erhaltungssätze für Energie, Impuls, etc., so ist nicht notwendig, zur Wichtigkeit des soeben definierten Begriffes, etwas auszuführen. Erhaltungsgrößen der endlichdimensionalen Systeme sind dem Leser in anderem Gewand wohlbekannt. Die Erhaltungsgrößen einer Evolutionsgleichung im $\mathbb{R}^n$ sind nämlich die Lösungen derjenigen partiellen Differentialgleichung (erster Ordnung), welche die gegebene Evolutionsgleichung als Differentialgleichung für das Charakteristikensystem hat. Dieses Beispiel zeigt schon, daß im ∞-dimensionalen Fall das Auffinden der Erhaltungsgrößen ein schwieriges Problem sein wird, denn Lösungsversuche für die Variationsgleichung (9) sind dann ein völlig hoffnungsloses Unterfangen.[8)]

8) In den Naturwissenschaften ist man allerdings häufig den umgekehrten Weg gegangen, indem man aus den Erhaltungsgrößen (inklusive der lokalen) die Bewegungsgleichung bestimmt hat. So hat Newton aus den von Kepler beobachteten Erhaltungsgrößen der Planetenbewegung (inklusive des durch die Beobachtung der Quadrate der Umlaufszeiten gegebenen lokalen Erhaltungssatzes) die dadurch eindeutig bestimmte Bewegungsgleichung ausgerechnet, und damit dann natürlich das Gravitationsgesetz gefunden.

Wenn aber auch das Bestimmen der Erhaltungsgrößen schwierig ist, so wollen wir uns doch überlegen, was wir mit ihnen anfangen können.

Sei dafür P eine Erhaltungsgröße von (7). Trivialerweise ist $P =$ const. eine Untermannigfaltigkeit der Codimension 1, die invariant unter dem Fluß von (7) ist. Viel wichtiger aber ist, daß man invariante Untermannigfaltigkeiten viel höherer Codimension erhält, wenn man die Menge betrachtet, auf der P extremal wird, also die Menge

$$\{ u \in M \mid P'(u) = 0 \},$$

die ja offensichtlich ebenfalls invariant sein muß. Häufig kommt es sogar vor, daß diese Mannigfaltigkeit von endlicher Dimension und unendlicher Codimension ist, und daß der darauf stattfindende Fluß für den Anwender besonders interessant und wichtig ist.

Beispiel 1: Wir betrachten auf $S(\mathbb{R})$, dem Raum der ∞-oft differenzierbaren Funktionen, die im Unendlichen schneller als jedes Polynom verschwinden, den durch die KdV gegebenen Fluß. Offensichtlich ist

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)\mathrm{d}x$$

eine Erhaltungsgröße, und ihr Gradient ist das durch

$$S(\mathbb{R}) \ni v \to \int_{-\infty}^{+\infty} u(x)v(x)\mathrm{d}x$$

gegebene lineare Funktional. Identifizieren wir die Elemente von $w \in S(\mathbb{R})$ über

$$(10) \qquad \langle w, v \rangle = \int_{-\infty}^{+\infty} w(x)v(x)\mathrm{d}x \quad \text{für alle } v \in S(\mathbb{R})$$

mit linearen Funktionalen auf $S(\mathbb{R})$, so können wir schreiben

$$I'(u) = u.$$

Wir haben bereits gesehen, daß die Eigenwerte, sagen wir $\lambda_1(u), \ldots, \lambda_n(u)$, des Operators $L(u) = D^2 + u$ ebenfalls (wenn auch nur lokal definierte) Erhaltungsgrößen der KdV sind. Bezeichnen wir mit $\omega_1, \ldots, \omega_n$ die, bezüglich (10), auf Eins normierten Eigenfunktionen zu diesen Eigenwerten, so lassen sich unter Verwendung der Selbstadjungiertheit von $L(u)$ die Gradienten der $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ leicht zu $\omega_1^2, \ldots, \omega_n^2$ berechnen. Der Gradient von

$$P(u) = I(u) - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k(u)$$

ist damit

$$P'(u) = u - \sum_{n=1}^{n} \omega_n^2$$

und es muß $\{ u \in M \mid P'(u) = 0 \}$ invariant unter der KdV sein. Erinnern wir uns nun, daß die $\omega_1, \ldots, \omega_n$ Eigenfunktionen sind, so läßt sich zusammenfassen:

Satz 1: *Für beliebige $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ bilden die Lösungen $u \in S(\mathbb{R})$ des folgenden Systems gewöhnlicher Differentialgleichungen*

$$D^2 \omega_k + u\omega_k = \lambda_k \omega_k, \; k = 1, \ldots, n; \; u = \sum_{k=1}^{n} \omega_k^2,$$

eine Mannigfaltigkeit, die invariant unter dem Fluß der KdV *ist.*

Offensichtlich ist dies wegen der Randbedingung im Unendlichen eine n-dimensionale, also *endlichdimensionale* invariante Teilmannigfaltigkeit der ∞-dimensionalen Mannigfaltigkeit $S(\mathbb{R})$. Für den Fall $n = 1$ überzeugt man sich leicht, daß dadurch die Solitärwelle der Geschwindigkeit $c = 4\lambda$ ausgezeichnet ist. Im allgemeinen Fall zeigt eine recht einfache asymptotische Überlegung [11], daß wir durch diesen Satz diejenigen Lösungen ausgezeichnet haben, die n wechselwirkende Solitonen der Geschwindigkeiten $c_k = 4\lambda_k$, $k = 1, \ldots, n$, beschreiben.

Unsere elementaren Betrachtungen haben uns die entscheidende Vereinfachung erbracht, daß wir uns zum Verfolg der n-Solitonenlösung auf eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit zurückziehen können, anstatt den Fluß auf einer ∞-dimensionalen Mannigfaltigkeit zu studieren.[9)]

Der Erfolg des von uns eingeschlagenen Weges hing aber vom Vorhandensein möglichst vieler Erhaltungsgrößen ab; was natürlich das Problem aufwirft, diese Erhaltungsgrößen auf etwas systematischere Weise zu bestimmen. In diesem Zusammenhang erhebt sich auch die Frage, ob es, abgesehen von $I(u)$, neben den diskreten Spektralpunkten von $L(u)$, die ja Erhaltungs-

---

9) Die Idee, Solitonenlösungen durch Gradienten der Erhaltungssätze zu beschreiben, geht auf eine fundamentale Arbeit von P. Lax [27] zurück. Lax verwandte allerdings nur Erhaltungsgrößen mit lokalen Gradienten, weshalb ihm das allgemeine Bildungsgesetz des oben aufgeführten Satzes verborgen blieb. Dieser Satz befindet sich erstmals, als komplizierte und mehr zufällige Folge der inversen Streumethode, in dem bedeutenden Beitrag [20].

größen recht artifizieller Natur sind und deren physikalische Interpretation schwerfallen würde, weitere „vernünftige“ Erhaltungsgrößen der KdV gibt.

Beim Lösen dieser Fragen hilft uns die Methode des „spektralen Gradienten“ [12] weiter, die wir hier am Beispiel der KdV kurz exemplifizieren wollen. Man geht so vor:

Man finde einen von u abhängigen Integrodifferentialoperator $\Psi(u)$, der die Eigenschaft hat, daß jeder Gradient eines Eigenwertes von $L(u)$ selbst Eigenvektor von $\Psi(u)$ ist. Dies läßt sich im allgemeinen mit linearer Algebra bewerkstelligen. Offensichtlich hat dieser Operator dann die Eigenschaft, daß er die durch das diskrete Spektrum von $L(u)$ gegebenen speziellen Gradienten von Erhaltungsgrößen wieder auf Gradienten von Erhaltungsgrößen abbildet. Wegen der „potentiellen Reichhaltigkeit“[10] des Spektrums muß diese Eigenschaft dann allgemein gelten. Das heißt, $\Psi(u)$ hat allgemein die Eigenschaft, Gradienten von Erhaltungsgrößen isospektraler Flüsse von $L(u)$ wieder auf Gradienten von Erhaltungsgrößen dieser Flüsse abzubilden.

Durchführung im Fall der KdV ergibt, daß die Quadrate der Eigenvektoren von $L(u) = D^2 + u$ Eigenvektoren des Operators

$$(11) \qquad \Psi(u) = D^{-1}\,(D^3 + 2Du + 2uD) \quad (\text{wobei}\, D^{-1} \underset{\text{def}}{=} \int_{-\infty}^{x} \cdot\, dx)$$

sind. Da nun u Gradient einer Erhaltungsgröße der KdV ist, sind die

$$(12) \qquad G_n(u) = (\Psi(u))^n u, \quad n \in \mathbb{N}_0$$

weitere Kandidaten für solche Gradienten. In der Tat haben alle $G_n(u)$ Potentiale – was an dieser Stelle nicht so leicht einzusehen ist – die dann Erhaltungsgrößen der KdV, und jedes anderen isospektralen Flusses des Schrödingeroperators, sind. Die KdV hat mithin unendlich viele Erhaltungsgrößen, was keineswegs selbstverständlich ist und den wunderbaren Charakter dieser (und anderer) Gleichungen erneut manifestiert.

III. Symmetrien und Hereditäre Symmetrien

Eine weitere Möglichkeit zum Auffinden niederdimensionaler invarianter Untermannigfaltigkeiten für vorgegebene Flüsse ist durch Symmetriebetrachtungen gegeben. Man sucht dabei Lösungen, die gegenüber einer vorgegebenen Symmetrieoperation der Gleichung invariant sind. Ein Aspekt, der im täglichen Umgang mit Mathematik ja häufig vorkommt, wenn man

[10] Diesen, zugegeben blumigen, Begriff können wir hier nicht weiter erläutern, eine genaue Untersuchung findet sich in dem unpublizierten essay [12], welcher heute häufiger in der Literatur zitiert wird – leider meist aber nur um falsche Aussagen und Methoden zu verbrämen oder um zu einem schlampigen Umgang mit dem kontinuierlichen Spektrum aufzurufen.

sich zum Beispiel für rotationssymmetrische Lösungen, oder ähnliches, bei geeigneten Gleichungen interessiert.

Wir wollen uns hier nur um kontinuierliche Symmetriegruppen kümmern – obwohl zum Beispiel bei der KdV auch diskrete Gruppen bzw. Halbgruppen eine Rolle spielen (Autobäcklundtransformationen). Wir erinnern daran, daß die durch die Evolutionsgleichungen

$$(13) \qquad u_t = K(u)$$

und

$$(14) \qquad u_t = H(u)$$

gegebenen Flüsse, die ja Lie-Gruppen sind, miteinander kommutieren, wenn ihre infinitesimalen Generatoren K und H in der Lie-Algebra der Vektorfelder kommutieren, wenn also $[K, H] = 0$ gilt. Wir nennen dann den Fluß von (14) eine Symmetriegruppe von (13). Man kann diese Tatsache störungstheoretisch folgendermaßen ausdrücken: (14) definiert einen mit (13) kommutierenden Fluß, wenn für jede Lösung $u(t)$ von (13) die Funktion $w(t) = H(u(t))$ eine Lösung der Linearisierung

$$w_t = K'(u(t))\,[w(t)] = \frac{\partial}{\partial \epsilon} K(u(t) + \epsilon w(t))_{|\epsilon = 0}$$

von (13) ist. Mit anderen Worten, die infinitesimale Transformation

$$u(t) \to u(t) + \epsilon H(u(t)),\ \epsilon \text{ infinitesimal}$$

muß (13) forminvariant lassen. So läßt zum Beispiel die infinitesimale Transformation

$$u(t, x) \to u(t, x) + \epsilon u(t, x)_x$$

die KdV invariant, was nichts anderes bedeutet, als daß die KdV die Gruppe der x-Translationen als Symmetriegruppe hat. Oder anders ausgedrückt: Die Flüsse $u_t = u_x$ und $u_t = 6uu_x + u_{xxx}$ kommutieren.

Kennt man nun eine einparametrige Symmetriegruppe von (13), mit infinitesimalem Generator $G(u)$, so hat man trivialerweise mit

$$\{ u \in M \mid G(u) = 0 \}$$

die gegen diese Gruppe invariante Mannigfaltigkeit gefunden, die dann natürlich auch invariant unter dem Fluß von (13) ist. Diese Methode zur Auszeichnung und Bestimmung spezieller Lösungen haben wir implizit schon bei der Berechnung der Solitärwelle der KdV benutzt. Denn gemäß Ansatz entsprachen die Solitärwellen mit Geschwindigkeit c derjenigen Untermannigfaltigkeit, die durch Invarianz gegenüber einer Gruppe ausgezeichnet war, deren infinitesimaler Generator Linearkombination der Generatoren von Zeit- und x-Translation war, nämlich gleich $cu_x + (6u_x + u_{xxx})$ war.

Selbstverständlich wenden wir diese Methode zur Konstruktion spezieller Lösungen bei linearen Systemen ständig an, ohne uns darüber Rechenschaft abzulegen. Ein lineares System

(15) $\quad v_t = Lv$; L linearer Operator auf Vektorraum E

hat nämlich schon aufgrund seiner Linearität eine recht große, häufig ∞-dimensionale, abelsche Symmetriegruppe. Denn offensichtlich kommutiert (15) mit allen Flüssen der Form

$$v_t = L^m v, \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

und damit ist (15) invariant gegenüber jeder einparametrigen Gruppe, deren Generator in der von $\{ L^m \mid m = 0, 1, \ldots \}$ erzeugten Lie-Algebra liegt. Die Auszeichnung invarianter Mannigfaltigkeiten entspricht dann der Betrachtung von Summen von Eigenräumen von L, oder allgemeiner, der Betrachtung L-invarianter Teilräume von E.

Ganz anders ist die Situation hingegen bei nichtlinearen Evolutionsgleichungen, dort haben wir es häufig mit dem Fall zu tun, daß, abgesehen von der Zeittranslation, gar keine Symmetriegruppe existiert. Schon deshalb können natürlich diejenigen nichtlinearen Gleichungen, welche doch Symmetriegruppen besitzen, ein besonderes Interesse beanspruchen.

Man sollte sich an dieser Stelle davor hüten, zu glauben, daß man einer nichtlinearen Gleichung ihre Symmetriegruppe gewissermaßen durch intelligentes Inspizieren ansieht. Wer dies glaubt, mag einmal versuchen zu zeigen, daß

$$u_t = u_{xxxxx} + 3u_{xxx}u^2 + 15u_x u_x u + u^3 u_x$$

abgesehen von Zeit- und Ortstranslation gar keine Symmetriegruppen besitzt, daß aber hingegen

$$\begin{aligned} u_{xt} &= u_{xx} + \sin(u) + u_{xx}\cos(u) - u_x^2 \sin(u) \\ &\quad + 2u_x \sin(u) + u_{xx} \int_{-\infty}^{x} \sin(u(\xi, t))d\xi \end{aligned}$$

eine unendlich-dimensionale abelsche Symmetriegruppe hat[11].

[11] Wer bei der letzten Gleichung auch nur einen weiteren Symmetriegenerator, der nicht Linearkombination von Zeit- und Ortstranslation ist, angeben kann (natürlich ohne weiterzulesen oder in den Originalarbeiten des Verfassers nachzuschauen), erhält, von BI einen Buchpreis.

Abstrakt gesprochen, geht es bei der Konstruktion von Symmetriegruppen also darum, zu einem gegebenen Lie-Algebra-Element, nämlich zum Vektorfeld $K(u)$, den Kommutanten zu finden, oder, noch besser, eine möglichst große abelsche Lie-Algebra zu finden, die das Vektorfeld $K(u)$ enthält.

Wir wollen skizzieren, wie man mit Hilfe der Methode hereditärer Symmetrien[12)] diese Aufgabe der Konstruktion großer abelscher Lie-Algebren löst. Das Verfahren hat zudem den Vorteil, daß man in speziellen Klassen, die „angenehmen" nichtlinearen Evolutionsgleichungen, also diejenigen die ähnliche Eigenschaften wie die KdV haben, auffinden kann.

Die Definition des zentralen Begriffs läßt sich am Beispiel der Linearisierung motivieren. Wir nehmen an, die Gleichung (13) lasse sich linearisieren:

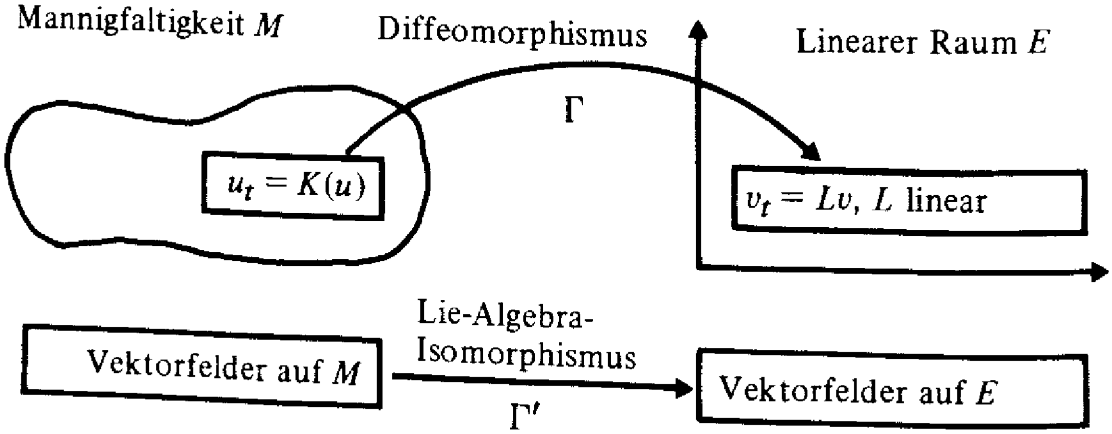

Fig. 2 – Linearisierung

Das soll heißen, daß wir die Mannigfaltigkeit M durch einen C^∞-Diffeomorphismus eindeutig auf einen linearen Raum so abbilden können, daß die Gleichung (13) in die lineare Gleichung (15) übergeht. Solche Diffeomorphismen geben natürlich Anlaß zu einer Übertragung der entsprechenden Vektorfelder, die durch den Lie-Algebra Isomorphismus $\Gamma'(u)$ geschieht. Insbesondere muß gelten:

$$L = \Gamma'(u)[K(u)].$$

Da (15) eine ∞-dimensionale abelsche Symmetriegruppe besitzt, kann man deren Lie-Algebra $\{ L^m \mid m \in \mathbb{N}_0 \}$ natürlich mit dem Isomorphismus

12) Dieser Begriff wurde 1979 erstmals in [13] eingeführt und an einer Reihe populärer nichtlinearer Differentialgleichungen exemplifiziert. Unabhängig davon, aber fast gleichzeitig, haben Gelfand-Dorfman [21] und Magri [29] sehr ähnliche, doch etwas speziellere Strukturen gefunden.

$\Gamma'(u)$ zurückziehen und erhält für

$$(16) \qquad \Phi(u) \underset{\text{def}}{=} \{\Gamma'(u)\}^{-1} L \Gamma'(u)$$

daß die Vektorfelder

$$(17) \qquad \Phi(u)^n K(u), \; n = 0, 1, \ldots$$

eine eventuell unendlich-dimensionale Lie-Algebra aufspannen, die offensichtlich $K(u)$ enthält. Womit die Aufgabe gelöst wäre.

Soweit, so gut! Aber das Konzept hat den entscheidenden Nachteil, daß es total unbrauchbar ist, weil sich kaum eine vernünftige nichtlineare Gleichung in diesem strengen Sinne linearisieren läßt.

Trotzdem kann uns diese fragwürdige Betrachtung auf eine richtige Idee bringen. Es ist doch so, daß die Kommutativität der von (16) erzeugten Lie-Algebra eine rein algebraische Angelegenheit ist, die irgendwie auf eine spezielle algebraische Eigenschaft des Operators $\Gamma(u)$ zurückzuführen ist. Und diese Eigenschaft wiederum muß sich aus den algebraischen Eigenschaften der beteiligten Größen, nämlich aus der Linearität von L und der Symmetrie der zweiten Ableitung $\Gamma''(u)$ von $\Gamma(u)$ ergeben. Wir müssen also diese Eigenschaften zu einer geeigneten Eigenschaft von $\Phi(u)$ umformulieren. Durchführung gibt Anlaß zu folgender:

Definition: Sei $(\mathsf{L}, [\ ,\ ])$ eine Lie-Algebra und $\Phi : \mathsf{L} \to \mathsf{L}$ ein linearer Operator. Φ heißt *hereditäre*[13] *Symmetrie*, wenn für alle $A, B \in \mathsf{L}$ gilt

$$(18) \qquad \Phi^2[A, B] + [\Phi A, \Phi B] = \Phi\{[\Phi A, B] + [A, \Phi B]\}.$$

In der Tat läßt sich mit unkomplizierter Rechnung zeigen, daß die operatorwertige Funktion $\Phi(u)$, die durch (16) gegeben ist, diese Eigenschaft hat. Der Beweis, daß ein hereditäres Φ große abelsche Teilalgebren erzeugt, ist nun eine rechte Trivialität.

Satz 2: *Sei Φ hereditär und sei A ein Element von L, welches mit Φ in folgendem Sinne kommutiert:*

$$\Phi[A, B] = [A, \Phi B] \quad \textit{für alle } B \in \mathsf{L}.$$

Dann kommutiert Φ mit allen $\Phi^n A$, $n \in \mathbb{N}_0$, und außerdem spannt

$$\{\Phi^n A \mid n \in \mathbb{N}_0 \textit{ oder } \in \mathbb{Z} \textit{ wenn } \Phi \textit{ invertierbar}\}$$

eine abelsche Lie-Algebra auf.

[13] Der Name hereditär (erblich) erklärt sich daraus, daß Φ – wie wir gleich sehen werden – in großem Stil für eine Vererbbarkeit von Symmetrien verantwortlich ist.

Beweis: Benutzen wir die Tatsache, daß Φ und A kommutieren, so erhalten wir für beliebiges B aus Gleichung (18), daß $[\Phi A, \Phi B] = \Phi[\Phi A, B]$.

Also kommutiert Φ auch mit ΦA. Induktion liefert nun:

$$[\Phi^n A, \Phi^m A] = \Phi^m[\Phi^n A, A] = -\Phi^m[A, \Phi^n A] = -\Phi^{n+m}[A, A] = 0. \blacksquare$$

Wir werden diesen Satz nur für den Fall benötigen, daß die Abbildung Φ durch eine operatorwertige Funktion $\Phi(u)$ gegeben ist, also eine Funktion, die jedem $u \in M$ einen linearen Operator im Tangentialraum an der Stelle u zuordnet. Die Bedingung, daß $\Phi(u)$ mit einem Vektorfeld $A(u)$ kommutieren soll, ist allerdings sehr einschränkend und weitreichend, wie man an den folgenden – leicht zu beweisenden – Konsequenzen sieht [13], [14]:

Lemma 1: *Es kommutiere die operatorwertige Funktion $\Phi(u)$ mit dem Vektorfeld $A(u)$. Dann gilt:*

i) *Für jede Lösung $u(t)$ der Evolutionsgleichung $u_t = A(u)$ haben wir*

(19) $$\Phi(u(t))_t = A'(u)\Phi(u) - \Phi(u)A'(u).$$

Also konstituiert $u_t = A(u)$ einen isopektralen Fluß für den Operator $\Phi(u)$.

Eine andere Konsequenz von (19) ist, daß $\Phi(u)$ Generatoren von Symmetriegruppen der Gleichung $u_t = A(u)$ wieder auf Generatoren von Symmetriegruppen abbildet.

ii) *Für beliebige Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ist die Mannigfaltigkeit*

$$\{u \in M \mid A(u) = \sum_{k=1}^{n} w_k,\ w_k \text{ Eigenvektor von } \Phi(u) \text{ mit Eigenwert } \lambda_k\}$$

unter dem Fluß von $u_t = A(u)$ invariant.

Für die Anwendungen, die wir im Sinne haben, besteht der Pfiff unseres Satzes aber gerade darin, daß wir die Aussage „Φ kommutiert mit A“ nur in einem äußerst trivialen Fall brauchen werden, und dann dieselbe Aussage für weitaus kompliziertere Fälle umsonst geliefert bekommen.

Beispiel 2: In der Situation von Beispiel 1 ist der auf der Lie-Algebra der Vektorfelder definierte Operator

$$K(u) \to \Phi(u)K(u),$$

wobei

(20) $$\Phi(u) = (D^3 + 2Du + 2uD)D^{-1}$$

eine hereditäre Symmetrie[14].

Wegen der Translationsinvarianz kommutiert Φ mit dem Vektorfeld u_x. Also kommutieren alle Vektorfelder

(21) $$K_n(u) = \Phi^n(u)u_x,\ n = 0, 1, \ldots$$

mit Φ und spannen außerdem eine ∞-dimensionale abelsche Lie-Algebra auf. Das zu $n = 1$ gehörende Vektorfeld

$$K_1(u) = 6uu_x + u_{xxx}$$

ist die rechte Seite der KdV. Mithin sind die Flüsse der Gleichungen

$$u_t = K_n(u)$$

einparametrige Symmetriegruppen der KdV. Die KdV hat also eine ∞-dimensionale abelsche Symmetriegruppe. Außerdem können wir ablesen (Lemma 1 i), daß die KdV einen isospektralen Fluß für den Operator $\Phi(u)$ definiert, und daß jede Eigenvektorzerlegung von $K(u)$, oder auch u_x, nach den Eigenvektoren von Φ auf eine bezüglich der KdV invariante Mannigfaltigkeit führt (Lemma 1.ii). Daß diese Mannigfaltigkeiten gerade den Solitonlösungen entsprechen, werden wir noch durch einen Vergleich von (20) und (11) verstehen. Benutzt man die Darstellung in Lemma 1 ii) zusammen mit der Rekursionsformel (21), so sieht man, daß sich diese „Solitonenmannigfaltigkeiten" offensichtlich auch durch eine lineare Abhängigkeit zwischen den Symmetriegruppengeneratoren $K_n(u)$ charakterisieren lassen.

Für den hier, vom übergeordneten Blickwinkel aus betrachteten Fall der KdV waren einige der soeben abgeleiteten Tatsachen natürlich schon frühzeitig bekannt. Die $K_n(u)$ hatte man sehr schnell als weitere Vektorfelder ausgemacht, welche zu isospektralen Flüssen des Schrödingeroperators führten (generalized KdV-equations, siehe [27]). Der Operator $\Phi(u)$ in (20), sowie einige seiner geheimnisvollen Eigenschaften, war schon von A. Lenard gefunden worden (siehe [27]). Die Idee, Symmetriegeneratoren rekursiv zu erzeugen, kam erstmals bei Olver [39], dem aber die Kommutativität der Symmetriegruppe entging, da ihm die Heriditarität des Operators $\Phi(u)$ verborgen blieb.

---

[14] Das Nachrechnen der Hereditarität ist in diesem einfachen Fall durch eine geschickte ein- bis zweiseitige Rechnung zu erledigen. Im allgemeinen Fall ist die Überprüfung der Hereditarität allerdings eine stumpfsinnige und beschwerliche Angelegenheit. Um ein Beispiel zu nennen: Für die Hereditarität des die Caudry-Dodd-Gleichung beherrschenden Operators [16] muß man ca. 500 bis 1000 Terme eines komplizierten Differentialausdrucks überprüfen. Meine Studenten haben inzwischen ein Pascal-Programm entwickelt, welches einem diese langweilige Arbeit abnehmen kann. Allgemein kann man hereditäre Operatoren höherer Ordnung aus Strukturaussagen gewinnen wie sie zum Beispiel in [14] dargelegt wurden.

Ich möchte hier noch anfügen, daß man recht einfach weitere Beispiele für hereditäre Operatoren (niedriger Ordnung in D) finden kann. So sind auch [13] die Operatoren

(22) $$\Phi_2(u) = D + \alpha\, Du\, D^{-1}$$

(23) $$\Phi_3(u) = D^2 + (\gamma + 2\beta u + \alpha u^2) + u_x\, D^{-1}(\beta + \alpha\, u)$$

für beliebige $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ hereditär. Läßt man komplexe u zu, und beschränkt sich auf reelle Differenzierbarkeit von M, so findet man, daß

$$\Phi_4(u) = i\, D + i\alpha\, u\, D^{-1}\ \mathrm{Re}(\bar{u}\,\cdot\,),\quad \alpha \in \mathbb{R}$$

ebenfalls hereditär ist. Dabei ist $\mathrm{Re}(\bar{u}\,\cdot\,)$ die Abbildung

$$w \to \text{Realteil von } (\bar{u}\, w).$$

Alle diese Operatoren kommutieren trivialerweise mit u_x, da sie ja nicht explizit von x abhängen. Also können wir damit – analog zu Beispiel 2 – partielle Differentialgleichungen (oder auch Integrodifferentialgleichungen)

$$u_t = K(u) = \Phi^n(u)u_x,\ n \in \mathbb{Z}$$

erzeugen, die ebenfalls ∞-dimensionale abelsche Symmetriegruppen haben. Unter diesen Gleichungen befinden sich: Burgers Gleichung ($K(u) = \Phi_2(u)u_x$), die modifizierte Korteweg-de Vries Gleichung ($K(u) = \Phi_3(u)u_x$, $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 2$), die potentielle Form der Sinus-Gordon Gleichung in Lichtkegelvariablen ($K(u) = \Phi_3(u)^{-1}u_x$, $\beta = \gamma = 0$, $\alpha = 2$) und die wohlbekannte eindimensionale nichtlineare Schrödingergleichung ($K(u) = \Phi_4(u)u_x$), um nur einige zu nennen.

IV. Hamiltonstrukturen

Dem aufmerksamen Leser wird nicht entgangen sein, daß der in (20) gegebene Operator $\Phi(u)$ das Transponierte des Operators $\Psi(u)$ aus (11) ist. Diese Tatsache ist auch dafür verantwortlich, daß sich beide Operatoren in gleicher Weise zur Beschreibung der Solitonenmannigfaltigkeiten heranziehen lassen[15]. Daß diese Dualität kein Zufall ist, wollen wir im folgenden darlegen. Auf eine kurze Formel gebracht liegt der Grund dafür darin, daß die KdV ein Hamiltonsystem ist, sogar mit ∞-vielen verschiedenen Hamiltonformulierungen.

Was damit gemeint ist, läßt sich am besten am Beispiel endlich-dimensionaler Systeme der klassischen Mechanik erläutern. Betrachtet zum Beispiel

[15] Dies ist offensichtlich, denn w ist Eigenvektor von $\Psi(u)$ genau dann, wenn w_x Eigenvektor von $\Phi(u)$ ist.

ein Physiker die Bewegungsgleichung von Teilchen in einem rotationssymmetrischen Potentialfeld, so weiß er sofort, daß der Drehimpuls des Systems eine Erhaltungsgröße ist. Ähnlich schließt er aus der Translationsinvarianz eines Systems auf die Erhaltung des Impulses und aus der Zeitunabhängigkeit des Kraftfeldes auf die Erhaltung der Energie. Dies alles sind Spezialfälle eines von Emmy Noether in ihrer Dissertation aufgeklärten Zusammenhangs zwischen den kontinuierlichen Symmetriegruppen des Systems und den physikalischen Erhaltungssätzen. Dieser Zusammenhang gilt allerdings nur für spezielle Systeme, nämlich die sogenannten Hamiltonsysteme:

$$(24)\qquad \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0, & -I \\ I, & 0 \end{pmatrix} \text{ Gradient } H(q, p),$$

wobei $p = p(t)$ und $q = q(t)$ in einem Raum gleicher Dimension liegen, sagen wir dem $\mathbb{R}^n$, und wobei die Gradientenbildung sich auf den $\mathbb{R}^{2n} = \mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$ bezieht. Die Elemente der Matrix in (24) müssen natürlich selbst $n \times n$-Matrizen sein. Der von E. Noether entdeckte Zusammenhang sagt (in der hier gewählten Sprache): Der Operator

$$(25)\qquad J = \begin{pmatrix} 0, & -I \\ I, & 0 \end{pmatrix}$$

bildet Gradienten von Erhaltungsgrößen auf infinitesimale Generatoren von Symmetriegruppen des Systems ab.

Natürlich kann man mit dem Operator J dann die Lie-Algebra-struktur von den Vektorfeldern auf die Gradientenfelder zurückziehen; die so erhaltenen Lie-Klammern nennt man *Poisson-Klammern*. Wir sollten vielleicht erwähnen, daß die Umkehrung des Sachverhalts nicht immer gilt, das heißt, für den Generator $A(p, q)$ einer Symmetriegruppe ist $J^{-1}A(p, q)$ nicht unbedingt Gradient einer Erhaltungsgröße, denn $J^{-1}A$ hat nicht notwendigerweise ein Potential. Schon der dreidimensionale harmonische Oszillator liefert ein Gegenbeispiel.

So speziell wie die Gleichung (24) aussieht ist sie gar nicht. Denn für den Noetherschen Satz, der ja offensichtlich einen lokalen algebraischen Sachverhalt ausdrückt, genügt es, wenn eine Gleichung lokal von der Form (24) ist, d.h. bezüglich eines vom jeweiligen Punkt abhängigen Koordinatensystems. Aber auch diese Beobachtung nutzt uns für ∞-dimensionale Mannigfaltigkeiten herzlich wenig, denn mit Koordinatisierungen befindet man sich dort nicht immer auf beständigem Grund. Doch können wir wieder dieselbe Vorgehensweise wie im letzten Kapitel anwenden. Wir betrachten einfach ein Hamiltonsystem in beliebigen Koordinaten, dann muß sich die Möglichkeit zur speziellen Koordinatisierung ja in einer algebraischen Eigenschaft ausdrücken, die dann wohl für das Noether'sche Theorem verantwortlich ist. Durchführung dieses Gedankengangs führt uns auf folgende

Definition[16]: Eine operatorwertige Funktion $\Omega(u)$, die jedem $u \in M$ einen linearen Operator vom Tangentialraum in den Cotangentialraum an der Stelle u zuordnet, heißt *symplektisch*, wenn sie antisymmetrisch ist, und wenn für beliebiges $u \in M$ und für beliebige Vektoren a, b, c aus dem Tangentialraum von u gilt, daß die durch

(26) $$[a, b, c] \underset{\text{def}}{=} \langle \Omega'(u)[a]b, c \rangle$$

definierte Klammer die Jacobi-Identität

(27) $$[a, b, c] + [b, c, a] + [c, a, b] = 0$$

erfüllt. Dabei steht $\langle\ ,\ \rangle$ für die Dualität zwischen Cotangentialraum und Tangentialraum. Antisymmetrie bedeutet natürlich $\langle \Omega(u)a, b \rangle = - \langle \Omega(u)b, a \rangle$ für alle Tangentialvektoren a, b.

Wir wollen, bevor wir auf den Nutzen dieser Definition eingehen, noch einen technischen Sachverhalt festhalten. Wenn nämlich ein symplektischer Operator invertierbar ist, also $J(u) = \Omega(u)^{-1}$, dann läßt sich die oben festgehaltene algebraische Eigenschaft auch durch eine entsprechende Eigenschaft von $J(u)$ ausdrücken. Es gilt dann nämlich, daß für beliebige Vektoren a^*, b^*, c^* aus dem Cotangentialraum von u die Klammer

(28) $$\{a^*, b^*, c^*\} \underset{\text{def}}{=} \langle b^*, J'(u)[J(u)c^*]b^* \rangle$$

die Jacobi-Identität erfüllt. Deshalb wollen wir antisymmetrische Operatoren, die dies erfüllen, *implektisch* (für invers-symplektisch) nennen[17].

Nun zum Nutzen unserer etwas aufwendigen Definition. Die Gleichung

(29) $$u_t = K(u)$$

nennen wir ***Hamiltonsystem***, wenn es eine skalare Funktion P auf M gibt und einen implektischen Operator $J(u)$ so, daß

[16] Ich spreche im folgenden, wie in den vorangegangenen Kapiteln lieber von Operatoren als von Bilinearformen, weil ich glaube, daß dies der ∞-dimensionalen Situation angemessener ist. Überhaupt wird mancher Fachmann sich fragen, warum ich Differentialformen ganz vermieden habe. Auch hier glaube ich, daß die gewählte Notation besser geeignet ist dem Anfänger das Verständnis zu erleichtern. Auf die Invertierbarkeit von Ω, die der Nichtdegeneriertheit der Form $\langle \Omega(u)a, b \rangle$ entspricht, habe ich übrigens verzichtet, da sie für den folgenden Satz wirklich keine Rolle spielt.

[17] Da die Gefahr besteht, daß mich ein Referent dieser Arbeit darauf hinweist, daß der hierdurch ausgedrückte Sachverhalt in dieser oder jener Arbeit unter einem anderen Namen vorkommt, erkläre ich vorsorglich, daß ich mir dieser Tatsache bewußt bin. Aber da es ca. 5–10 verschiedene Bezeichnungen gibt, habe ich mir erlaubt, die mir passende elfte Bezeichnung zu wählen.

(30) $K(u) = J(u)\,\mathrm{grad}\,P(u)$

wobei wir der Deutlichkeit halber grad P statt P' geschrieben haben. Im endlich dimensionalen Fall heißt dies in der Tat, daß (30) lokal von der Form (24) ist. Im folgenden bezeichnen $\Omega(u)$ und $J(u)$ immer symplektische bzw. implektische Operatoren.

Noetherscher Satz: *Ist $Q(u)$ eine Erhaltungsgröße des Hamiltonsystems (30), dann ist $J(u)$ grad $Q(u)$ infinitesimaler Generator einer einparametrigen Symmetriegruppe des Systems.*

Neben diesem Satz ist noch zu erwähnen, daß sich mit Hilfe von $J(u)$ leicht Poissonklammern für die Covektorfelder definieren lassen. Wir wollen diesen Aspekt der Lie-Algebra-Struktur im Cotangentialbündel aber nicht weiter verfolgen.

Im Anblick des Noetherschen Satzes hatte F. Magri [28] nun eine geniale Idee. Er überlegte sich, daß man bei einem System mit zwei verschiedenen Hamiltonformulierungen den Noetherschen Satz benutzen könne, um auf verschiedene Weisen zwischen Erhaltungsgrößen und Symmetriegruppen hin und herzuspringen, wodurch man dann, durch Iteration des Verfahrens, unendlich viele Erhaltungssätze bzw. Symmetriegruppen erzeugen würde. Die Schwierigkeit, daß man bei Umkehrung des Noether'schen Satzes, von Generatoren der Symmetriegruppen ausgehend, nicht unbedingt bei Gradienten landen würde, überwand er durch eine Kopplungsbedingung.[18] Interessiert man sich aber nur für Symmetriegruppen, so ist diese Kompatibilitätsbedingung überhaupt nicht nötig.

Satz 3 [17]: *Ist das Hamiltonsystem (30) bi-hamiltonisch in dem Sinne, daß es einen symplektischen Operator $\Omega(u)$ gibt, so daß $\Omega(u)K(u)$ ein Gradient ist, dann bildet der Operator*

(31) $\Phi(u) = J(u)\Omega(u)$

Generatoren von Symmetriegruppen in Generatoren von Symmetriegruppen des Systems ab. Also sind alle Vektorfelder

(32) $K_n(u) = \Phi(u)^n K(u) = \Phi(u)^n J(u)\,\mathrm{grad}\,P(u)$

Symmetriegruppengeneratoren von (30).

In der Tat kann man diesen Satz dort recht effektiv zur Konstruktion von Symmetriegruppen benutzen, wo keine hereditäre Struktur vorliegt [17][19].

[18] Zwei Jahre später kamen Gelfand-Dorfman unabhängig von Magri auf dieselbe Idee [21].

[19] Man sollte aber auch nicht übersehen, daß die hereditäre Struktur einem Ergebnisse dort liefern kann, wo keinerlei hamiltonische Struktur vorliegt (einfachstes Beispiel: Burgers Gleichung).

Natürlich kann es passieren, daß die auf diese Weise konstruierte Symmetriegruppe nicht kommutativ ist. Jedoch besteht auch hier ein enger Zusammenhang mit der Struktur hereditärer Symmetrien. Wir nennen einen symplektischen Operator $\Omega(u)$ und einen implektischen Operator $J(u)$ *kompatibel*, wenn $\Phi(u) = J(u)\Omega(u)$ hereditär ist. Vergleicht man dies mit Magri's Kopplungsbedingung, die zwei implektische Operatoren $J_1(u)$, $J_2(u)$ genau dann erfüllen, wenn $J_1(u) + J_2(u)$ wieder implektisch ist, so ergibt sich, daß diese Bedingungen für invertierbares $\Omega(u) = J_1(u)^{-1}$ äquivalent sind [15]. Der Vorteil dieser Beobachtung ist mannigfach:

Nehmen wir an, $J(u)$ und $\Omega(u)$ seien kompatibel. Dann stellt sich heraus, daß

i) für das im Satz behandelte System die ersten Ableitungen aller

$$G_{n-1}(u) = (\Phi(u)^+)^n \operatorname{grad} P(u) = \Omega(u)(\Phi(u))^{n-1} K(u) \tag{33}$$
$$= \Omega(u)\, K_{n-1}(u)$$
$$(n \in \mathbb{N} \text{ oder } n \in \mathbb{Z} \text{ wenn } \Phi \text{ invertierbar})$$

symmetrische Operatoren sind. Diese Formen sind also rotationsfrei und haben deshalb für eine Mannigfaltigkeit mit verschwindender zweiter Homologiegruppe Potentiale, die zum Beispiel im Fall eines Vektorraumes M durch

$$P_n(u) = \int_0^1 \langle G_n(\lambda u), u \rangle \, d\lambda \tag{34}$$

gegeben sind. Alle diese Größen sind Erhaltungsgrößen des Systems. Außerdem kommutieren sie alle bezüglich vernünftiger Poissonklammern (die ja Zurückziehung der Klammern [,] mit Hilfe von Ω oder J sein müssen)[20], denn die K_n kommutieren ja bezüglich dieser Klammern (Satz 1).

ii) für $n \in \mathbb{N}_0$ (oder $n \in \mathbb{Z}$, falls $\Phi(u)$ invertierbar) alle $(\Phi(u)^+)^n \Omega(u)$ implektisch sind. Alle diese Größen sind miteinander kompatibel. Außerdem sind dann natürlich alle Evolutionsgleichungen

$$u_t = K_n(u) \tag{35}$$

hamiltonisch, und sie haben sogar unendlich viele hamiltonische Formulierungen, falls Φ invertierbar ist.

iii) wir ein Verfahren zur Konstruktion hereditärer Symmetrien haben. Wir brauchen ja nur eine Schar implektischer Operatoren der Form

$$\alpha J_1(u) + J_2(u), \; \alpha \text{ beliebig}, \; J_1 \text{ invertierbar}$$

um dann zu wissen, daß $J_2(u) J_1(u)^{-1}$ hereditär ist.

[20] Also gibt es mehrere kanonische Poissonklammern!

Beispiel 3 [17]: Wir betrachten die Mannigfaltigkeit von Beispiel 1. Dann sind für alle Skalare $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Operatoren

$$J(u) = \alpha D + \beta D^3 + \gamma(uD + Du) + \delta DuD^{-1}uD \tag{36}$$

implektisch. Also wissen wir, daß für zwei beliebige Operatoren $J_1(u)$ und $J_2(u)$ aus dieser Schar, der Operator $\Phi(u) = J_2(u)\,J_1(u)^{-1}$ hereditär ist. Darunter befinden sich dann auch die Operatoren aus (22) und (23). Außerdem sind alle Gleichungen der Form

$$u_t = \alpha\, u_x + \beta\, u_{xxx} + 3\gamma u u_x + \frac{3}{2}\,\delta\, u^2 u_x = A(u) \tag{37}$$

hamiltonisch, denn sie sind ja von der Form

$$u_t = J(u) \operatorname{grad} P(u) = J(u)u$$

mit

$$P(u) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} u^2(x)\mathrm{d}x.$$

Da D aus der Schar (36) ist, muß D^{-1} symplektisch sein und da $D^{-1}A(u)$ der Gradient von

$$Q(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{\frac{\alpha}{2}\, u^2(x) - \frac{\beta}{2}\, u_x(x)^2 + \frac{\gamma}{2}\, u(x)^3 + \frac{\delta}{8}\, u(x)^4\right\} \mathrm{d}x$$

ist, muß (37) ein bihamiltonisches System sein. Wegen der Kompatibilität der beiden hamiltonischen Strukturen wissen wir sofort, daß wir eine ∞-dimensionale abelsche Symmetriegruppe haben, sowie unendlich viele (bezüglich der Poissonklammern) miteinander kommutierende Erhaltungsgrößen. Wir wollen diese Quantitäten noch explizit hinschreiben:

Wir verschaffen uns den hereditären Operator

$$\Phi(u) = J(u)D^{-1}$$

dann kommutieren alle Vektorfelder

$$K_n(u) = \Phi(u)^n A(u) = \Phi^{n+1}(u)u_x, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Diese Vektorfelder sind Generatoren einparametriger Symmetriegruppen von (37). Die

$$G_n(u) = D^{-1}K_n(u), \quad n \in \mathbb{Z}$$

sind Gradienten von Erhaltungsgrößen des Systems.

Unter den Gleichungen (37) befindet sich eine Vielzahl der populären vollständig integrablen nichtlinearen partiellen DGL'n. Unter anderem: KdV, modifizierte KdV, Gardnergleichung, oder in einem gewissen Sinne auch Sinus-Gordon-Gleichung und inverse KdV. Weitere Beispiele für diesen Mechanismus findet man in [17].

V. Weitere Zusammenhänge

Ich hatte bereits darauf hingewiesen, daß die Auswahl des vorliegenden Materials sehr subjektiv ist.

Obwohl selbst eine Aufzählung der, von meinem subjektiven Standpunkt aus, bedeutendsten Arbeiten den Rahmen dieses Aufsatzes sprengen würde, möchte ich trotzdem einen Katalog wichtiger Aspekte, Querverbindungen und Erweiterungen angeben, zusammen mit einer allerdings willkürlichen Literaturauswahl.

Für die inverse Streumethode und auch die Zusammenhänge mit Bäcklundtransformationen, Hirotas bilinearer Methode, der Painlevé- und der Monodromie-Eigenschaft, den endlich-dimensionalen vollständig integrablen Systemen[21] (z.B. Calogero System), und vor allem aber den einfallsreichen Beiträgen von Sakharov und Shabat sei auf die schon erwähnte vorzügliche Monographie [2] hingewiesen. Darin findet man auch weitere Anwendungen. Überhaupt habe ich – aus Platzmangel – die Anwendungen im Bereich der Physik überaus stiefmütterlich behandelt. Die Literatur hierzu ist aber zu weit verzweigt, um durch einige wenige Literaturangaben auch nur halbwegs Gerechtigkeit wiederfahren zu lassen. Hinzu kommt, daß manche Physiker, zu Recht oder zu Unrecht sei dahingestellt, in vielen stabilen Phänomenen Solitonen mutmaßen. Diese phantasievolle Einstellung zieht sich vom großen roten Fleck des Jupiters hin bis zum entferntesten Winkel der Quantenfeldtheorie, und trägt natürlich zur ausgiebigen und vollständigen Verwirrung des Anfängers bei.

Trotzdem wird natürlich die Aufhellung des Zusammenhangs mit Quantentheorie und Quantenfeldtheorie in der Zukunft eine wichtige Rolle spielen. Als Einstieg in diesen Problemkreis scheint mir das Studium der Heisenbergschen Spin-Kette (XYZ-model) als eines einfachen und vollkommenen Modells für diese Zusammenhänge geeignet; hier sind – fußend auf die tiefen Beiträge von Baxter – alle notwendigen Querverbindungen vorhanden: Inverse Streutheorie [45], [46], Painlevéeigenschaft [5] und vieles andere.

[21] Ich habe in diesem Artikel den Begriff „vollständig integrabel" bewußt weitgehend vermieden, weil er mir bei ∞-dimensionalen Systemen, die mich vor allem interessierten, nicht abschließend geklärt scheint. Für endlich dimensionale vollständig integrable Systeme – vor allem das schöne Beispiel des geodätischen Flusses – sei auf die interessanten Übersichten von J. Moser [35], [36] hingewiesen, die auch in anderem Zusammenhang lesenswert sind.

Der Zusammenhang mit allgemeiner Relativitätstheorie wird einem bei Studium der Arbeiten von Cosgrove [8], Maison [30] und vieler anderer bewußt.

Jemandem, der sich mehr für das „Grundsätzliche“ der behandelten Fragen interessiert, dem sei ein gründliches Studium der klassischen Mechanik [1] (mein Lieblingsbuch ist aber [31]) und der symplektischen Geometrie [48], [49] angeraten.

Selbst die Lie-Algebra-Aspekte habe ich nur unvollständig behandelt. Für weitere spezielle – und überraschende – Eigenschaften der Lie-Algebra, die bei der Behandlung der KdV eine Rolle spielte, siehe man z.B. Tu [47]. Für das Studium des Zusammenhangs mit den Kac-Moody Algebren sei auf die Reihe der tiefliegenden Arbeiten [22] der Gruppe um Sato hingewiesen.

Wer sich bei der KdV oder ähnlichen Gleichungen für andere Randbedingungen im Unendlichen interessiert, der sollte entweder die Landau-Lifschitz Gleichung [44] studieren (welche viele bekannte Gleichungen enthält) oder er sollte sich die wichtigen Beiträge von Novikov [37] oder zum Beispiel auch Dubrovin [9] zu Gemüte führen.

Dies geht dann allerdings schon in die algebraische Geometrie hinein, ein Aspekt, den ich gänzlich ausgelassen habe. Hierzu gibt es gründliche und tiefgehende Beiträge z.B. von McKean-Moerbeke [23], Krichever [25], Mumford-Moerbeke [33], Adler-Moerbeke [4] und vielen anderen.

Zusammenhänge mit Homotopietheorie wurden von Boya, Carinena und Mateos [7] aufgezeigt.

Über höherdimensionale Probleme (mehrere Raumdimensionen) liegt noch nicht viel vor. Erwähnt habe ich schon, daß erste Anwendungen der inversen Streumethode auf diese Probleme geglückt sind [10]. Außerdem sollte ich noch nachtragen, daß für die Kadomtsev-Petviashvili-Gleichung (2 Raumdimensionen, eine Zeitdimension) eine unendlich-dimensionale kommutative Symmetriegruppe explizit angegeben wurde [38] (siehe auch [22]).

Die letztgenannte Gleichung ist auch insofern interessant, als bei ihr – genau wie bei der Benjamin-Ono Gleichung – explizit zeitabhängige Erhaltungsgrößen und Symmetriegruppen jeder polynomalen Ordnung in t existieren [18], dies kann es bei der KdV nicht geben (nur erste Ordnung möglich.)

Ich sollte den Artikel nicht schließen, ohne auf einige der vielen interessanten und allgemein verständlichen Überblicksartikel hinzuweisen, die zu diesem Thema bereits – unter anderen Akzentsetzung – erschienen sind. Zum Beispiel: Scott-Chu-McLaughlin [43], Moser [34], Miura [32], Osborne-Burch [40].

Literatur

[1] R. Abraham und J.E. Marsden: Foundations of mechanics, Benjamin Publ., London–Amsterdam–Sydney–Tokyo 1978

[2] M.J. Ablowitz und H. Segur: Solitons and the Inverse Scattering Transform, Siam, Philadelphia 1981

[3] M. Adler: Completely Integrable systems, Euclidean Lie Algebras, and Curves, Adv. in Math. 38 (1980), 267–317

[4] M. Adler und P. van Moerbeke: Linearization of Hamiltonian Systems, Jacobi Varieties and Representation theory, Adv. in Math. 38 (1980), 318–350

[5] E. Barouch, B.M. McCoy und T.T. Wu: Zero-field susceptibility of the two-dimensional Ising Model, Phys. Rev. Lett. (1973), 1409–1411

[6] R.J. Baxter: Partition function of the eight vertex lattice model, Ann.Physics 70 (1972), 193–228

[7] L.J. Boya, J.F. Carinena und J. Mateos: Fortschritte der Physik 26, (1978), 175–214

[8] C.M. Cosgrove: Relationsship between the inverse scattering techniques of Belinskij-Zakharov and Hauser-Ernst in general relativity, J.Math.Phys. 23 (1982), 615–633

[9] B.A. Dubrovin: Periodic problems for the Korteweg-de Vries equation in the class of finite band potentials, Functl. Anal. i. Eqs. Priloz. 9 (1975), 41–51

[10] A.S. Fokas und M.J. Ablowitz: On the inverse scattering and direct linearizing transforms for the Kadomtsev-Petviashvili equation, Phys. Letters 94A (1983), 67–70

[11] B. Fuchssteiner: Pure soliton solutions of some nonlinear partial differential equations, Comm.math.Phys. 55 (1977), 187–194

[12] B. Fuchssteiner: Application of spectral-gradient methods to nonlinear soliton equations, Umdruck, Paderborn 1979

[13] B. Fuchssteiner: Application of hereditary symmetries to nonlinear evolution equations, Nonlinear Analysis TMA 3 (1979), 849–862

[14] B. Fuchssteiner: The Lie-Algebra structure of Nonlinear Evolution equations admitting infinite dimensional abelian symmetry groups, Progr. Theor. Phys. 65 (1981), 861–876

[15] B. Fuchssteiner und A.S. Fokas: Symplectic structures their Bäcklund transformations and hereditary symmetries, Physica 4D (1981) 47–66

[16] B. Fuchssteiner und W. Oevel: The bi-Hamiltonian structure of some nonlinear fifth and seventh order differential equations and recursion formulas for their symmetries and conserved covariants, J.Math.Phys. 23 (1982), 358–363

[17] B. Fuchssteiner: The Lie Algebra Structure of Degenerate Hamiltonian and Bi-Hamiltonian Systems, Progr. Theor. Phys. 68 (1982), 1082–1104

[18] B. Fuchssteiner: Mastersymmetries and higher order time dependent symmetries and conserved densities of nonlinear evolution equations, Progr.Theor.Phys. 70 (1983)

[19] C.S. Gardner, J.D. Greene, M.D. Kruskal und R.M. Miura: Method for solving the Korteweg-de Vries equation, Phys.Rev.Lett. 19 (1967), 1095–1097

[20] C.S. Gardner, J.M. Greene, M.D. Kruskal und R.M. Miura: Korteweg-de Vries equation and generalizations VI, Comm. Pure Appl. Math. 27 (1974), 97–133

[21] I.M. Gelfand und I.Y. Dorfman: Hamiltonian Operators and Algebraic structures related to them, Functl. Analy. i. Eqs. Priloz 13 (1979), 13–30 und 14 (1980), 223–226

[22] M. Jimbo, T. Miwa, Y. Mori, M. Kashiwara, M. Sato, E. Date: Transformation groups for soliton equations I bis V, 1979 bis 1981, papers des Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto University, Kyoto

[23] H.P. McKean und P. van Moerbeke: The Spectrum of Hill's equation, Inventiones math. 30 (1975), 217–274

[24] D.J. Korteweg und G. de Vries: On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and a new type of long stationary waves, Philos.Mag.Ser. 5 (1895) 39, 422–443

[25] I.M. Krichever: Integration of nonlinear equations by the methods of algebraic geometry, Functl. Analy. i. Eqs. Priloz. 11 (1976), 15–31

[26] G.L. Lamb, Jr.: Elements of Soliton theory, Wiley Publ. New York–Toronto 1980

[27] P.D. Lax: Integrals of Nonlinear Equations of Evolution and Solitary Waves, Comm. pure and applied math. 21 (1968), 467–490

[28] F. Magri: A simple model of the integrable Hamiltonian equation, J.Math.Phys. 19 (1978), 1156–1162

[29] F. Magri: A geometrical approach to the nonlinear solvable equations, in: Lecture notes in Physics, vol. 120, (ed. M. Boiti, F. Pempinelli, G. Soliani), Springer-Verlag, Berlin 1980

[30] D. Maison: On the complete integrability of the stationary, axially symmetric Einstein equations, J.Math.Phys. 20 (1979), 871–877

[31] J.E. Marsden: Applications of global Analysis in Mathematical Physics, Publish or Perish Inc. Berkeley 1974

[32] M. Miura: Solitons and the Inverse Scattering Method, Jahrbuch 1978, 27–40

[33] P. van Moerbeke und D. Mumford: The spectrum of difference operators and algebraic curves, Acta Math. 143 (1979), 93–154

[34] J. Moser: Hidden symmetries in dynamical systems, American Scientist 67 (1979), 689–695

[35] J. Moser: Various aspects of integrable Hamiltonian systems, in: J. Guckenheimer, J. Moser, S.E. Newhouse: Dynamical Systems, C.I.M.E. Lectures (1978) 233–289. Progress in Mathematics 8, Birkhäuser, Boston 1980

[36] J. Moser: Geometry of Quadrics and Spectral theory, in: The Chern Symposium 1979, Springer, Berlin–Heidelberg–New York 1980, 147–188

[37] S.P. Novikov: The periodic problem for the Korteweg-de Vries equation, Functl. Analy. i. Eqs. Priloz. 8 (1974), 54–66

[38] W. Oevel und B. Fuchssteiner: Explicit formulas for symmetries and conservation laws of the Kadomtsev-Petviashvili equation, Phys.Lett. 88A (1982), 323–345

[39] P.J. Olver: Evolution equations Posessing infinitely many symmetries, J.Math. Phys. 18 (1977), 1212–1215

[40] A.R. Osborne und T.L. Burch: Internal Solitons in the Andaman Sea, Science 208 (1980), 451–459

[41] C. Rebbi: Solitonen, Spektrum der Wissenschaft, April 1979, 63–78

[42] J.S. Russel: Report on waves, Rep. 14th Meeting of the Brit. Ass. for the Advancement of Science (1844), 311–390

[43] A.C. Scott, F.Y.F. Chu, D.W. McLaughlin: The Soliton, a new concept in Applied Science, Proc. of the IEE 61 (1979), 1443–1483

[44] E.K. Sklyanin: On complete integrability of the Landau-Lifshitz equation, Steklov-Institute preprint, Leningrad 1979

[45] K. Sogo und M. Wadati: Quantum Inverse Scattering method and Yang-Baxter Relation for Integrable Spin systems, Progr. Theor. Physics 68 (1982), 85–97

[46] L.A. Takhtadzhan und L.D. Faddeev: The quantum method of the inverse problem and the Heisenberg XYZ-Model, Russian Math. Surveys 34 (1979), 11–68

[47] Gui-zhang Tu: A commutativity theorem of Partial Differential Operators, Comm. Math. Phys. 77 (1980), 289–297

[48] A. Weinstein: Lectures on symplectic manifolds, CBMS Regional Conf. Series no. 29, AMS 1977

[49] A. Weinstein: Symplectic Geometrie, Bull. AMS 5 (1981), 1–86

[50] N.J. Zabusky and M.D. Kruskal: Interaction of „solitons" in a collisionless Plasma and the recurrence of initial states, Phys.Rev.Lett. 15 (1965), 240–243

Benno Fuchssteiner
Gesamthochschule
D-4790 Paderborn