Rechnen mit Überraschungseffekten – für Vertretungsstunden, die tägliche Rechenübung und andere Gelegenheiten

von Hartmut Spiegel

Rechnungen mit vorbestimmtem Ergebnis

1. Denken Sie sich eine Zahl zwischen 2000 und 10000; addieren Sie 8015; machen Sie aus der erhaltenen fünfstelligen Zahl eine vierstellige; indem Sie die „1" vorne streichen (was natürlich dasselbe ist, wie 10000 subtrahieren); addieren Sie zur erhaltenen Zahl 1 und subtrahieren Sie das Ergebnis von der Zahl, die Sie sich gedacht haben. Fertig? Wenn Sie richtig gerechnet haben, ist – unabhängig von der gedachten Zahl – Ihr Ergebnis 1984, das Jahr, in dem diese Zeilen geschrieben wurden. (Beispiel: 6666 + 8015 = 14681; 4682; 6666 – 4682 = 1984) Wenn Sie Zeit haben, sollten Sie sich selbst überlegen, warum der Trick funktioniert, dann haben Sie auch schnell den Schlüssel zu Variationen in der Hand: andere Ergebniszahlen von einstellig bis sechsstellig und mehr. Ansonsten lassen Sie sich die Zusammenhänge mit ein wenig Algebra erklären: Bezeichnen wir mit g die gedachte Zahl, mit a die zu addierende Zahl und mit e die Ergebniszahl, so läßt sich der Zusammenhang zwischen diesen drei Zahlen so beschreiben:

$$g - (g + a - 10000 + 1) = e$$

und daraus folgt: $9999 - a = e$

beziehungsweise: $9999 = e + a$; $a = 9999 - e$.

Die Summe der zu addierenden Zahl a und der Ergebniszahl e ist also 9999. Soll also statt 1984 irgendeine andere vierstellige Ergebniszahl herauskommen, dann nehme ich als zu addierende Zahl a die Differenz zwischen 9999 und dieser Ergebniszahl. Das einzige, worauf man nun noch achten muß, ist, daß g so gewählt wird, daß g + a zwischen 10000 und 20000 liegt. Aber mit Hilfe von a kann man sich den zulässigen Bereich für g leicht überlegen.

Für Ergebniszahlen mit anderer Anzahl von Stellen geht der Trick ganz analog: Ist e dreistellig, so arbeite man mit a = 999 – e und geeigneten dreistelligen Zahlen als gedachten Zahlen usw. So bekommt man ein ganzes Spektrum möglicher Aufgaben für das mündliche und/oder schriftliche Rechnen verschiedener Klassenstufen. Als Ergebniszahlen kann man auch die Postleitzahl des Schulortes, das aktuelle Datum (z. B. 5. 12. ≙ 512) oder Zahlen mit einem anderen Bedeutungsgehalt nehmen. Will man den verbalen Anteil der Aufgabenstellung gering halten, kann man beispielsweise auch mit solchen Schemata arbeiten, die in Abb. 1 dargestellt sind. Quelle: [1]

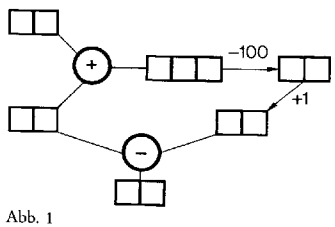
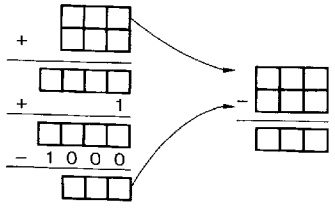


Abb. 1



2. „Denk' Dir eine Zahl, verdoppele sie, addiere 8, teile durch 2 und subtrahiere die gedachte Zahl". Klar, daß da 4 rauskommen muß. Für das 4. Schuljahr, in dem ich kürzlich (am 22. Oktober) die Stunde mit Kopfrechnen beginnen wollte, ist so etwas zu einfach. Also wurde der Schwierigkeitsgrad (und die Ergebniszahl) angepaßt: Denke Dir eine Zahl, mal 5, plus 55, mal 2, geteilt durch 10, minus die gedachte Zahl, mal 2. Ergebnis: 22. Konstruiert habe ich diese Aufgabe als eine Abwandlung der ersten, beide beruhen auf dem gleichen Prinzip: Ist x die gedachte Zahl und sind n und r zwei beliebig gewählte andere Zahlen, dann ist klar, daß folgende Gleichung gilt.

$$(x \cdot n + r \cdot n) : n - x = r.$$

Im ersten Beispiel ist n = 2 und r = 4 gewählt. Im zweiten Beispiel ist n = 10 und r = 11, aber aufgrund methodischer Überlegungen wurde statt $x \cdot 10 + 110$ die gleichwertige Rechnung $(x \cdot 5 + 55) \cdot 2$ angeboten. Und da 22 statt 11 herauskommen sollte, wurde am Ende kurzerhand verdoppelt. Die oben angegebene Gleichung liefert also einen Schlüssel zur Konstruktion von Aufgaben mit gegebenem Schwierigkeitsgrad, bestimmten zu übenden Operationen (z. B. · 2, · 5, : 10 usw.) und vorgegebenem Ergebnis.

In der erwähnten Stunde im 4. Schuljahr wurde den Kindern zwecks Anpassung an unterschiedliche Lernvoraussetzungen die Möglichkeit der Wahl unter verschiedenen Schwierigkeitsgraden eröffnet: Wer es leicht haben will, denkt sich eine Zahl zwischen 5 und 15, mittel: zwischen 10 und 20, schwerer: zwischen 20 und 30.

3. Exkurs: Je nach Klassenstufe braucht man es nicht bei der Verwendung der angegebenen Aufgabentypen zur Rechenübung zu belassen, sondern kann auch in Analyse und Erklärung eintreten. Daß diese sich nicht unbedingt auf der Ebene formaler Algebra abspielen muß, soll durch die Abbildungen 2 und 3 dokumentiert werden. Abb. 2 zeigt eine schon Grundschülern verständliche bildliche Darstellung des Rechenganges der ersten Aufgabe aus 1.1, die deutlich zeigt, wieso das Ergebnis unabhängig von der Anfangszahl ist und wie es von der addierten Zahl abhängt. Sicherlich verhilft auch Abb. 3, in der die Rechnung aus 1.1 mit Hilfe von Längen dargestellt ist, manchem älteren Schüler oder auch Erwachsenen zu mehr Einsicht in den Zusammenhang als die Formel.

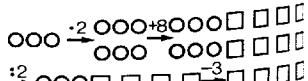


Abb. 2

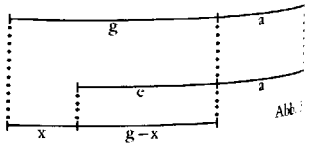


Abb. 3

An dem Bild kann man sich klar machen: Wenn der Aufgabensteller zu der gedachten Zahl g die Zahl a addieren läßt und anschließend (e + a) subtrahieren läßt (wobei die Ergebniszahl e ja ihm gewählt wurde) ergibt sich eine Zahl x, deren Subtraktion von g zum Ergebnis e führen muß. Die Beispiele 1.1 und 1.2 dürften auch als Anleitung dafür genügen, sich selbst andere Operationsfolgen auszudenken, die auf ein vorbestimmtes Ergebnis führen. Das zugrundeliegende Prinzip wird in [7] S. 47 sehr hübsch so formuliert: „Wenn man jemand, der sich eine Zahl gedacht hat, vorschreibt, wie er mit der Zahl weiterrechnen soll, so läßt es sich so einrichten, daß die gedachte Zahl sich bei der Berechnung forthebt, wobei natürlich vorausgesetzt wird, daß man die gedachte Zahl nicht allein anfänglich, sondern auch nachher noch mindestens einmal in die Rechnung hineinzieht. Die Berechnung des entstandenen Ausdrucks, der außer der sich forthebenden gedachten Zahl x nur noch bestimmte Zahlen enthält, führt dann zu einem Resultat, das derjenige, der sich die Zahl gedacht hat, auch erhalten haben muß, so daß man ihm sein Resultat sagen kann." Und als Beispiele werden dort u. a. die beiden Operationenfolgen

$$\big(\big((x \cdot 3) + 2\big) \cdot 4 + 4\big) : 12 - x \text{ und}$$

$$\big((x + 5) \cdot 18 - 3x\big) : 15 - x \text{ angegeben.}$$

Eine Rechnung ganz anderer Art, die auch immer auf dasselbe Endergebnis führt, sei zum Schluß dieses Abschnittes unkommentiert wiedergegeben:

4. Schreiben Sie irgendeine natürliche Zahl auf. Wenn Sie eine ungerade Zahl gewählt haben, addieren Sie 1 dazu. Haben Sie eine gerade Zahl gewählt, so addieren Sie 2 dazu. Multiplizieren Sie die erhaltene Zahl mit 6, das Ergebnis mit 3. Bilden Sie die Quersumme. Sollte die so erhaltene Zahl größer oder gleich 10 sein, bilden Sie nochmal die Quersumme usw., bis Sie eine Zahl erhalten, die kleiner als 10 ist. Subtrahieren Sie nun von dieser Zahl 5 und multiplizieren Sie das Ergebnis mit 3. Addieren Sie 1 dazu.

Ermitteln einer „geheimen" Zahl

1. Hans fordert seinen Freund Uwe auf: „Merke Dir eine von Null verschiedene natürliche Zahl, multipliziere sie mit 5, addiere zu diesem Produkt 2. Multipliziere die so erhaltene Summe mit 4 und addiere zu diesem neuen Produkt 3. Die nun erhaltene Summe ist noch mit 5 zu multiplizieren. Nenne nur das Ergebnis dieser Rechnung, und ich sage Dir, welche Zahl Du Dir gemerkt hast." (aus [5], S. 112).

Rechnen Sie – bevor Sie weiterlesen – die Sache mit ein paar Zahlen durch und Sie werden leicht herausfinden, wie Hans Uwes Zahl ermittelt. Er kehrt die Operationsfolge nicht um – was ja auch eine Möglichkeit wäre, aber zu lange dauern würde – sondern macht davon Gebrauch, daß die Operationenfolge – wenn die Ausgangszahl x genannt wird – auf das Ergebnis 100 x + 55 führt und daß das Dezimalsystem ermöglicht, aus dem Zahlwort für diese Zahl x direkt abzulesen.

Viele „Tricks" dieser Sorte nutzen aus, daß uns das Dezimalsystem in manchen Fällen vom Rechnen befreit, so auch die nächsten, die ich angebe.

2. Gegeben seien zwei Zahlen a und b, von denen die zweite höchstens zweistellig ist. Wir führen folgende Rechnung durch:

$$\big((a \cdot 2) + 5\big) \cdot 5 \cdot 10) + b.$$

Subtrahiert man nun 250 so erhält man 100a + b. (Beispiel: a = 12, b = 7; Ergebnis: 1207) Wieder kann man aus dem Ergebnis a und b direkt ablesen. Das in der Literatur für Lehrer vorfindliche Geburtstags-Raten (vgl. z. B. [6] S. 6) basiert auf diesem Muster. Nimmt man a als Zahl des Geburtsmonats und b als Zahl des Geburtstages und läßt die Kinder bis zu der Stelle rechnen, bevor 250 subtrahiert wird, dann kann man sich die Zahl sagen lassen, selbst schnell 250 subtrahieren und den Kindern ihren Geburtstag (oder ein anders gewähltes Datum) sagen. Nach entsprechender Vorbereitung (z. B.: Wie multipliziert man geschickt mit 5? (Die Hälfte vom Zehnfachen!)) sollte man diese Aufgabe mit Schülern des 4. Schuljahres im Kopf rechnen können.

3. Weitere Rechnungen, aus deren Ergebnis sich die Ausgangszahl schnell ermitteln läßt, sind die folgenden:

$$((x \cdot 5 + 5) \cdot 2) + 2 = 10x + 12$$

$$(((((x \cdot 4) + 2) \cdot 5) - 10) \cdot 5) - x = 99x$$

$$x \cdot (x + 1) - x = x^2$$

Ist beim zweiten Beispiel x kleiner als 100, so braucht man nur auf den nächsten vollen Hunderter aufzurunden und dann die zwei Nullen am Ende zu streichen.

4. Zum Schluß noch zwei „Kunststücke" aus [4] (S. 135 und S. 140). Dort sind – falls gewünscht – auch die Erklärungen und noch weitere schöne Anregungen zu finden.

i) Ich lasse den Partner (die Schüler) – von einer gedachten Zahl ausgehend – eine Reihe von Multiplikationen und Divisionen ausführen, das Ergebnis durch die gedachte Zahl teilen, zu dem Quotienten q die gedachte Zahl addieren (oder subtrahieren) und mir das Endresultat r mitteilen. Ich selber erhalte den gleichen Quotienten q, indem ich mit 1 beginnend mitrechne. Die gedachte Zahl erhalte ich durch Bildung der Differenz r – q (oder: q – r). Beispiel für eine solche Operationenfolge: · 8, : 4, · 6, : 3, · 5, : 2).

ii) Die gedachte Zahl wird verzehnfacht, ein beliebiges einstelliges Vielfaches von 9 subtrahiert und das Ergebnis mitgeteilt.

Bsp.: 17 · 10 – 45 = 125. Die gedachte Zahl erhält man, indem man von dem angesagten Resultat die Ziffer der letzten Stelle abtrennt und die ihr entsprechende Zahl zur restlichen Zahl addiert: 12 + 5 = 7.

Ermitteln eines Ergebnisses

1. „Blitzaddition"

1. Variante

Fünf dreistellige Zahlen werden in schneller Folge aufgeschrieben, die Schüler nennen die ersten beiden, der Lehrer die dritte, die Schüler die vierte, der Lehrer die fünfte und sofort die Summe aller Zahlen. Die Schüler rechnen nach. Beispiele:

172	628	316
234	216	728
765	371	683
176	583	345
823	416	271
2170	2214	2343

Beim ersten Beispiel erhält man die Summe, indem man von der ersten Zahl (172) 2 subtrahiert und dann die 2 „davorsetzt". Wie man leicht sieht, liegt das daran, daß der Lehrer seine Zahlen so gewählt hat, daß sich die 2. und 3. bzw. 4. und 5. Zahl zu 999 ergänzen. Bei den anderen beiden Beispielen ist es im Prinzip genauso, vielleicht nicht ganz so offenkundig, am wenigsten beim 3. Beispiel, wo sich 1. und 3., 2. und 5. Zahl zu 999 ergänzen! Will man es noch undurchschaubarer machen, wählt man als „Ergänzungszahl" 989 und subtrahiert statt 2 einfach 22. Das Verfahren kann analog abgewandelt werden auf andere Stellenzahlen und andere Anzahlen von Summanden (bei 7 Summanden 3 subtrahieren und davorsetzen). Der Phantasie sind hier kaum Grenzen gesetzt. Quelle: [3] S. 187

2. Variante

Man lasse die Schüler drei beliebige Zahlen untereinanderschreiben, dann die Summe dieser drei Zahlen, dann die Summe der drei untersten Zahlen und so weiter, bis acht Zahlen untereinanderstehen. Wenn Sie sich nun das Blatt zeigen lassen, können Sie außergewöhnlich schnell die Summe hinschreiben.

Beispiel:

346
715
128
1189
2032
3349
6570
11951
26280

Die Summe 26280 ist gleich dem Vierfachen der vorletzten Zahl. (Quelle: [2] S. 98)

2. Wie heißt die Differenz?

Man lasse die Schüler zu 5 (4) verschiedenen Ziffern, die sie selbst wählen und nicht verraten, die Differenz aus der größtmöglichen und der kleinstmöglichen 5- oder (4)-stelligen Zahl, die aus den Ziffern gebildet werden kann, errechnen. Läßt man sich nun die letzte und die vorletzte Ziffer dieser Differenz sagen, so weiß man sofort die Differenz: Jeweils die erste und die letzte Ziffer ergänzen sich zu 10, die zweite und die vorletzte Ziffer ergänzen sich zu 8. Bei 5 Ziffern ist die mittlere Ziffer die Zahl 9.

Schlußbemerkung

Ich habe hier nur eine kleine – aber meines Erachtens geeignete – Auswahl von Anregungen aus der klassischen unterhaltungsmathematischen Literatur, die den Mathematikunterricht bereichern können, vorgestellt. Wer Spaß daran hatte, kann in der angegebenen und einer Fülle weiterer Literatur mehr davon finden.

Literatur

[1] Baireuther, P.: Unterhaltsame Mathematik für den Unterricht. Zahlenzaubereien I – Zahlen herbeizaubern. In: Mathematische Unterrichtspraxis 4 (1983) IV. Quartal S. 45/46.
[2] Barnard, D. u. Botsch, O.: Hirnverzwirner mit und ohne Mathematik. Köln, Aulis, 1975.
[3] Gardner, M.: Mathematik und Magie. Köln, DuMont, 1981.
[4] Kordemski, B. A.: Köpfchen muß man haben. Köln, Aulis, 1975.
[5] Lehmann, J.: Kurzweil durch Mathe. Köln, Aulis, 1981.
[6] Radatz, H. u. Schipper, W.: Handbuch für den Mathematikunterricht an Grundschulen. Hannover, Schroedel, 1983.
[7] Schubert, H. u. Erlebach, J.: Mathematische Mußestunden. Berlin, de Gruyter, 1964.

Hartmut Spiegel,
Arnold-Schlüter-Weg 33, 4790 Paderborn
ist Professor für Didaktik der Mathematik an der Universität Paderborn.

„Abessinisches" Multiplizieren

von Erhard Voß

Vorbemerkung

Das sogenannte „Abessinische" Multiplizieren beruht auf dem schriftlichen Multiplikationsverfahren für Dualzahlen, ohne daß hierzu Kenntnisse des Dualsyste'nötig sind. Das Verfahren kann daher auch in solchen Klassen vorgeführt werden, die dieses System noch nicht kennengelernt haben. Das herkömmliche schriftliche Multiplikationsverfahren für Dezimalzahlen sollte schon allein aus Gründen des Vergleichs bekannt sein.

Durchführung

1. Man läßt sich von den Schülern eine Multiplikationsaufgabe zweistelliger Dezimalzahlen nennen. Die Aufgabe wird an die Tafel geschrieben, z. B. 26 · 17.

2. Man trennt die Aufgabe durch einen senkrechten Strich und dividiert in der linken Spalte so lange durch 2, bis man zuletzt die Zahl 1 erhält.

26	17
13	
6	
3	
1	

Bei der Division entstehende Reste von 1 bleiben dabei unberücksichtigt. Es ist wirkungsvoll zu bemerken, daß diese Reste Unglück brächten und daher unter den Tisch fielen.

3. Man multipliziert sodann in der rechten Spalte so oft mit 2, wie man zuvor dividiert hat.

26	17
13	34
6	68
3	136
1	272

4. Nun behauptet man, daß alle geraden Zahlen in der linken Spalte ebenfalls Unglück brächten und deshalb deren Zeilen zu streichen seien. Die verbleibenden Zahlen der rechten Spalte werden addiert, die Summe stellt das Ergebnis dar.

~~26~~	~~17~~
13	34
~~6~~	~~68~~
3	136
1	272
	442

5. Das Verfahren kann anschließend mit drei- und mehrstelligen Dezimalzahlen probiert werden.

Erklärung

Wie eingangs bemerkt, beruht dieses märchenhaft anmutende Verfahren auf dem dualen Zehnersystem. An dieser Stelle soll hierzu nur folgendes erklärt werden.

Man findet in der linken Spalte den Algorithmus zur Konvertierung von Dezimalzahlen in Dualzahlen, wobei die ohne Rest teilbaren Zahlen und deren gesamte Zeile gestrichen werden. Die rechte Spalte stellt die Multiplikation des Multiplikators aus der Aufgabenstellung mit jeweils 2^n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) dar.

Untersucht man die in der rechten Spalte übriggebliebenen und zu addierenden Zahlen, so erkennt man die Aufgabenstellung.

Für das gezeigte Beispiel sieht dieses vollständig so aus:

~~26 : 2 = 13~~	~~Rest 0~~	~~$2^0 \cdot 17 = 17$~~
13 : 2 = 6	Rest 1	$2^1 \cdot 17 = 34$
~~6 : 2 = 3~~	~~Rest 0~~	~~$2^2 \cdot 17 = 68$~~
3 : 2 = 1	Rest 1	$2^3 \cdot 17 = 136$
1		$2^4 \cdot 17 = 272$

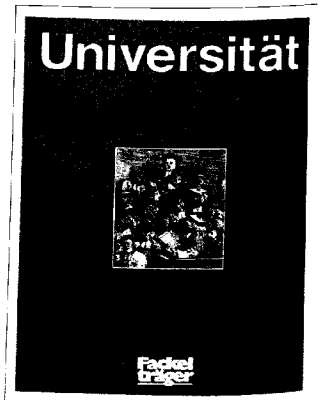
$2^1 \cdot 17 + 2^3 \cdot 17 + 2^4 \cdot 17 =$

$(2^1 + 2^3 + 2^4) \cdot 17 =$

$(2 + 8 + 16) \cdot 17 =$

$26 \cdot 17 = 442$

Dipl.-Ing. Erhard Voß, Auf dem Hohenstein 33, 5870 Hemer; ist Oberstudienrat für Mathematik und Elektrotechnik an der Staatlichen Berufsfachschule für Fertigungstechnik und Elektrotechnik Iserlohn.



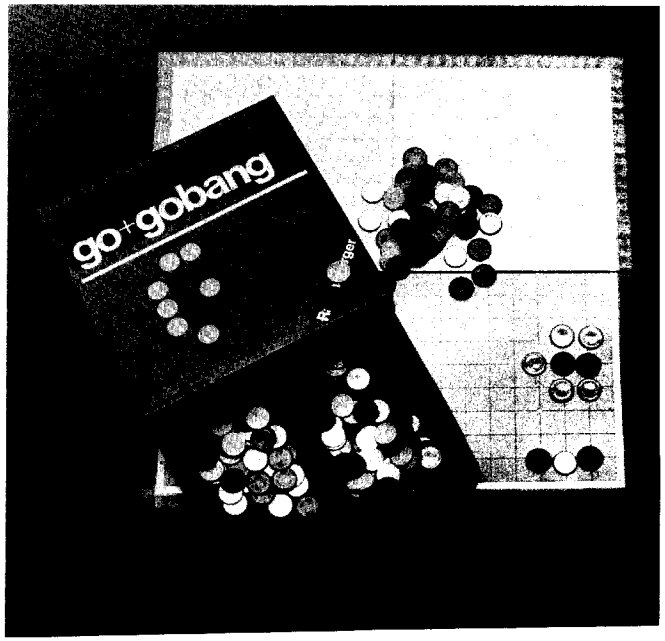
Universität in der Karikatur
Herausgegeben und kommentiert von Michael Klant. Fackelträger Verlag Hannover, 232 Seiten mit 300 Abb.

Seit dem Mittelalter gehört die Universität zu den bevorzugten Gegenständen der Karikaturisten. So erscheinen Professoren und Studenten immer auch als Träger von Aufruhr und verbissenem Verharren – bisweilen in wechselnden Rollen: demokratische Demagogen, schmissige Burschen, professorale Parlamentarier, rassische Quacksalber. Alles dies wird kommentiert von Zeichnern wie Albrecht Dürer, Gustave Doré, C. G. H. Geißler, Th. Th. Heine, Rudolf Wilke, Fritz Wolff, Arno Ploog, Marie Marcks, Chlodwig Poth, Peter Gaymann und vielen anderen.
Preis: 24,– DM zuzügl. Versandkosten
Best.-Nr.: 93 6601
Bestellungen an: **Pädagogika Zentrale,** Im Brande 15, 3016 Seelze 6 (Bestellkarte in dieser Zeitschrift)

Einfache Regeln – komplizierte Strategien

Eine Einführung ins Go-Spiel

von Helmut Gorenflo



Das Go-Spiel hat so einfache Spielregeln wie kaum ein anderes Spiel. Jedoch wird man, nachdem man einige Partien gespielt hat, merken, daß die Anforderungen, die ein *gutes* Spiel verlangen, sehr hoch sind. In diesem Sinne besteht eine Analogie zur Mathematik; von Axiomen ausgehend wird ein Lehrgebäude errichtet, dessen Komplexität nicht mehr ahnen läßt, wie einfach die Grundbausteine sind. Wie oft passiert es, daß Studenten in den beiden ersten Vorlesungen zur Abstrakten Gruppentheorie lächeln, weil alles so selbstverständlich und durchsichtig erscheint; aber spätestens in der vierten Vorlesung beginnt ein Stöhnen und viele Studenten können in der zweiten Hälfte des Semesters kaum mehr folgen.

1 Spielplan und Spielgerät

Wir lernen die Regeln des Go-Spiels auf einem Anfängerbrett mit 9 · 9 Linien, also 81 Schnittpunkten. Jeder Spieler (Schwarz und Weiß) verfügt über genau 40 Steine. Gespielt wird aber nicht auf den Feldern (wie beim Schach), sondern auf den Schnittpunkten. Die Spieler setzen abwechselnd je einen Stein auf einen freien (oder durch Töten frei gewordenen) Schnittpunkt, wobei stets Schwarz mit dem Setzen beginnt. Ziel einer Go-Partie ist es, möglichst viel „Gebiet" zu erobern, wobei wir den chinesischen und den japanischen Gebietsbegriff zu unterscheiden haben. Wenn man nur eine Vertretungsstunde zur Verfügung hat, sollte man sich auf einen Gebietsbegriff beschränken, wobei der chinesische didaktisch leichter zu vermitteln ist. Es sei jedoch erwähnt, daß die meisten Spieler in der Welt den japanischen Gebietsbegriff verwenden, weil Go von Japan aus auf der Erde verbreitet wurde.

2 Chinesischer Gebietsbegriff

Das Gebiet eines Spielers besteht aus allen eroberten Brettpunkten, egal ob besetzt oder unbesetzt. Betrachten wir dazu Abb. 1. Es handelt sich hier um die Endstellung einer Partie, wobei Schwarz 45 Punkte (nämlich 24 besetzte und 21 unbesetzte Punkte – in der Zeichnung mit einem kleinen ausgefüllten Kreis gekennzeichnet) hat, während Weiß 36 Punkte (nämlich 21 besetzte und 15 unbesetzte Punkte – in der Zeichnung durch einen nicht ausgefüllten Kreis gekennzeichnet) besitzt. (Probe: 45 + 36 = 81.) Demnach hat Schwarz mit 45 – 36 = 9 Punkten gewonnen. Dieses Ergebnis erhält man auch mit der eleganten „Einfüllmethode": Am Ende einer Partie setzt jeder Spieler seine restlichen Steine in sein Gebiet. In unserem Beispiel (Abb. 1) behält dann Schwarz fünf unbesetzte Punkte übrig, während Weiß vier Steine übrig hat; demnach hat Schwarz mit 5 + 4 = 9 Punkten gewonnen.

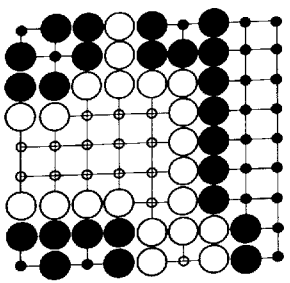


Abb. 1: Ende einer Go-Partie

3 Töten

In Abb. 2 sehen wir links oben drei einzelne weiße Steine in „Atari", d. h. sie können von Schwarz im nächsten Zug getötet werden, wenn er auf x setzt (und somit die letzte „Freiheit" nimmt).

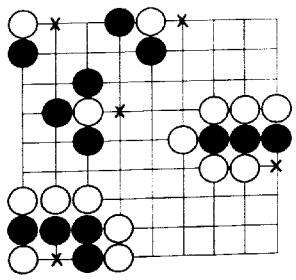


Abb. 2: Das Töten von Steinen