

Ist die "kühne Strategie" wirklich kühn? – Erfahrungen und Einsichten bei der Variation einer mathematischen Situation

von

*Hartmut Spiegel**

Erziehungswissenschaftliche Hochschule Rheinland-Pfalz, Abt. Landau

Zusammenfassung

Wenn es die Aufgabe des zukünftigen Mathematiklehrers ist, "Kindern Probleme verständlich zu machen, ihnen einen experimentellen Zugang zur Untersuchung dieser Probleme zu eröffnen und sie bei ihren "Forschungen" pädagogisch sinnvoll anzuleiten", sollte er während seiner Ausbildung eigene diesbezügliche Erfahrungen im Umgang mit Mathematik machen können. In der Arbeit wird beschrieben, wie versucht wurde, diesem Anliegen in einem mathematischen Seminar der Grund- und Hauptschullehrerausbildung Rechnung zu tragen. Dies geschah dadurch, daß das wichtige heuristische Prinzip der Variation von Daten einer Aufgabenstellung auf eine Aufgabe aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung angewandt wurde. Auch im Rahmen von Mathematikkursen der Sekundarstufe II dürfte ein solches Vorgehen sinnvoll sein.

1. Einleitung

Auf die Bedeutung der Variation von Aufgabenstellungen bzw. mathematischen Situationen wird immer wieder hingewiesen (vgl. z.B. [3], S. 77). Wittmann hat dieser Bedeutung in seiner erweiterten Fassung des "operativen Prinzips" Rechnung getragen, deren diesbezüglicher Teil lautet: "Es ist darauf hinzuwirken, daß das Verhalten von Eigenschaften, Relationen und Funktionen bei Operationen beobachtet wird gemäß der Frage: "Was geschieht mit ..., wenn ...?"' ([4], S. 62). Dies gilt für den Mathematikunterricht auf jeder Stufe. Erst die Untersuchung der Frage: Was ändert sich, wenn ich relevante Daten der Situation ändere? (bzw. Was bleibt gleich?) lenkt den Blick auf Gesetzmäßigkeiten (z.B. bei den proportionalen Funktionen auf Eigenschaften wie Vervielfachungstreue oder Monotonie) oder führt zu Generalisierung von Ergebnissen, die für einen Spezialfall gewonnen wurden, d.h. führt zur Einsicht in die Struktur der Situation. Außerdem können durch Variation von Aufgabenstellungen neue und interessante mathematische Fragen gewonnen werden.

Im folgenden ist der Gang einer dem o.a. Prinzip folgenden Untersuchung des "kühnen Spiels" ([1], S. 71, [2], S. 20) in einer Veranstaltung (Seminar)

* Anschrift des Autors: Assistenzprofessor Dr. H. Spiegel, Pfälzerstr. 6, 6520 Worms 21 – Eingang: 20.3.1978

mit Lehramtsstudenten (Primarstufe und Sekundarstufe I) dargestellt. Sie erwies sich als fruchtbar sowohl hinsichtlich der Gewinnung und Vertiefung inhaltlicher Einsichten als auch hinsichtlich der für den zukünftigen Lehrer wichtigen eigenen Erfahrung des heuristischen Werts dieser Vorgehensweise. Auch für den Unterricht in entsprechenden Kursen der Sekundarstufe II dürfte eine solche Untersuchung sinnvoll sein.

2. Die Aufgabe

"Ich besitze 1 DM und ich brauche dringend 5 DM. Mein Ziel kann ich durch ein faires Glücksspiel erreichen. Ich entscheide mich für die kühne Strategie: In jeder Runde setze ich soviel von meinem Geld ein, daß ich im Falle eines Gewinns möglichst nahe an mein Ziel komme." ([1], S. 71, [2], S. 20)

Die Frage, nach deren Antwort wir suchen, lautet: "Wie groß ist bei dieser Methode die Wahrscheinlichkeit, am Ende des Spiels 5 DM zu besitzen."

Unter "faires Glücksspiel" soll verstanden werden: Die Wahrscheinlichkeit, den Einsatz zu verlieren, ist genauso groß wie die Wahrscheinlichkeit, einen Betrag in Höhe des Einsatzes dazu zu gewinnen (also jeweils $\frac{1}{2}$).

3. Die Lösung der Aufgabe

Am Anfang der Untersuchung wurde die Lösung der Aufgabe erarbeitet, so wie sie z.B. in [1], S. 71, dargestellt ist. Der Vollständigkeit halber sei sie hier angegeben.

Zeichnet man in gewohnter Weise einen "Entscheidungsbaum" zu dem Problem, so stellt man fest, daß er unendlich wird. Der erste Kunstgriff besteht daher darin, den Baum in einen endlichen Graphen zu verwandeln, indem man die zum gleichen Kapital gehörenden Verzweigungspunkte des Baums (Zustände) identifiziert und nur einmal aufzeichnet. Abb. 1 zeigt den so konstruierten Graph. Die Zahlen geben das verfügbare Kapital an. Die zu den Pfeilen gehörenden Übergangswahrscheinlichkeiten sind alle gleich $\frac{1}{2}$.

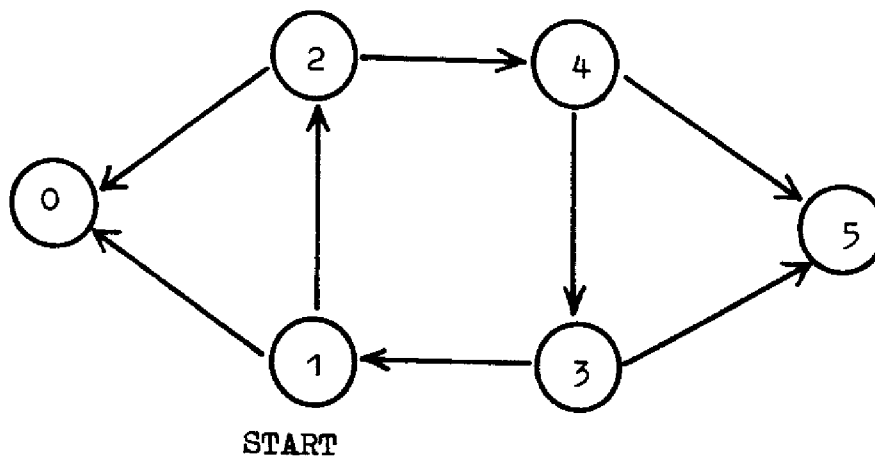


Abb. 1

Wendet man für die Berechnung der Wahrscheinlichkeit $p_{(1,5)}$ (im folgenden steht $p_{(i,k)}$ für die Wahrscheinlichkeit, vom Zustand i zum Zustand k zu gelangen) die Pfadregel an, so ergibt sich:

$$\begin{aligned}
 p_{(1,5)} &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{16}\right) + \dots \\
 &= \frac{3}{16} + \frac{3}{16^2} + \frac{3}{16^3} + \dots \\
 &= \frac{3}{16} \left(1 + \frac{1}{16} + \frac{1}{16^2} + \dots\right) \\
 &= \frac{3}{16} \cdot \frac{16}{15} = \frac{1}{5}
 \end{aligned}$$

Ist man so weit gekommen, pflegt man meist zur Tagesordnung – d.h. zur nächsten Aufgabe – überzugehen. Wir taten es nicht, sondern variierten die Situation in verschiedener Weise.

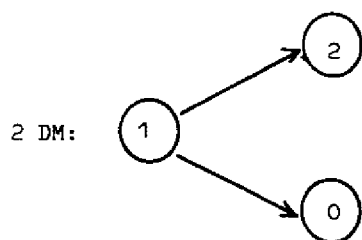
4. Variation des Endbetrages; eine Vermutung

Zunächst wurde untersucht, welche Wahrscheinlichkeiten sich ergeben, wenn man als angestrebten Endbetrag 2, 3, 4 oder 6 DM annimmt.

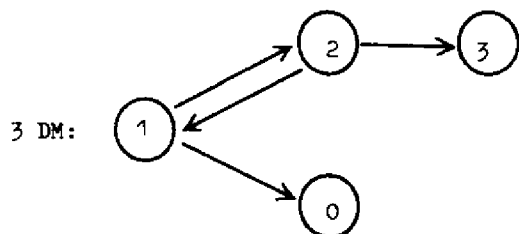
Die Graphen und Ergebnisse sind in Abb. 2 zusammengestellt.

Betrachtet man die bisherigen Ergebnisse, so wird man vermuten: Bei der "kühnen Strategie" ist $p_{(1,n)} = \frac{1}{n}$.

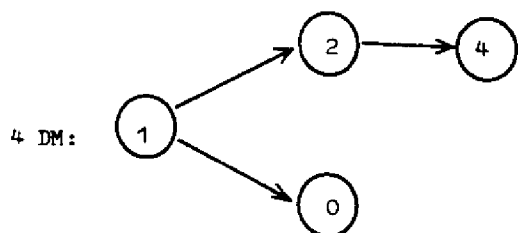
Für alle n , die sich als Zweierpotenz darstellen lassen, ist das auch leicht einzusehen. In diesem Fall setzt man nach der kühnen Strategie jedesmal sein ganzes Kapital ein und verliert alles oder verdoppelt das Kapital. Es führt also nur ein Pfad von 1 nach 2^x ($x \in \mathbb{N}$). Bei allen anderen n treten Zyklen auf und damit wird eine Berechnung von $p_{(1,n)}$ schwierig. Eine Bestätigung der ausgesprochenen Vermutung für diese Fälle heben wir uns für später auf.



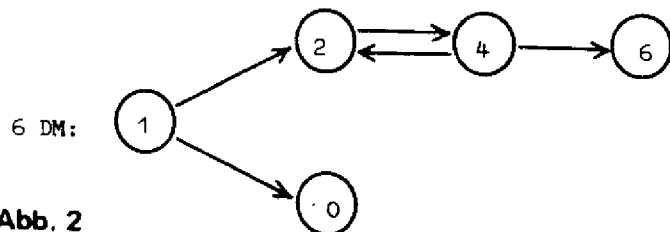
$$P(1,2) = \frac{1}{2}$$



$$P(1,3) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots = \frac{1}{3}$$



$$P(1,4) = \frac{1}{4}$$



$$P(1,6) = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots = \frac{1}{6}$$

Abb. 2

5. Die "zaghafte" und andere Strategien

Eine andere "Variable" der Aufgabenstellung ist die Strategie, die verfolgt wird, um das Ziel zu erreichen. Ein Gegenstück zur "kühnen Strategie" ist die "zaghafte Strategie": Man setzt immer genau 1 DM ein, solange man noch Geld hat bzw. bis man das Ziel erreicht hat. Diese Strategie hat mit der kühnen Strategie gemeinsam, daß man den angestrebten Endbetrag nicht überschreitet. Bei den Endbeträgen 2 DM bzw. 3 DM unterscheiden sich beide Strategien nicht. Das Diagramm der "zaghaften Strategie" für 4 DM zeigt Abb. 3:

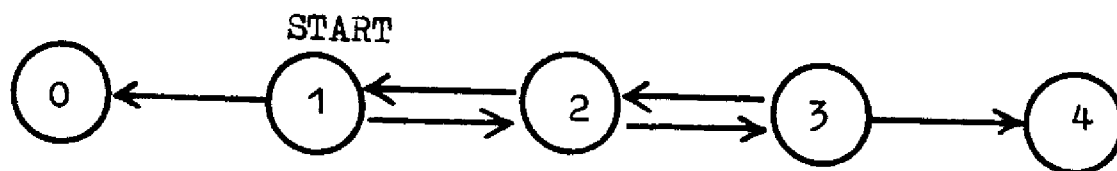


Abb. 3

Wie alle anderen im Laufe der Untersuchung auftretenden Wahrscheinlichkeiten kann auch die Gewinnwahrscheinlichkeit für die Strategie durch Aufstellung und Auswertung der Reihe berechnet werden, die man erhält, wenn man die Pfadregeln anwendet. Aber das Abzählen aller Pfade gestaltet sich für den Ungeübten schon schwieriger, so daß man spätestens an dieser Stelle die Vorzüge der in [1], [2] angegebenen Mittelwertsregeln schätzen lernt. Zur Illustration des Gesagten wird bei diesem Beispiel die Wahrscheinlichkeit mit beiden Methoden berechnet:

- a) Ein Pfad, der n Zyklusdurchläufe (aus den Zyklen $Z_1: 1 \xrightarrow{\text{Gewinn}} 2$ bzw. $Z_2: 2 \xrightarrow{\text{Verlust}} 3$) enthält, hat die Wahrscheinlichkeit $(\frac{1}{2})^3 \cdot (\frac{1}{2})^{2n}$. Nun wird gezählt, wie viele solcher Pfade es gibt: Von denen, die genau i -mal ($0 \leq i \leq n$) den 1. Zyklus durchlaufen, gibt es $\binom{n}{i}$. Also gibt es insgesamt

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} = 2^n \text{ solche Pfade.}$$

Die Wahrscheinlichkeit ergibt sich also zu:

$$\begin{aligned} p_{(1,4)} &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^5 + 2^2\left(\frac{1}{2}\right)^7 + 2^3\left(\frac{1}{2}\right)^9 + \dots \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^5 + \dots \\ &= \frac{1}{4} \end{aligned}$$

- b) Die Mittelwertregel gibt an, wie die gesuchte Übergangswahrscheinlichkeit $p_{(i,k)}$ mit Hilfe der zu den Nachbarzuständen gehörenden Übergangswahrscheinlichkeiten berechnet werden kann:

$p_{(1,k)}$ ist die Summe von Produkten von Wahrscheinlichkeiten:

$$\sum_j p_{(1,j)} \cdot p_{(j,k)},$$

wobei über alle Nachbarzustände von i (das sind die, zu denen es Übergänge vom Zustand i aus gibt) summiert wird. Im vorliegenden Fall sind alle $p_{(1,j)} = \frac{1}{2}$ und außerdem $p_{(j,k)} = 0$ ($k \neq j$), $p_{(j,j)} = 1$, wenn $j = 0$ oder gleich dem Zielbetrag ist.

Für das betrachtete Beispiel liefert die Mittelwertregel:

$$p_{(1,4)} = \frac{1}{2} \cdot p_{(2,4)} + \frac{1}{2} \cdot p_{(0,4)}$$

Aus Symmetriegründen ist $p_{(2,4)} = p_{(2,0)}$. Wegen

$$p_{(2,4)} + p_{(2,0)} = 1 \text{ folgt: } p_{(2,4)} = \frac{1}{2} \text{ und daher:}$$

$$p_{(1,4)} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot 0 = \frac{1}{4}$$

Als Zwischenergebnis kann festgehalten werden: Für den Endbetrag 4 DM ist die Gewinnwahrscheinlichkeit bei beiden Strategien gleich.

Angeichts der Bezeichnung "kühne Strategie", die doch suggeriert, daß die Chancen bei dieser Strategie besonders groß sind, überrascht das Ergebnis. Es könnte aber auch Zufall sein, und so wurden weitere Untersuchungen zu "nicht-kühnen" Strategien angestellt.

Den Graph zur zaghaften Strategie mit Endbetrag 5 DM zeigt Abb. 4.

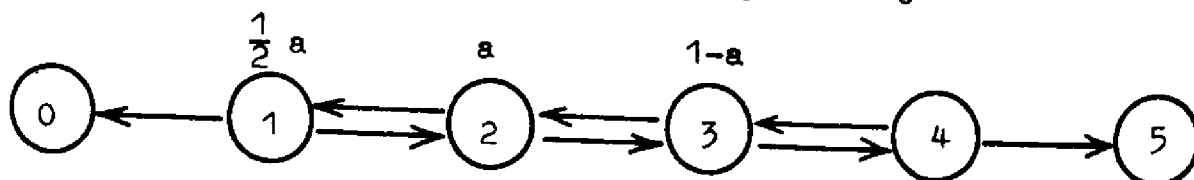


Abb. 4

Setzt man $p_{(2,5)} = a$, so gilt wegen $p_{(2,5)} = p_{(3,0)}$ und $p_{(3,0)} + p_{(3,5)} = 1$, $p_{(3,5)} = 1 - a$. Außerdem folgt aus der Mittelwertsregel $p_{(1,5)} = \frac{1}{2}a$. Wendet man diese Regel nun zur Berechnung von $p_{(2,5)}$ an, so folgt:

$$a = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a\right) + \frac{1}{2}(1-a)$$

woraus $a = \frac{2}{5}$, d.h. $p_{(1,5)} = \frac{1}{5}$ folgt. Die Wahrscheinlichkeit ist wieder die gleiche wie bei der kühnen Strategie. Das gilt auch für die in den Abbildungen 5, 6 dargestellten "Mischstrategien".

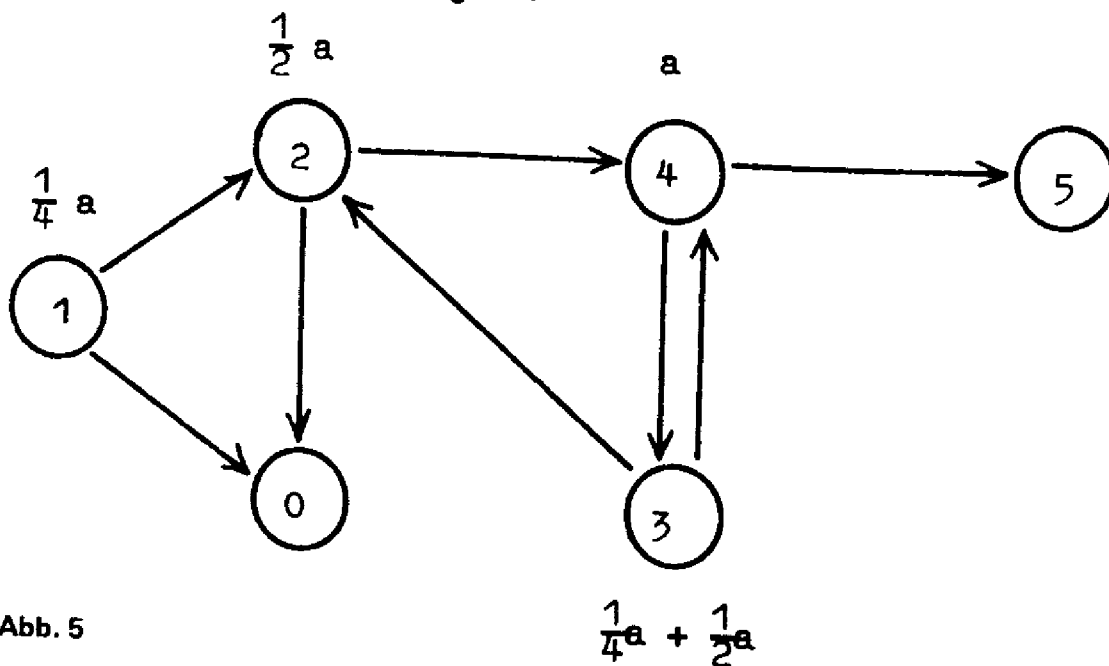


Abb. 5

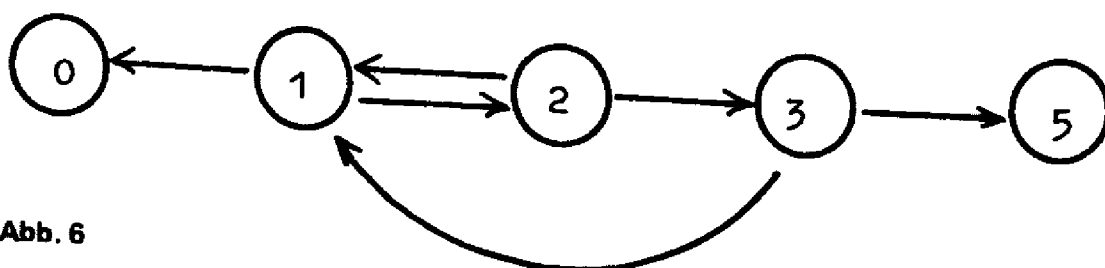


Abb. 6

Eine Teilnehmerin des Seminars (FrI. U. Gerhardt) ersann eine weitere Strategie (vgl. Abb. 7):

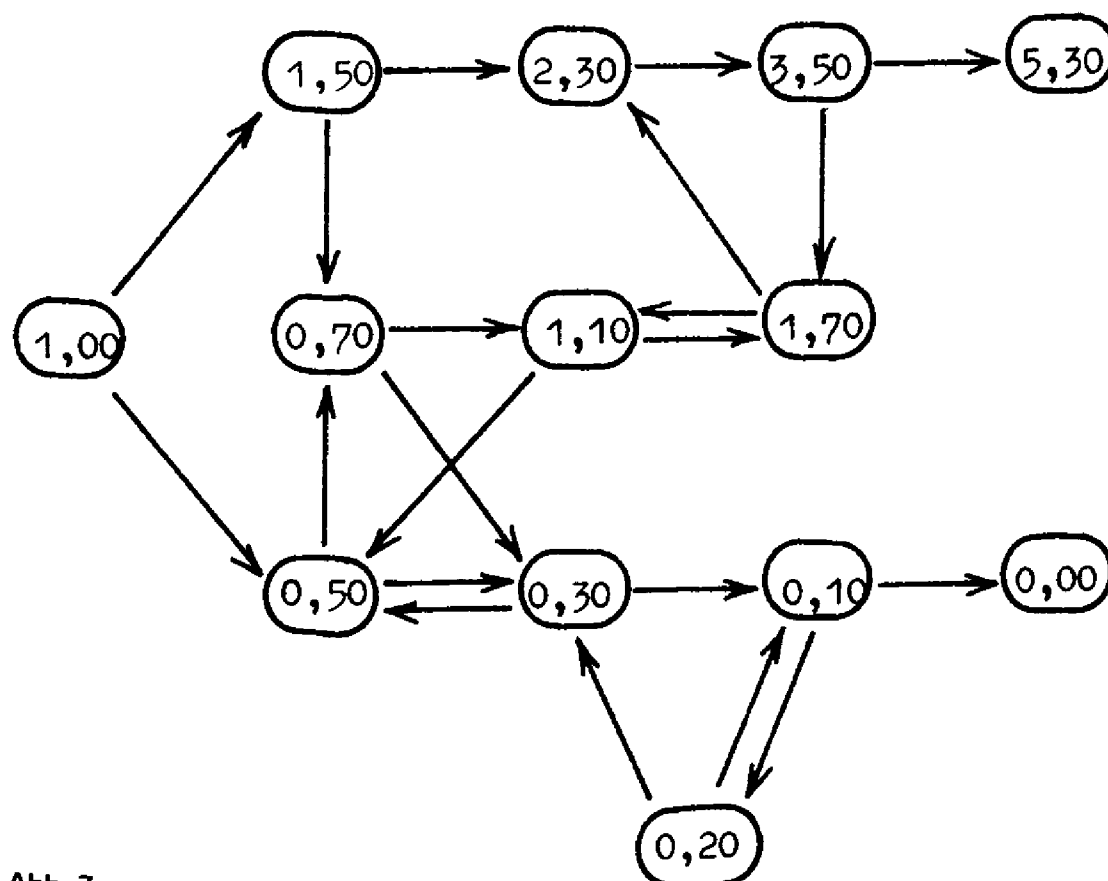


Abb. 7

Es wird jeweils die Hälfte des vorhandenen Besitzes (wobei auf volle 10 Pfennig aufgerundet wird) eingesetzt. Damit der Graph nicht zu kompliziert wird, gibt es zwei **Ausnahmen**:

- a) Besitz 0,50 DM, Einsatz 0,20 DM
- b) Besitz 1,70 DM, Einsatz 0,60 DM.

Die etwas aufwendigere Rechnung mit Hilfe der Mittelwertregel ergab dann – wie inzwischen schon nicht mehr anders zu erwarten – $\frac{10}{53}$ als Gewinnwahrscheinlichkeit für das Startkapital 1 DM.

6. Variation des Anfangsbetrages ; Erweiterung der Vermutung

Bisher wurden in der Regel die Gewinnwahrscheinlichkeiten für das Startkapital 1 DM berechnet, aber bei Zwischenrechnungen fielen auch für andere Startkapitalbeträge die Wahrscheinlichkeiten an, z.B. $p_{(2,5)} = \frac{2}{5}$. Allgemein läßt sich den bisherigen Rechnungen entnehmen:

$$p_{(i,5)} = \frac{i}{5} \text{ für } 1 \leq i \leq 5.$$

Nun war es an der Zeit, ein Resümee der bisherigen Untersuchungen zu ziehen. Dies führte zu der Formulierung:

Satz: Beginne ich ein faires Glücksspiel mit i DM Startkapital und höre auf, wenn ich alles verloren habe oder den Zielbetrag k DM besitze ($k > i$), so ist bei **jeder Strategie**, die ein Überschreiten des Zielkapitals ausschließt, die Wahrscheinlichkeit, den Zielbetrag von k DM zu erreichen, $p_{(i,k)} = \frac{i}{k}$.

Gleichzeitig wurde festgestellt, daß die Bezeichnung "kühne Strategie" irreführend ist, da sie ja nicht kühner als andere wählbare Strategien sei. Des Rätsels Lösung wurde erst später offenbar (siehe 9.).

7. Beweis des Satzes

Es war klar, daß man für einen Beweis andere Methoden benutzen mußte als die bisher zur Berechnung der Einzelwahrscheinlichkeiten benutzten. Und als die Beweisidee dann da war, fragte sich mancher, warum er nicht schon früher darauf gekommen war:

Ein Glücksspiel ist fair, wenn sich Gewinn und Verlust im Mittel die Waage halten, d.h. wenn der Erwartungswert Null ist. Dieser berechnet sich bei Startkapital i und Zielbetrag k ($k > i$) zu:

$$p_{(i,k)} (k-i) + p_{(i,0)} (-i).$$

Da $p_{(i,0)} + p_{(i,k)} = 1$ ist, folgt also

$$p_{(i,k)}(k-i) + (1-p_{(i,k)}) (-i) = 0$$

und

$$p_{(i,k)} k - i = 0$$

also

$$p_{(i,k)} = \frac{i}{k}$$

q. e. d.

8. Eine Zusatzfrage

Eine neue Frage wurde gestellt: Angenommen, man hat 2 DM zur Verfügung und benötigt 5 DM. Soll man dann gleich mit 2 DM beginnen und nach einer der besprochenen Strategien verfahren, oder soll man zwei Spiele mit 1 DM Startkapital machen. Obwohl diese Frage durch den obigen Satz mitbeantwortet ist, kam Unsicherheit auf: Der letztgenannten Möglichkeit wurden die geringeren Gewinnaussichten zugesprochen:

$$\begin{aligned}
 p(\text{Gewinn}) &= p(\text{Gewinn 1. Spiel}) + p(\text{Gewinn 2. Spiel/Verlust 1. Spiel}) \\
 &= \frac{1}{5} + \frac{4}{5} \cdot \frac{1}{5} \\
 &= \frac{9}{25} \quad (< \frac{2}{5})
 \end{aligned}$$

Das liegt aber daran, daß der Endbetrag 5 DM auch überschritten werden kann: Gewinnt man beim ersten Spiel, besitzt man am Ende insgesamt 6 DM. Wird diese Möglichkeit ausgeschlossen, indem man beim ersten Spiel nur auf den Endbetrag 4 DM spielt, so ist die Welt wieder in Ordnung:

$$p(\text{Gewinn}) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5}.$$

9. Wo die "kühne Strategie" wirklich kühn ist

Wer nicht nur [1], sondern auch [2] aufmerksam gelesen hat, weiß des Rätsels Lösung schon, auf das die Seminarteilnehmer erst später stießen. Denn in [2] findet sich in dem Kapitel, wo Standardmethoden für die Behandlung spezieller Graphen (Irrfahrten auf Geraden) – wie z.B. Abb. 3/4 zu sehen – entwickelt werden, folgende Aufgabe:

"Kühnes Spiel gegen vorsichtiges Spiel. Jemand hat 10 DM, aber er braucht dringend 20 DM. Er versucht sein Ziel beim Roulette zu erreichen (Gewinnwahrscheinlichkeit $p = \frac{18}{37}$). Wir betrachten zwei extreme Strategien:

- a) Er spielt kühn, indem er sofort 10 DM einsetzt.
- b) Er spielt vorsichtig, indem er jedesmal nur 1 DM einsetzt.

Bestimme jeweils seine Gewinnaussichten.

(Man kann zeigen, daß keine Strategie besser ist als die kühne Strategie.)"

Die Rechnung ergibt (aufgerundet) bei kühnem Spiel 0,47 und bei vorsichtigem Spiel 0,37 als Gewinnwahrscheinlichkeit. Es war wirklich verblüffend: Alle möglichen Daten der Situation waren variiert worden, was viel zum Verständnis beigetragen hatte – nur die Komponente, deren Variation zur Beseitigung der letzten Unklarheit (Woher kommt die Bezeichnung "kühn"?) hätte beitragen können, war – vielleicht aufgrund der Formulierung des Aufgabentextes – unberücksichtigt geblieben.

10. Schlußbemerkung

Es ist eigentlich überflüssig, darauf hinzuweisen, daß der Zweck der vorstehenden Ausführungen nicht darin besteht, den Lesern unsere mathematischen Erkenntnisse über das kühne oder andere Spiele mitzuteilen, über die jeder Kenner der Materie ohnedies verfügt. Es sollte vielmehr beispielhaft ein kleines

Stück eines tatsächlich stattgefundenen Lehr-Lern-Prozesses im mathematischen Teil der Grund- und Hauptschullehrerbildung (P/SI) nachgezeichnet werden.

Inwiefern wurde er nun von uns als beispielhaft empfunden. Es soll nur der wichtigste Aspekt angesprochen werden: Die Studenten hatten – mehr als sonst gewohnt – Gelegenheit, Mathematik als Tätigkeit auszuüben, was mehr umfaßt als das bloße Lösen gestellter Aufgaben mittels vorher gelernter Methoden oder einem glücklichen Einfall. Sie betrieben ein Stück Forschung "en miniature", und machten (bei anfangs etwas stärkerer Lenkung, die im Verlauf abnahm und nach wiederholten Lernprozessen solcher Art überflüssig werden sollte) "Entdeckungen", die in einem "Satz" resultierten (gewissermaßen ein Schritt "vom Problem zum System").

Nur eine große Zahl ähnlicher Erfahrungen wie die oben beschriebene wird den zukünftigen Lehrer dazu befähigen, "Kindern Probleme verständlich zu machen, ihnen einen experimentellen Zugang zur Untersuchung dieser Probleme zu eröffnen und sie bei ihren "Forschungen" pädagogisch sinnvoll anzuleiten" (vgl. [5], S. 1). Auch insofern – und nicht nur durch Bereitstellung der Kenntnis des mathematischen Hintergrundes des Schulstoffes – kann und muß die fachwissenschaftliche Grundlage für die fachdidaktische Ausbildung der Lehrer sein.

Literatur

- [1] A. ENGEL: Der Wahrscheinlichkeitsabakus. Der Mathematikunterricht 21 (1975) Heft 2, S. 70-93.
- [2] A. ENGEL: Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik Bd. 2 Stuttgart: Klett 1976
- [3] H. WINTER: Vorstellungen zur Entwicklung von Curricula für den Mathematikunterricht in der Gesamtschule. In: Beiträge zum Lernzielproblem. Ratingen: Henn 1972.
- [4] E. WITTMANN: Grundfragen des Mathematikunterrichts. Braunschweig: Vieweg 1976⁴
- [5] E. WITTMANN: Der Mathematikunterricht in der Primarstufe. Braunschweig: Vieweg 1977.