Empfehlungen zur Struktur und zum Ausbau des Bildungswesens im Hochschulbereich nach 1970

Anlagen

Wissenschaftsrat

Bonn, 1970

f) Überlegungen zu einem mathematischen Grundstudium

urn:nbn:de:hbz:466:1-8323

Überlegungen zu einem mathematischen Grundstudium

Inhalt

Vorbemerkung

Eine Neuordnung des mathematischen Studiums, zumal in seiner ersten Phase, erscheint vor allem aus zwei Gründen geboten. Die mathematische Forschung hat zu einer neuen Orientierung der Disziplin geführt, die es in die Lehre umzusetzen gilt und die zugleich dem Studium neue Entwicklungsmöglichkeiten auf einer breiten Basis eröffnet. Auf der anderen Seite sind die veränderten und weiterhin zunehmenden Anforderungen an die Ausbildung zu berücksichtigen, die sich aus der fortschreitenden Mathematisierung in den Wissenschaften und in der Berufspraxis ergeben.

I. Neue Orientierung der Mathematik

(1) Die mathematische Forschung hat in den letzten Jahrzehnten nicht nur bedeutende neue und sehr allgemeine Zweige geschaffen, wie etwa Topologie oder Funktionalanalysis, sie hat darüber hinaus auch die gesamte Mathematik nach umfassenden Prinzipien neu gegliedert. Diese Umstrukturierung bezieht sich in ihrer Zielsetzung auf die Verfahrensweise und den inneren Zusammenhang der mathematischen Wissenschaft selbst, d. h. auf den Wissenschaftsprozeß.

Bei dem Vergleich verschiedener Gebiete der Mathematik sind schon in der Vergangenheit vielfach weitreichende Ähnlichkeiten im Gesamtaufbau wie in den begrifflichen Elementen gefunden worden. Die zunehmende Abstraktion und die zugleich einheitlicher werdende Sprache der Mathematik haben diese Ähnlichkeiten noch deutlicher hervortreten lassen. Aus der Überzeugung, daß Mathematik mehr ist als eine zufällige Aneinanderreihung logischer Schlüsse, ist die Suche nach den tieferliegenden gemeinsamen Ideen der verschiedenen Theorien zur treibenden Kraft der mathematischen Forschung geworden.

Die Strukturmathematik betrachtet die durch umfangreiche Axiomensysteme charakterisierten Kalküle der traditionellen Mathematik gewissermaßen als Überlagerungen einer relativ kleinen Zahl von einfachen Axiomensystemen, den sogenannten Grundstrukturen. Das heißt nicht, daß axiomatische Methode oder struktureller Aufbau Abstraktion oder Verallgemeinerung um jeden Preis bedeutet — auch die Anwendungen und das Interesse am Detail gehören nach wie vor in die mathematische Forschung und sind unverzichtbar, da sonst unter den vielen möglichen Fällen die wesentlichen leicht übersehen werden. Demgegenüber dienen große Probleme der Mathematik als eine Art „Schutzgeländer", das die Einzelfragen in die strukturellen Zusammenhänge einbindet.

Die Wahl eines bestimmten Axiomensystems wird selbstverständlich nicht in völliger Willkür getroffen. Die auf verschiedenen Axiomensystemen aufgebauten Theorien, die sogenannten Strukturen, haben für die jeweiligen Problemstellungen unterschiedliche Bedeutung, und es gibt in der Mathematik keine allgemeine Regel, um zu entscheiden, welches Axiomensystem im Einzelfall zu bevorzugen ist. Ein zweckmäßiges Axiomensystem zu wählen, setzt die gründliche Kenntnis der vorhandenen Theorien und ihrer Anwendungsbereiche sowie die subtile Kritik der Probleme voraus und kann außerdem durch Intuition ermöglicht werden. Ein Axiomensystem wird zweckmäßig sein, wenn es bei verschiedenen Gelegenheiten benutzt werden kann. Dem Aufstellen eines Axiomensystems und auch der nachfolgenden Untersuchung der dadurch definierten Struktur geht in der Regel die Lösung einer Vielzahl von Einzelproblemen voraus. Bedeutung und Gehalt einer mathematischen Theorie werden nicht zuletzt danach beurteilt, inwiefern es ihr möglich ist, eine Fülle von Einzelproblemen zu behandeln und zu lösen.

Es ist deutlich, daß hierbei verschiedene grundlegende Fragen entstehen. Als Beispiele seien die nach der Widerspruchsfreiheit der Axiomensysteme, nach der kritischen Untersuchung der Approximationen durch die idealisierten Modelle oder nach der Möglichkeit eines konstruktiven Aufbaus genannt.

(2) Diese grundlegende Neuorientierung hat unter anderem zu folgenden Ergebnissen geführt:

— Aufgrund universell anwendbarer Begriffsbildungen ist eine einheitliche Sprache für die gesamte Mathematik entstanden.
— Die Strukturmathematik hat die Mitteilbarkeit mathematischer Ergebnisse und Methoden vereinfacht.
— Der Aufbau der Mathematik aus einfachen Strukturen ermöglicht eine übersichtliche Selbstdarstellung der Mathematik, die es gestattet, einzelne Probleme und Forschungsprojekte in ihrem Gesamtzusammenhang deutlich zu machen. Sie bietet damit auch die Möglichkeit, ein prinzipielles Verständnis von der Mathematik als Wissenschaft zu gewinnen.
— Die Strukturmathematik macht bewußt, daß jedes mathematische Objekt das Ergebnis einer zielgerichteten Konstruktion ist.

Insgesamt sind damit die Voraussetzungen für eine leichtere und besonders ökonomische Anwendbarkeit der Ergebnisse und Methoden der Mathematik in allen Situationen geschaffen, in denen mathematische Modelle eine Rolle spielen, in anderen Wissenschaften, in der Technik, in der Wirtschaft, in der Datenverarbeitung oder auch im täglichen Leben. Tiefer eingedrungen sind die strukturmathematischen Methoden und Begriffsbildungen bisher wohl nur in der Mathematik selbst und in der Theoretischen Physik. Dagegen sind die wissenschaftsdidaktischen Probleme, die bei der Verbindung der Mathematik mit praktischen Anwendungen mathematischer Modelle auftreten, und damit die Probleme der Mathematisierung im weiteren Sinne noch weithin ungelöst. Hier wird es sich einerseits um die Analyse der Verwendungssituationen mathematischer Modelle handeln müssen. Andererseits wird zu untersuchen sein, welche Qualifikationen dem einzelnen vermittelt werden müssen, damit er die mathematischen Modelle anwenden kann.

II. Studium der Mathematik

II. 1. Allgemeine Zielsetzungen

In der folgenden Übersicht werden einige der wesentlichsten Zielsetzungen (Lernziele) angegeben, die in einer mathematischen Ausbildung im Hochschulbereich erreicht werden sollten, wobei die Studieninhalte im einzelnen auf die unterschiedlichen Ausbildungsziele und Ausbildungsgänge abgestimmt werden müssen.

(1) Kenntnis des methodischen Vorgehens der Mathematik:

Einsicht in die Notwendigkeit und die Prinzipien der Exaktheit;

Einsicht in die Struktur des Abstraktionsvorgangs (Erkennen von Gemeinsamkeiten, Denkökonomie, Verdeutlichung von Zusammenhängen);

Erkenntnis, daß Mathematik ein dynamisches Gebilde ist, d. h., daß inner- und außermathematische Probleme unter Beachtung der Exaktheit und im Hinblick auf Denkökonomie sowie Verdeutlichung der Zusammenhänge ständig neu formuliert und gelöst werden müssen und daß mathematische Objekte insofern Produkte einer zielgerichteten Konstruktion sind.

(2) Überblick über vorhandene Theorien:

Kenntnis der dahinter stehenden Probleme;

Einordnung in eine Systematik (struktureller Aufbau, Axiomatik, konstruktiver Zugang).

(3) Fähigkeit, aufgrund einer gegebenen Problemstellung einen theoretischen Ansatz zu entwickeln:

Formulierung eines Problems — Mathematisierung des Problems — Gewinnung einer Lösungsidee — Führen des Beweises — Analyse des Beweises — Einordnung in eine Systematik.

(4) Kenntnis des Zusammenhangs zwischen Mathematik und ihren Anwendungen:

Überblick der mathematischen Praxis (Berufspraxis);

exemplarische Kenntnis der Art und Weise von Anwendungen mathematischer Theorien;

Kriterien für die Wahl bestimmter Theorien zur Anwendung auf ein vorgelegtes praktisches Problem, auch unter dem Gesichtspunkt des praktischen Interesses;

Fähigkeit zur Implementierung der Modellbehandlung in bezug auf Fragestellungen der Praxis.

(5) Kritische Auseinandersetzung mit Inhalten und Methoden der Mathematik im Hinblick auf eigene und gesellschaftliche Interessen.

(6) Herstellung einer Kommunikationsbasis zur Verständigung mit anderen Wissenschaften.

II. 2. Gestaltung des Studiums

Das künftige Ausbildungsangebot muß ferner den Veränderungen in den Wissenschaften und in der Berufspraxis Rechnung tragen, in denen die Bedeutung der Mathematik ständig zunimmt. Der Bedarf an mathematisch ausgebildeten Kräften wächst, zugleich differenzieren sich die Tätigkeiten und eröffnen sich neue Berufsmöglichkeiten. Hinzu kommt, daß die Schulabsolventen ihre Eignung und Befähigung für verschiedene Ausbildungsmöglichkeiten in der Mathematik häufig noch nicht übersehen können.

Aus diesen Gründen sehen die nachstehenden Überlegungen zunächst als erste Phase ein zweijähriges gemeinsames Grundstudium vor. Das weitere Studium soll sich dann entsprechend den verschiedenen Ausbildungszielen in Ausbildungsabschnitten unterschiedlicher Dauer und unterschiedlichen Inhalts fortsetzen und zu den entsprechenden Abschlüssen führen. Als Ausbildungsziele zeichnen sich die Lehrämter für den Primarbereich, für die Sekundarstufe I, für die Sekundarstufe II sowie Kombinationen zwischen diesen ab, ferner die dem bisherigen Diplom entsprechende Qualifikation und eine Qualifikation, die an besonderen berufspraktischen Aufgaben, z. B. in der Informatik, orientiert ist.

Die folgenden Überlegungen beschränken sich auf das Grundstudium. Insgesamt ist zu betonen, daß das gemeinsame Grundstudium seine Bestimmung nur erfüllen kann, wenn es in einem Forschung und Lehre verbindenden Fachbereich durchgeführt wird. Das gilt ebenfalls für die weiteren Studienabschnitte der nach dem Grundstudium untergliederten Ausbildung.

II. 3. Erste Phase des Studiums (Grundstudium)

(1) Ein Grundstudium als erste Phase des Studiums im Fach Mathematik hat vornehmlich ein methodisches Instrumentarium, eine inhaltliche Grundlage und eine systematische Orientierung zu bieten. Zugleich kommt es darauf an, das Interesse der Studienanfänger zu be-

stärken und für das Studium nutzbar zu machen. Von Anfang an sollten die einzelnen Unterrichtsinhalte in ihrem Zusammenhang mit dem fachspezifischen Ausbildungsziel und damit in ihrer Notwendigkeit bewußt gemacht und begriffen werden. Ein nur mosaikartig vermitteltes Wissen verhindert es, das Studium im ganzen als sinnvolle Aufgabe zu begreifen. Möglichst frühzeitig sollte der Student seine Eignung und Befähigung für die Arbeit in dem von ihm gewählten Studiengang beurteilen können. Zu diesem Zweck muß ihm im Grundstudium Gelegenheit geboten werden, sich unter Anleitung, aber möglichst selbständig mit Problemen des Faches auseinanderzusetzen. Erwünscht ist, daß der Student viele Aspekte selbst kennenlernt, die sich bei der Bewältigung von fachlichen Fragen und Problemen ergeben. Hierzu gehören zum Beispiel:

Auffinden und Formulieren eines Problems, einer Aufgabe;

Diskussion vermuteter oder möglicher Lösungen; Einordnen in den Erfahrungsbestand;

Aufstellung eines Planes für das Vorgehen; Abwägung von Zwischenzielen und Hilfsmitteln;

Vorgehen nach diesem Plan;

Beseitigen von Fehlern, Ausräumen von Schwierigkeiten;

Einordnung in größere Zusammenhänge; Möglichkeiten der Verallgemeinerung;

Formulierung der Ergebnisse in optimaler Form; Diskussion der Tragweite;

Anwendung der Ergebnisse bei der Behandlung neuer Fragen.

Auf diese Weise sollen die für das wissenschaftliche Arbeiten notwendigen Fähigkeiten früh bewußt gemacht und einer rationalen Betrachtungsweise zugeführt werden. Im Fortschreiten des Grundstudiums kann durch geeignete Aufgabenstellung mit zunehmender Intensität auf die verschiedenen Fragen eingegangen werden.

Wichtig wird es sein, daß alle Schritte vom Studenten selbst mit vollzogen werden. Das hat den Vorzug, daß der Student seine Eignung für das gewählte Fach selbst zu beurteilen und zu überprüfen lernt. Er gewinnt Einsicht in das Ordnungsgefüge und den systematischen Aufbau des Faches und erfährt, daß die Auswahl des Grundwissens seines Faches („Stoff" der ersten Semester) durch die Erfordernisse des Faches selbst begründet und gerechtfertigt ist. Art und Anspruch wissenschaftlichen Arbeitens werden verdeutlicht, wodurch zugleich einem schablonenartigen Vorgehen und einem auf die Verwendung von reinen Techniken reduzierten Arbeiten vorgebeugt wird. Außerdem werden erste, exemplarische Kenntnisse in der Anwendungsweise mathematischer Theorien vermittelt.

(2) Für das inhaltliche und methodische Konzept sowie für die Wahl und Kombination der verschiedenen Typen von Lehrveranstaltungen im Grundstudium wird die Situation, in der sich die Studienanfänger befinden, zu berücksichtigen sein. Insbesondere müssen die folgenden Gesichtspunkte beachtet werden:

— Sichtung von Material, das in vorwissenschaftlicher Form gegeben ist, z. B. Beschreibung und Mathematisierung von Objektbereichen;

— Notwendigkeit und Prinzipien der Exaktheit (z. B.: warum beweist man etwas, was heißt „definieren"?);

— Abstraktionsvorgang und Herausarbeiten von Strukturen, z. B. Erkennen gemeinsamer Eigenschaften verschiedener Objektbereiche, Denkökonomie, Verdeutlichen von Zusammenhängen;

— Leistungsfähigkeit mathematischer Methoden, z. B. Anwendungsbreite innerhalb und außerhalb der Mathematik; Notwendigkeit, die Grenzen der Anwendbarkeit bewußt zu machen.

(3) Kernstück des Grundstudiums bilden die beiden Grundkurse Analysis und Lineare Algebra.

In beiden Kursen, die nebeneinander [1]) studiert werden, sollen die genannten Ausbildungsziele deutlich werden. Die beiden Kurse unterscheiden sich zwar wesentlich, ergänzen sich jedoch in Methoden und Inhalt. Bei beiden soll es sich jeweils um ein Gerüst handeln, das für alle Studiengänge den jeweils fachspezifischen Grundbestand repräsentiert. Dazu treten dann entsprechend dem jeweils angestrebten Ausbildungsziel Ergänzungen, z. B. mit Betonung didaktischer Gesichtspunkte oder des kalkülmäßigen Vertrautmachens im Hinblick auf verschiedene Anwendungsbereiche.

Schon während des Grundstudiums sollte dem Studenten die Möglichkeit geboten werden, an Beispielen Einblick in die Verwendungssituationen der Mathematik — z. B. Anwendung mathematischer Modelle, elektronische Datenverarbeitung, Informatik — zu gewinnen.

(a) Zum Grundkurs Analysis

Ziel des Grundkurses ist eine Einführung in die Methoden der Analysis in der Weise, daß zu modernen Begriffsbildungen hingeführt wird. Vollständigkeit kann hierbei nicht erreicht und soll auch nicht angestrebt werden. Die Stoffauswahl ist so zu treffen, daß Querverbindungen aufgezeigt werden können, die die Tragweite der Methoden deutlich machen.

---

1) Es müßte geprüft werden, ob es sich nicht empfiehlt, wegen der Verschiedenartigkeit der Motivation, der Kenntnisse und Fähigkeiten der Studienanfänger den Analysiskurs etwas später beginnen zu lassen und ihm einen propädeutischen Kurs voranzuschicken, der auf die Situation der Studienanfänger ausgerichtet ist (vgl. die oben genannten Gesichtspunkte). In diesem Kurs wäre dann insbesondere an bekannten Inhalten aus der Schule die Fruchtbarkeit der folgenden Begriffe deutlich zu machen: Mengen, Relationen, Abbildungen, strukturierte Mengen.

(b) Zum Grundkurs Lineare Algebra

Der Grundkurs soll eine Einführung in die algebraischen Strukturen und die strukturerhaltenden Abbildungen bieten. Insbesondere sollte auch die Vektorraumstruktur in ihrer Wechselwirkung zur Geometrie herausgestellt werden. Die Einführung in die Theorie der Gruppen, Ringe und Moduln muß notwendigerweise exemplarisch sein und kann sich nur auf Schwerpunkte beschränken.

(4) Durch zwei weitere Lehrveranstaltungen sollen schon im Grundstudium die typischen mathematischen Verfahrensweisen — Systematisierung und problemorientiertes Vorgehen — deutlich gemacht werden. Das wird erreicht, wenn in einer Lehrveranstaltung ein Einblick in die Systematik bei dem Aufbau einer der mathematischen Grunddisziplinen, z. B. der Topologie, der Algebra oder der Ordnungstheorie, vermittelt wird. In einer zweiten Lehrveranstaltung sollte aus einem mathematischen Gebiet eine Reihe von spezielleren Problemen erörtert werden. Als solche können u. a. gewöhnliche Differentialgleichungen, spezielle Funktionen oder Differentialgeometrie genannt werden.

(5) Die unter (3) und (4) geschilderten Lehrveranstaltungen werden je nach Interesse und angestrebtem Ausbildungsziel durch weitere Lehrveranstaltungen zu ergänzen sein. Hierfür könnte z. B. im Rahmen der Anwendungen der Analysis oder einer Einführung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik daran gedacht werden, Probleme aus den Bereichen der Anwendungen — von der Motivation bis zur konkreten numerischen Lösung — einzubeziehen. Derartige Probleme würden dazu beitragen, die Theorie aufzulockern und damit zugleich die enge Beziehung zwischen theoretischer Behandlung und praktischer Realisierung zu verdeutlichen.

II. 4. Übergang in die zweite Phase des Studiums

Nach dem Grundstudium und damit in der zweiten Phase der Ausbildung treten die zu verschiedenen Ausbildungszielen führenden Studiengänge in ihrer Differenzierung voll in Erscheinung. Beim Übergang in die zweite Phase hat der Student in zweifacher Hinsicht eine Wahl zu treffen, und zwar in Bezug sowohl auf den Studiengang als auch auf den Schwerpunkt innerhalb des gewählten Studienganges.

Im Hinblick auf diese Entscheidungen soll das Grundstudium dem Studenten helfen, über seine Neigungen, Wünsche, Erwartungen und Fähigkeiten Klarheit zu gewinnen. Außerdem muß er sich über die weiteren Studien- sowie über die Berufsmöglichkeiten informieren können. Diese Information muß in einem weitgefaßten Rahmen erfolgen, wobei auch Fachbereiche und Berufsmöglichkeiten zu berücksichtigen sind, die an der eigenen Hochschule nicht unmittelbar angesprochen werden.

Dementsprechend sollte gegen Ende des Grundstudiums jeder Student auf inhaltliche Fehlplanungen seines Studiums aufmerksam gemacht werden. Außerdem sollten ihm Hinweise für die Auswahl und die Gestaltung des anschließenden Studiums gegeben werden. In diesem Sinne wird auch die Zwischenprüfung beratenden Charakter haben und ausweisbaren didaktischen Zielen dienen.

In der zweiten Phase sollten schließlich die verschiedenen Studiengänge so konzipiert sein, daß eine Revision der Entscheidung während des ersten Jahres noch ohne größere Schwierigkeiten möglich ist.