# V. Puiseux's Untersuchungen über die algebraischen Functionen

**Fischer, Hermann**

**Halle, 1861**

Einleitung.

# Einleitung.

Die vorliegenden Untersuchungen, welche Herr Puiseux in Liouville's *Journal de Mathématiques pures et appliquées*, T. XV und XVI in den Jahren 1850 und 1851 veröffentlicht hat, bilden für das Studium der höhern Zweige der reinen Mathematik, wie der mathematischen Physik eine vielumfassende Grundlage und sind insbesondere dadurch ausgezeichnet, dass überall von der so lichtvollen geometrischen Methode, deren Entstehung wir der durch Gauss*) eingeführten Darstellungsweise complexer Grössen verdanken, Gebrauch gemacht wird. Ich habe mich daher veranlasst gesehen, diese wichtigen und interessanten Untersuchungen den jüngern Freunden der mathematischen Analysis, welche auf dem ausgedehnten Gebiete derselben bereits zu den Elementen der Integralrechnung vorgeschritten sind, in deutscher Bearbeitung vorzulegen und darf vielleicht hoffen, dass dieses Schriftchen Manchem nicht unerwünscht sein wird.

Den gegenwärtigen Betrachtungen liegt der Begriff der Continuität der complexen Functionen zu Grunde (Nr. 1—7), wofür Cauchy sowol die allgemeine Definition**), als auch den thatsächlichen Beweis***) gegeben hat. Denkt man sich in der Ebene

---

*) *Göttinger Gelehrten Anzeigen* vom Jahre 1831, Stück 64.

**) *Comptes rendus*, année 1846; T. XXIII, p. 700.

***) *Exercices d'Analyse et de physique mathématique*, Paris 1840; T. II, p. 109.

einen Punkt $P$ auf rechtwinklige Coordinaten-Axen bezogen, die Axe des Reellen und die des Imaginären, und nimmt in Bezug auf jene die Coordinate $a$, in Bezug auf diese die Coordinate $b$ an, so wird dem Punkte $P$ die complexe Grösse $a+bi$ zuertheilt. Auf diese Weise entspricht jedem Punkte der Ebene eine complexe Grösse, und umgekehrt lässt sich jede complexe Grösse als Punkt versinnlichen. Wie man mit den Punkten, welche complexen Zahlen entsprechen, die arithmetischen Operationen vornehmen kann, wie man also Punkte zu finden vermag, deren Werthe der Summe, Differenz, u. s. w. anderer durch gegebene Punkte dargestellter Werthe gleich sind; welche Curven*) durch gegebenen Functionen von $z$ zugehörige Punkte beschrieben werden, sobald man den $z$ entsprechenden Punkt $Z$ auf bestimmten Curven fortführt; welche Punkte den Ableitungen gegebener Functionen zukommen u. s. f., hat Herr Siebeck ausführlich dargethan**). Denkt man sich nun die complexe Grösse $z$ variabel, so kann der zugehörige Punkt $Z$ jede Stelle der Ebene durchlaufen, so dass die Ebene als der geometrische Ort der complexen Grösse $z$ anzusehen ist. Da man immer den Radiusvector $r$ eines Punktes $Z$ als Function eines Winkels $t$, welchen derselbe mit der $x$-Axe bildet, betrachten kann, so lässt sich auch $z$ als eine continuirliche Function $\varphi(t)$ von der reellen Grösse $t$ auffassen, und zwar als eine complexe Function von der Beschaffenheit, dass $z=z_1$ für $t=t_1$ und $z=z_2$ für $t=t_2$ wird; alsdann wird $\varphi(t_1)$ einem Punkte $Z_1$ und $\varphi(t_2)$ einem Punkte $Z_2$ entsprechen, ferner während $t$ von $t_1$ bis $t_2$ continuirlich wächst, die complexe Grösse $\varphi(t)$ oder $z$ auf einer gewissen durch $\varphi(t)$ vollständig bestimmten Curve vom Punkte $Z_1$ zu dem Punkte $Z_2$ continuirlich übergehen. Auch der Function $u=f(z)$ wird ein Punkt $U$ der Ebene entspre-

*) Unter *Curve* ist hier überhaupt der Weg zu verstehen, welchen ein Punkt durchläuft.

**) Crelle's *Journal für die Mathematik,* Bd. 55, S. 221.

chen, welcher mit $Z$ seine Lage ändert und zwar in derjenigen Beziehung zu $Z$ steht, die sich in der Function $f(z)$ selbst ausspricht; desgleichen wird $f(z_1)$ dem Punkte $U_1$ und $f(z_2)$ dem Punkte $U_2$ zugehören. Da die Function $\varphi(t)$ hier ganz willkürlich angenommen war, so kann man sich eben sowol eine andere Function $z=\chi(t)$ denken, für welche $\chi(t_1)=z_1$ und $\chi(t_2)=z_2$ ist, also, wenn wieder die Veränderung von $z$ bloss durch die Veränderung der Grösse $t$ bedingt ist, den Punkt $Z$ während des Wachsens von $t_1$ bis $t_2$ auch auf einer andern Curve von $Z_1$ zu $Z_2$ übergehen lassen, und gleichzeitig wird dann $U$ ebenfalls auf einer andern Curve als vorhin von $U_1$ nach $U_2$ gelangen. Somit gibt es einerseits unendlich viele Curven, auf denen $Z$ durch Veränderung der Grösse $z$ von $Z_1$ zu $Z_2$, und andererseits auch unendlich viele Curven, auf denen $U$ von $U_1$ zu $U_2$ übergehen kann.

Der Begriff eines zwischen imaginären Grenzen genommenen Integrals und der Sinn der Vieldeutigkeit desselben ist zuerst von Cauchy*) dargelegt worden. Wie für den Fall, dass $u=f(z)$ und $z$ nur reelle Werthe durchlaufen, das Integral

$$\int_a^b f(z)dz,$$

definirt wird durch die Summe:

$$f(a)dz+f(a+dz)dz+f(a+2dz)dz+\ldots.+f(b-dz)dz+f(b)dz,$$

so soll hier ganz entsprechend das Integral

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz,$$

wenn die den Werthen $z_1$, $\zeta$, $\zeta_1$, $\zeta_2$, .... $z_2$ zugehörigen Punkte auf dem Wege von $Z$ in sehr kleinen Abständen auf einander folgen, durch die Summe:

$$f(z_1)(\zeta-z_1)+f(\zeta)(\zeta_1-\zeta)+f(\zeta_1)(\zeta_2-\zeta_1)+\ldots.+f(z_2)(z_2-\zeta_n)$$

definirt werden, wo $z_1$, $\zeta$, $\zeta_1$, $\zeta_2$, ...., $\zeta_n$, $z_2$ und $f(z_1)$, $f(\zeta)$,

---

*) *Mémoire sur les intégrales définies prises entre des limites imaginaires. Paris* 1825.

$f(\zeta_1), \ldots, f(z_2)$ complexe Functionen von der reellen Grösse $t$ sind. Setzt man nun hierin:

$$z_1 = x_1 + y_1 i,$$
$$\zeta = \xi + \eta i,$$
$$\zeta_1 = \xi_1 + \eta_1 i,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$z_2 = x_2 + y_2 i,$$

wo

$$x_1 = r_1 \cos t_1 = \varphi_1(t_1), \quad y_1 = r_1 \sin t_1 = \varphi_2(t_1),$$
$$\xi = \varrho \cos \tau = \varphi_1(\tau), \quad \eta = \varrho \sin \tau = \varphi_2(\tau),$$
$$\xi_1 = \varrho_1 \cos \tau_1 = \varphi_1(\tau_1), \quad \eta_1 = \varrho_1 \sin \tau_1 = \varphi_2(\tau_1),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$x_2 = r_2 \cos t_2 = \varphi_1(t_2), \quad y_2 = r_2 \sin t_2 = \varphi_2(t_2)$$

reelle Functionen von $t$ sind, während alsdann

$$f(z_1) = f_1(t_1) + if_2(t_1),$$
$$f(\zeta) = f_1(\tau) + if_2(\tau),$$
$$f(\zeta_1) = f_1(\tau_1) + if_2(\tau_1),$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$f(z_2) = f_1(t_2) + if_2(t_2)$$

wird, wo $f_1$ und $f_2$ gleichfalls reelle Functionen von $t$ bezeichnen, so ergibt die vorstehende Summe folgende Gleichung:

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz =$$

$$\Big\{[f_1(t_1)(\xi - x_1) + f_1(\tau)(\xi_1 - \xi) + \ldots] - [f_2(t_1)(\eta - y_1) + f_2(\tau)(\eta_1 - \eta) + \ldots]\Big\}$$
$$+ i\Big\{[f_1(t_1)(\eta - y_1) + f_1(\tau)(\eta_1 - \eta) + \ldots] + [f_2(t_1)\ \xi - x_1)$$
$$+ f_2(\tau)(\xi_1 - \xi) + \ldots]\Big\}$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} \left[ f_1(t) \frac{d\varphi_1(t)}{dt} - f_2(t) \frac{d\varphi_2(t)}{dt} \right] dt$$

$$+ i \int_{t_1}^{t_2} \left[ f_1(t) \frac{d\varphi_2(t)}{dt} + f_2(t) \frac{d\varphi_1(t)}{dt} \right] dt.$$

Somit ist das Integral von einer complexen Grösse mit Hilfe der sinnlichen Darstellung des Imaginären eben so als complexe Grösse zweier reellen Integrale definirt, wie es die directe Ausführung des Ausdrucks

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[f_1(t)+if_2(t)\right]\left[\frac{d\varphi_1(t)}{dt}+i\frac{d\varphi_2(t)}{dt}\right]dt$$

mit sich bringt. Selbiges wird daher durch einen Punkt dargestellt, welcher durch successive Construction der Punkte, die der obigen Summe angehören, gewonnen werden kann.

Es ist aber zu untersuchen, ob man durch die Bildung dieser Summe für die Fortbewegung des Punktes $Z$ von $Z_1$ nach $Z_2$ auf andern Curven denselben Punkt, oder neue Punkte erlangen wird, und wie im letztern Falle die neuen Punkte zu jenem liegen werden; d. h. ob der Ausdruck:

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\mathfrak{f}_1(t)\frac{d\chi_1(t)}{dt}-\mathfrak{f}_2(t)\frac{d\chi_2(t)}{dt}\right]dt$$

$$+i\int_{t_1}^{t_2}\left[\mathfrak{f}_1(t)\frac{d\chi_2(t)}{dt}+\mathfrak{f}_2(t)\frac{d\chi_1(t)}{dt}\right]dt,$$

wo

$$z=\chi(t)=\chi_1(t)+i\chi_2(t),$$
$$f(z)=\mathfrak{f}_1(t)+i\mathfrak{f}_2(t)$$

ist, immer denselben Werth hat, in welcher Weise man sich auch $z$ von $t$ abhängig denken mag, wofern nur $z=z_1$ für $t=t_1$ und $z=z_2$ für $t=t_2$ ist, oder ob dieser mehrere Werthe zulässt, und in welchem Zusammenhange dieselben unter einander stehen.

Wir werden uns gleich von der Gültigkeit des folgenden Satzes überzeugen:

Wenn $f(z)$ eine continuirliche Function von $z$ bezeichnet, welche für keinen endlichen Werth von $z$ unendlich wird, und wenn es eine stetige Function

$\psi(z)$ gibt, deren Ableitung $f(z)$ darstellt, so ist der Werth des Integrals $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz$ von dem Wege der Integration unabhängig und stets gleich $\psi(z_2) - \psi(z_1)$.

Zunächst ist klar, dass wenn einem Werthe von $z$ ein gewisser Punkt $Z$ und der Function $\psi(z)$ der Punkt $V$ entspricht, und dann $Z$ zu irgend einem benachbarten Punkte $Z_1$ übergeht, dem die complexe Grösse $z+h$ zugehört, auch der Function $\psi(z+h)$ ein gewisser in der Nähe von $V$ liegender Punkt $V_1$ zukommen wird. Bekanntermassen versteht man unter der Ableitung einer Function $\psi(z)$ einer complexen Grösse die Grenze des Ausdrucks $\frac{\psi(z+h) - \psi(z)}{h}$ für $h = 0$, jedoch nur unter der Voraussetzung, dass diese Grenze unabänderlich dieselbe ist, auf welche Weise auch $h$ zu Null herabsinken mag. Nun ist aber die Lage des Punktes, welcher der Grösse $\frac{\psi(z+h) - \psi(z)}{h}$ entspricht, im Allgemeinen von der Richtung abhängig, in der $Z$ zu $Z_1$ gelangen kann, mithin wird $\lim \frac{\psi(z+h) - \psi(z)}{h}$ im Allgemeinen unendlich viele Werthe annehmen und daher nicht als die Ableitung der Function $\psi(z)$ definirt werden können.

Gehen wir nun von der Annahme aus, dass

$$\lim_{h=0} \frac{\psi(z+h) - \psi(z)}{h} = f(z)$$

ist, und setzen wie früher $z = \varphi(t)$, $z+h = \varphi(t+\tau)$, $h = \varphi(t+\tau) - \varphi(t)$, wo $\varphi(t)$ eine complexe Function der reellen Grösse $t$ ist, so geht durch Einführung dieser Werthe $\psi(z)$ in die complexe Function $\chi(t)$ über, ferner die zu Grunde gelegte Gleichung, wenn noch durch $\tau$ dividirt wird, in:

$$\frac{\chi(t+\tau) - \chi(t)}{\tau} = f(z) \cdot \frac{\varphi(t+\tau) - \varphi(t)}{\tau}$$

oder

$$\frac{d\chi(t)}{dt} = f(z)\frac{d\varphi(t)}{dt} = f(z)\frac{dz}{dt},$$

wo also die complexe Grösse $z$ als Function von $t$ auftritt. Durch Integration nach $t$ ergibt sich hieraus:

$$\int_{t_1}^{t_2} d\chi(t) = \chi(t_2) - \chi(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(z) \frac{dz}{dt} dt;$$

weil aber der Definition gemäss die Gleichungen

$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \int_{t_1}^{t_2} f(z) \frac{dz}{dt} dt$$

und $\chi(t_2) = \psi(z_2)$, $\chi(t_1) = \psi(z_1)$ gelten, so folgt endlich, dass

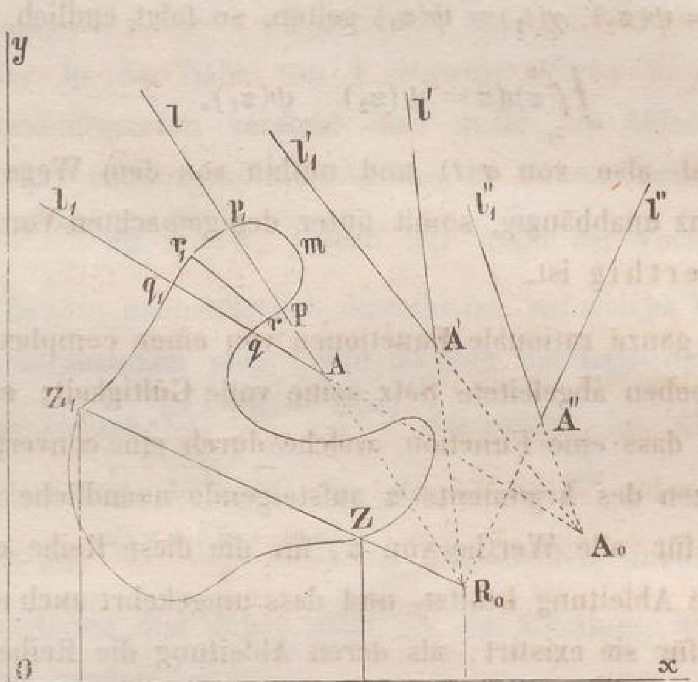
$$\int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = \psi(z_2) \quad \psi(z_1),$$

das Integral also von $\varphi(t)$ und mithin von dem Wege der Integration ganz unabhängig, somit unter den gemachten Voraussetzungen einwerthig ist.

Für ganze rationale Functionen von einer complexen Grösse hat der soeben abgeleitete Satz seine volle Gültigkeit; es leuchtet ferner ein, dass eine Function, welche durch eine convergente nach den Potenzen des Arguments $z$ aufsteigende unendliche Reihe definirt ist, für alle Werthe von $z$, für die diese Reihe convergent bleibt, eine Ableitung besitzt, und dass umgekehrt auch eine Function $\psi(z)$ für sie existirt, als deren Ableitung die Reihe $f(z)$ gilt, so dass hier ebenfalls der Weg der Integration gleichgültig ist, so lange man sich auf Punkte eines gewissen Gebietes beschränkt, für welche die Reihe convergent ist. Das Resultat der Integration über eine geschlossene Curve muss in diesen Fällen $\psi(z_1) - \psi(z_1) = 0$ sein. Eben so erstreckt sich der Satz auf gebrochene rationale Functionen unter der Bedingung, dass $f(z)$ für keinen endlichen Werth von $z$ unendlich wird. Sollte dieser Fall etwa für die Werthe $a$, $a'$, $a''$, .... von $z$ eintreten, so würde die Untersuchung des Integrals $\int_{z_1}^{z_2} f(z)\, dz$ freilich eine Modification erleiden.

Es lässt sich die in Nr. 6 und 7 eingeführte Anschauung von der Art der Verschiebung einer beliebig gekrümmten Curve, welche daselbst gleichsam als ein biegsamer und ausdehnbarer Faden betrachtet wird, in eine strengere Form bringen, deren sich Weierstrass in seinen Vorlesungen bedient. Es seien die Werthe $a, a', a'', \ldots.$ durch die Punkte $A$, $A'$, $A''$, .... (Fig. A) dargestellt, ferner sei $A_0$ ein ausserhalb der Verbindungslinien $AA'$, $AA''$, ...., $A'A''$, .... angenommener Punkt mit dem Werthe $a_0$ und $Z_1$ ein

Fig. A



beliebiger Punkt der Ebene, jedoch ausserhalb der geraden Linien $Al$, $A'l'$, $A''l''$, .... welche bezüglich von $A$, $A'$, $A''$, .... aus ins Unendliche fortlaufen. Um das Integral $\int_{a_0}^{z_1} f(z)\,dz$ zunächst für die gerade Linie $A_0Z_1$ zu erhalten, nehmen wir auf $A_0Z_1$ einen Punkt $Z$ an und setzen $\frac{A_0Z}{A_0Z_1} = s$, so dass dem Punkte $Z$ die complexe Grösse $z = a_0 + (z_1 - a_0)s$ entspricht. Dadurch geht unser Integral über in:

$$\int_{a_0}^{z_1} f(z)dz = \int_{1}^{0} (z_1 - a_0) f[a_0 + (z_1 - a_0)s]\, ds = F(z_1),$$

wo $z_1$ durch jeden Punkt der Ebene ausserhalb der Linien $Al$,

$A'l'$, $A''l''$,…, repräsentirt und daher durch $z$ ersetzt werden kann. Somit ist:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \int_0^1 \Big\{ f[a_0 + (z-a_0)s] + (z-a_0)\, s f'[a_0 + (z-a_0)s] \Big\} ds,$$

wo die Ableitung

$$f'[a_0 + (z-a_0)s] = \frac{\partial f[a_0 + (z-a_0)s]}{\partial [a_0 + (z-a_0)s]}$$

einen ganz bestimmten Sinn hat, da $f$ eine rationale Function vorstellt. Es ist aber

$$f[a_0 + (z-a_0)s] + (z-a_0) s f'[a_0 + (z-a_0)s] = \frac{\partial \{ s f[a_0 + (z-a_0)s] \}}{\partial s},$$

folglich hat man für alle Werthe von $z$ ausserhalb der genannten Linien:

$$\frac{\partial F(z)}{\partial z} = \int_0^1 \frac{\partial \{ s f[a_0 + (z-a_0)s] \}}{\partial s} ds = f(z),$$

d. h. es existirt eine Function $F(z)$, deren Ableitung nach $z$ durch $f(z)$ dargestellt ist, und somit wird das Resultat der Integration über eine geschlossene Curve, welche sich bis zu keiner von jenen Linien erstreckt, gleich Null.

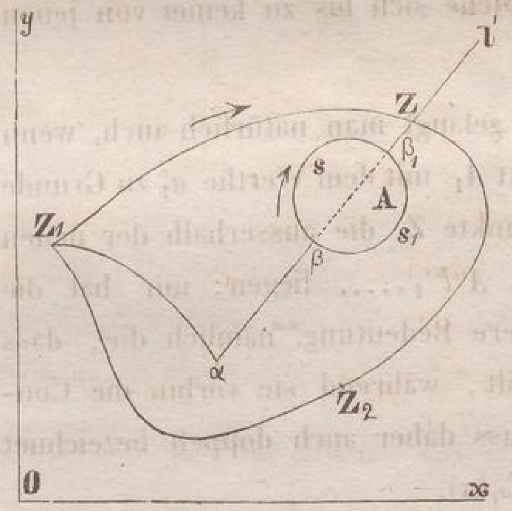
Zu denselben Folgerungen gelangt man natürlich auch, wenn man statt $A_0$ einen andern Punkt $A_1$ mit dem Werthe $a_1$ zu Grunde legt, und zwar für alle solche Punkte $Z$, die ausserhalb der neuen unbegrenzten Linien $Al_1$, $A'l'_1$, $A''l''_1$,…. liegen; nur hat die Function $F(z)$ alsdann eine andere Bedeutung, nämlich die, dass sie jetzt die Constante $a_1$ enthält, während sie vorhin die Constante $a_0$ enthielt. Dieselbe muss daher auch doppelt bezeichnet werden: etwa mit $F_{a_0}(z)$ und $F_{a_1}(z)$.

Hiernach ist also für jeden Punkt $Z$ der Ebene, mit Ausschluss der auf den unbegrenzten Linien $Al$, $Al_1$,…., $A'l'$, $A'l'_1$,…. befindlichen Punkte, jede der Functionen $F_{a_0}(z)$, $F_{a_1}(z)$ so beschaffen, dass ihre Ableitung gleich $f(z)$ ist; für die Punkte der Linien $Al$, $A'l'$,…. besitzt die Function $F_{a_0}(z)$ allein diese Eigenschaft und für die Punkte der Linien $Al_1$, $A'l'$,…. nur die Function $F_{a_1}(z)$.

Integrirt man nun von $Z_1$ aus bis zu dem Punkte $p_1$ der Linie $Al$, dann über die Strecke $p_1p$ und schliesslich auf derselben Seite von $Al$ über $pZ_2Z_1$ zurück, so ist der Werth des geschlossenen Integrals gleich Null. Hierbei wird zwar die Linie $Al_1$ in $q_1$ und $q$ überschritten, allein es ist für alle Punkte der Curve $Z_1q_1r_1rqZ_2Z_1$, wo die Strecke $r_1r$ zwischen $p_1p$ und $q_1q$ nach $A$ gerichtet ist, die Ableitung einer und derselben Function $F_{a_0}(z)$ gleich $f(z)$, daher das über diese Curve fortgeführte Integral gleich Null, eben so auch das Integral über $p_1prr_1p_1$, weil hierfür $F_{a_1}(z)$ die nämliche Eigenschaft besitzt: folglich hat man, da sich die Integration über $r_1r$ und $rr_1$ gegenseitig aufheben, für das Integral über $Z_1p_1pZ_2Z_1$ den Werth Null.

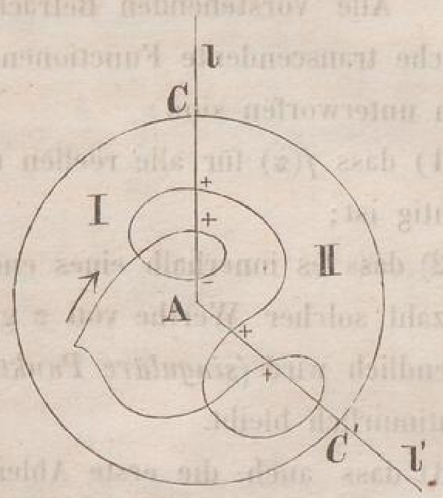
Was endlich den Fall betrifft, dass $Z$ die Linie $Al$ in $p_1$ (Fig. B) überschreitet, so construire man um $A$ einen kleinen Kreis und integrire über $Z_1\,p_1\,\beta_2\,s\,\beta_1\,A_0\,Z_1$ und auch über $Z_1A_0\beta_1s_1\beta_2p_1Z_2Z_1$, um jedes mal das Resultat Null zu erhalten; da sich die auf $Z_1A_0$ und $A_0Z_1$, über $A_0\beta_1$ und $\beta_1A_0$, über $\beta_2p_1$ und $p_1\beta_2$ bezüglichen Theile der Integrale zerstören, so ist auch die Summe der über $Z_1p_1Z_2Z_1$ und $\beta_2s\beta_1s_1\beta_2$ fortgeführten Integrale Null, d. h. das Integral über $Z_1p_1Z_2Z_1$ gleich dem Integrale über $\beta_2s_1\beta_1s\beta_2$. Beide geschlossene Curven werden also in gleichem Sinne durchlaufen.

Fig. B.




Um für den Sinn einer geschlossenen Bewegung einen einfachen Ausdruck zu haben, ziehe man von dem Punkte $A$ aus (Fig C) zwei unbegrenzte gerade Linien, die von einer geschlossenen Curve in der Richtung des Pfeiles irgend eine Anzahl von Malen geschnitten werden, und beschreibe um $A$ einen Kreis, welcher die ganze geschlossene Curve umgibt. Ferner denke man sich in $A$ einen Beobachter, welcher die Linie $Al$ entlang sieht, bezeichne den Theil $ACA_0CA$ des Kreises, dem der Punkt $Z_1$ angehört, mit I und den andern Theil mit II, nenne ferner die Richtung von links nach rechts die positive Richtung; alsdann wird die Integration auf dem Kreise im positiven Sinne vollzogen, so oft die Integrations-Curve die Linie $Al$ in positiver Richtung durchschneidet, und umgekehrt.

Fig. C.




Nun lässt sich leicht angeben, wie viele Umläufe der Punkt $Z$ auf einer geschlossenen Curve um einen Punkt $A$ macht, wenn man die Anzahl der Schnittpunkte dieser Curve und der Linie $Al$ ins Auge fasst. Offenbar muss die Curve aus dem Theile I in den Theil II des Kreises eben so oft eintreten, als es umgekehrt geschieht, wenn man die Theile durch die gebrochene Linie $C'AC$ geschieden denkt; es muss daher, wenn $n$ positive und $n'$ negative Schnittpunkte auf $AC$, ausserdem $m$ positive und $m'$ negative Schnittpunkte auf $C'A$ liegen,

$$n+m=n'+m'$$

sein, d. h. $n-n'=m'-m$. Da aber $m'-m$ für die Integration über $C'A$ gleich $m-m'$ für die Integration über $AC'$ ist, so hat die Zahl $n-n'$ unabhängig von der Richtung der von $A$ aus gezogenen Linie stets einen constanten Werth, welcher als Mass für die Anzahl der Umläufe dienen kann. Auch für jede von $A$ ausgehende gebrochene oder continuirlich gekrümmte Linie hat Dasselbe Gültigkeit; ferner ist klar, dass jene Anzahl gleich $\pm 1$ oder 0 ist, wenn die zu durchlaufende geschlossene Curve keine Doppelpunkte hat, je nachdem der Punkt $A$ innerhalb oder ausserhalb dieser Curve liegt. —

Alle vorstehenden Betrachtungen erstrecken sich auch auf solche transcendente Functionen $f(z)$, welche folgenden Bedingungen unterworfen sind:

1) dass $f(z)$ für alle reellen und imaginären Werthe von $z$ eindeutig ist;

2) dass es innerhalb eines endlichen Gebietes nur eine endliche Anzahl solcher Werthe von $z$ gibt, für welche die Function $f(z)$ unendlich wird *(singuläre Punkte)*, und dass diese übrigens mit $z$ continuirlich bleibt.

3) dass auch die erste Ableitung von $f(z)$ diesen Bedingungen entspricht und überall mit $f(z)$ selbst continuirlich ist.

Die in den Nummern 9—12 enthaltenen Sätze, welche hier nur als Zusätze erscheinen, sind zwar schon von Cauchy aufgestellt worden*); wenn man jedoch mit Hilfe des in Nr. 6, 7 und im zweiten Theile Gesagten sich davon Rechenschaft zu geben weiss, wann die über eine geschlossene Curve hin zu integrirende Function nach einem Umlauf des beweglichen Punktes ihren Anfangswerth wieder annimmt, und wann nicht, lassen diese Sätze erst eine einfachere Deutung zu. Hieraus wird sodann in Nr. 14 die Reihen-Entwickelung einer Function $u = \varphi(z)$ mit Hilfe einer Methode abgeleitet, welche ebenfalls von Cauchy herrührt und mehrfach wieder benutzt worden ist.

Es bedarf dann noch des Nachweises, dass eine solche Entwickelung von $\varphi(z)$ nur auf eine Weise möglich ist, so dass bei jeder Entwickelung die Coefficienten von $(z-c)^m$ unverändert auftreten. Bezeichnet man nämlich das Integral $\int \frac{\varphi(z)}{z-\gamma} dz$ für den

*) In dem angeführten *Mémoire* und den *Comptes rendus*, T. XXIII, p. 253 und 692.

kleinen Kreis um $\Gamma$ mit $(\varepsilon)$, für den Kreis $\sigma$ mit $(\varrho)$ und für einen um $C$ beschriebenen Kreis mit $(\mu)$, so ist offenbar

$$(\varrho) = (\varepsilon) + (\mu) = 2\pi i \varphi(\gamma) + (\mu),$$

daher

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}[(\varrho) - (\mu)],$$

wo

$$(\varrho) = 2\pi i \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{A}_m (\gamma - c)^m, \quad \mathrm{A}_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{(\varrho)} \frac{\varphi(z)}{(z-c)^{m+1}} dz, \ldots$$

$$(\mu) = 2\pi i \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{B}_m \frac{1}{(\gamma - c)^{m+1}}, \quad \mathrm{B}_m = -\frac{1}{2\pi i} \int_{(\mu)} (z-c)^m \varphi(z)\, dz$$

$$= -\mathrm{A}_{-(m+1)}$$

ist; mithin hat man:

$$\varphi(\gamma) = \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{A}_m (\gamma - c)^m + \sum_{m=0}^{m=\infty} \mathrm{B}_m \frac{1}{(\gamma - c)^{m+1}}$$

und für alle innerhalb des Kreises $\sigma$ befindlichen Werthe von $z$:

$$\varphi(z) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{A}_m (z-c)^m.$$

Multiplicirt man diese Reihe mit $\frac{1}{(z-c)^n}$, integrirt hierauf über einen Kreis $\sigma$, für dessen Gebiet die Reihe convergent bleibt, und beachtet zugleich, dass das Integral

$$\int_{(\varrho)} \frac{\varphi(z)}{(z-c)^n} dz = \sum_{-\infty}^{+\infty} \int_{(\varrho)} \mathrm{A}_m (z-c)^{n-m} dz$$

für alle von $n-1$ verschiedene Werthe $m$ Null ist, wie sich durch Einführung von $z - c = re^{ti}$ ergibt; so hat man:

$$\int_{(\varrho)} \frac{\varphi(z)}{(z-c)^n} dz = \int_{(\varrho)} \mathrm{A}_{n-1} \frac{dz}{z-c} = 2\pi i \mathrm{A}_{n-1},$$

folglich

$$\mathrm{A}_{n-1} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z)}{(z-c)^n} dz$$

oder

$$\mathrm{A}_m = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z)}{(z-c)^{m+1}} dz,$$

wo $m$ alle positiven und negativen Zahlen durchläuft. Somit lässt sich $\varphi(z)$ nur auf eine Weise nach den Potenzen von $z-c$ entwickeln.

Sobald die von Cauchy entlehnten Sätze bewiesen sind, ist es von Nutzen eine specielle Anwendung derselben auf eine algebraische Gleichung zu machen (Nr. 17), weil sich dann die Bedingungen ihrer Gültigkeit bestimmter einkleiden lassen.

Im zweiten Theile (Nr. 18—27) werden zunächst Untersuchungen über die Art der Vertauschungen angestellt, welche die einer algebraischen Gleichung genügenden Functionen $u_1$, $u_2$,.... eingehen, sobald man den beweglichen Punkt um singuläre Punkte herumführt, und hiermit mehrere neue Sätze abgeleitet; Puiseux's Methode gewährt ein Mittel, die Darstellung der Systeme wirklich zu leisten. Zugleich wird hier gezeigt, wie man überhaupt jeden von einem Punkte zu durchlaufenden begrenzten Weg auf eine Zusammensetzung einer einfachen Curve und einer Reihe von Elementar-Curven reduciren und die Werthe, welche die Function auf verschiedenen Wegen erlangt, unmittelbar beurtheilen kann, wenn man sich der so vortheilhaft gewählten Bezeichnungen bedient.

Der dritte Theil enthält die Anwendungen dieser Untersuchungen auf die Integralrechnung und insbesondere die Behandlung von Functionen, welche durch Gleichungen zweiten Grades und durch binomische Gleichungen definirt sind. Es ergeben sich hier (Nr. 50 und 59) allgemeine Formeln für sämmtliche Werthe eines zwischen bestimmten Grenzen genommenen Integrals, sobald es nämlich elliptisch oder hyperelliptisch ist, $2n$ Perioden desselben, wenn das unter dem Wurzelzeichen stehende Polynom vom $(2n+1)$ten oder vom $(2n+2)$ten Grade ist; und sobald es einer binomischen Gleichung $m$ten Grades angehört, welche $n$ singuläre Punkte darbietet, $m-1$ Perioden, falls $n$ einem Vielfachen von $m$ gleich ist; $(m-1)(n-2)$ Perioden, wenn ausserdem der Grad des Polynoms von $z$ kleiner als $\frac{n}{m}-1$ ist, und in andern Fällen $(m-1)(n-1)$ Perioden.

In Nr. 58 hat Puiseux die Jacobi'sche Behandlungsweise der Abel'schen Functionen durch seine Methode auf den Fall erweitert, wenn mehr als zwei Functionen zugleich gegeben sind.

Zum Schlusse folgt eine zweite Abhandlung über die irreductibeln Gleichungen, die für alle vorangehenden Untersuchungen eine besondere Wichtigkeit haben.

**Fischer.**