V. Puiseux's Untersuchungen über die algebraischen Functionen

Fischer, Hermann

Halle, 1861

Erster Theil.

Erster Theil.

1. Eine Function u einer reellen oder imaginären Variabeln z, welche durch eine algebraische Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

definirt ist, wird dadurch, dass man der Variabeln einen besondern Werth ertheilt, noch nicht vollständig bestimmt, weil die gegebene Gleichung im Allgemeinen für jeden Werth von z mehrere Werthe von u liefert; es muss noch angegeben werden, welcher von diesen Werthen zur unzweideutigen Definition der Function u dienen soll.

So würden sich z. B. aus der Gleichung

$$u^2 - z = 0$$

für einen durch re^{ti} dargestellten Werth von z, wo r positiv und t reell ist, folgende zwei entsprechende Werthe von u ergeben:

$$r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{t}{2}i}, \; -r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{t}{2}i},$$

wo $r^{\frac{1}{2}}$ den Zahlenwerth der Quadratwurzel von r bedeutet. Zur Vervollständigung der Definition unserer Function könnte dann für t ein Winkel zwischen $-\pi$ und $+\pi$, und für u der eine jener beiden Werthe, etwa $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{t}{2}i}$ ein- für allemal gewählt werden; mit dieser Wahl jedoch, welche zumal nicht allgemein bei Gleichungen von jedem Grade stattfinden kann, ist das Unbequeme verknüpft, dass hierdurch u zu einer discontinuirlichen Function von z gemacht wird. Legt man nämlich der Variabeln die beiden Werthe $re^{(\pi-\varepsilon)i}$ und $re^{(-\pi+\varepsilon)i}$ bei, die für einen positiven, unendlich kleinen Werth von ε unendlich wenig von einander abweichen, so werden die correspondirenden Werthe von u:

$$r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\pi-\varepsilon}{2}i}, \quad r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{-\pi+\varepsilon}{2}i}$$

um eine endliche, mit $2r^{\frac{1}{2}}i$ zusammenfallende Grösse differiren.

2. Diese Discontinuität lässt sich aber durch eine andere Definition der Function u verhüten.

Gehen wir wieder von der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

aus, deren linke Seite wir als eine ganze Function von u und z betrachten können, legen z einen beliebigen Anfangswerth c bei, so dass der Anfangswerth b von u jede Wurzel der Gleichung

$$f(u, c) = 0$$

sein kann, und lassen nun z von dem Werthe c aus zu einem neuen Werthe k continuirlich übergehen, so werden sich zu gleicher Zeit auch, wie Cauchy in seinen *Nouveaux Exercices de Mathématiques, tome II, page* 109 bewiesen hat, die verschiedenen Werthe von u continuirlich ändern, unter denen einer nämlich zu Anfang gleich b ist und nach Durchschreitung unendlich kleiner Zwischenstufen einen bestimmten Werth h erreicht, welcher $z = k$ entspricht. Gilt nun auch dieser Werth von u als eine Function von z, und zwar offenbar als eine stetige, so hängt doch die Bestimmung desselben für einen besondern Werth von z nicht allein von diesem selbst, sondern zugleich auch von der Werthreihe ab, welche z von seinem Anfangswerthe aus durchlaufen ist.

Es ist hier wol zu beachten, dass die Function unbestimmt wird, wenn z beim Fortgange von c bis k auch einen solchen Werth erhält, für welchen zwei Wurzeln der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

coincidiren; da jedoch Werthe dieser Art nur in begrenzter Zahl vorhanden sind, so kann dieser Umstand immer umgangen werden, welche Werthe auch die Grössen c und k besitzen mögen, weil der Uebergang einer imaginären Variabeln von einem Werthe zu einem andern auf unzählige Arten möglich ist. Wir bemerken ferner, dass die Function u für $z = k$ diesen oder jenen Werth annehmen kann, je nachdem man z diese oder jene Werthreihe durchlaufen lässt.

Soll also die vorliegende Aufgabe, für einen beliebigen Werth von z den Werth von u zu bestimmen, nur eine Lösung zulassen, so muss dieselbe folgendermassen gestellt werden:

„Wenn die Function u, welche der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

genügt, für $z = c$ den Werth b besitzt, so soll angegeben werden, welchen Werth dieselbe für $z = k$ erhält, sobald z von c bis k eine vollständig bekannte Werthreihe stetig durchläuft.“

Wenn es nach Cauchy's Untersuchungen für die Analysis und insbesondere für die Integralrechnung von hoher Wichtigkeit ist, die Mannigfaltigkeit der Uebergänge imaginärer Variabeln von einem Werthe zu einem andern in Betracht zu ziehen, so werden wir uns, um den Gang einer solchen Variabeln deutlich vor Augen zu haben, der geometrischen Darstellung bedienen, welche dem grossen Mathematiker so ausserordentliche Vortheile gewährt hat. Sobald wir $z = x + yi$ setzen, haben wir uns einen Punkt Z vorzustellen, dessen rechtwinklige Coordinaten x und y sind, so dass jedem Werthe von z ein Ort von Z entspricht, und umgekehrt; während also z von c bis k eine bestimmte Werthreihe durchläuft, geht der bewegliche Punkt Z von dem $z = c$ entsprechenden Punkte C bis zu dem $z = k$ entsprechenden Punkte K auf einer bestimmten Curve fort. Demnach wird unser Problem auch lauten: Den Werth zu finden, welchen die Function u erhält, wenn Z von C bis K eine vorgeschriebene Curve durchläuft, welche sowol eine gerade, als gebrochene, als krumme Linie, als auch irgend eine Zusammensetzung von geraden und krummen Linien sein kann, wofern nur zwischen den Punkten C und K keine Unterbrechung der Stetigkeit stattfindet.

3. Um diese allgemeinen Betrachtungen in helleres Licht zu setzen, wollen wir dieselben an die obige Gleichung

$$u^2 - z = 0$$

knüpfen. Beschreiben wir um den Anfangspunkt O mit beliebigem Radius r einen Kreis, nehmen auf dessen Umfang innerhalb des Winkels der positiven Axen die beiden Punkte C und K an, nennen τ und ϑ die spitzen Winkel COx und KOx (Fig. 1.) und setzen $\vartheta > \tau$ voraus:

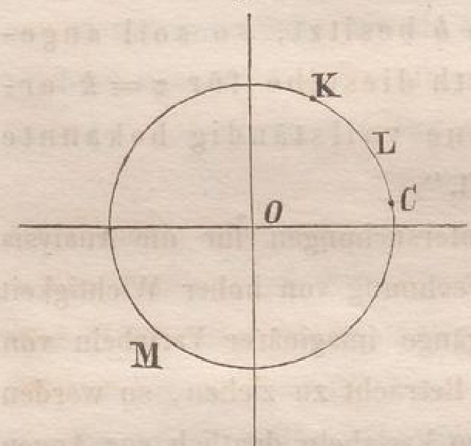


Fig. 1.

so ist für den Punkt C:

$$z = re^{\tau i} = c$$

und für den Punkt K:

$$z = re^{\vartheta i} = k,$$

während für einen beliebigen Ort des Punktes Z auf der Peripherie

$$z = re^{ti}$$

ist; hierbei kann der Winkel τ zum Anfangswerthe von t und die Grösse $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\tau}{2}i}$ zum Anfangswerthe von u genommen werden. Wenn wir nun Z von C nach K auf dem Bogen CLK fortführen, der kleiner als der halbe Umfang ist, also den Winkel t von τ bis ϑ continuirlich ausdehnen, so erhält die Function u für $z = k$ den Werth $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\vartheta}{2}i}$; lassen wir hingegen Z den Bogen CMK durchlaufen, der grösser als der halbe Umfang ist, d. h. den Winkel t von τ bis $\vartheta - 2\pi$ abnehmen, so erhält die Function u für $z = k$ den Werth $r^{\frac{1}{2}}e^{\frac{\vartheta - 2\pi}{2}i}$, welcher jenem gleich, aber entgegengesetzt ist. Hieraus sehen wir schon, dass eine implicite Function nach unserer Betrachtungsweise nicht allein von dem Werthe der Variabeln z, d. h. von der Lage des Punktes Z, sondern auch von dem Wege abhängt, welchen dieser Punkt von seinem anfänglichen Orte aus zurückgelegt hat.

4. Im Allgemeinen ist die linke Seite $f(u,z)$ der gegebenen Gleichung von der Form

$$Au^m + Bu^{m-1} + Cu^{m-2} + \dots + Iu + K,$$

wo $A, B, C, \dots I, K$ ganze Functionen von z bezeichnen, welche wir ohne gemeinschaftlichen Theiler voraussetzen können. Ueberdies darf diese Gleichung als eine irreductible betrachtet, d. h. der Function $f(u,z)$ der Charakter der Theilbarkeit durch irgend eine ganze Function von u und z, deren Grad in Bezug auf u kleiner als m ist, abgesprochen werden; denn wäre ein solcher Theiler vorhanden, so würde die gegebene Gleichung in mehrere andere irreductible Gleichungen zerfallen, von denen jede durch die in Rede stehende Function u erfüllt wird. Unter dieser Voraussetzung können für kein z zwei Wurzeln der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

zusammenfallen, weil diese sonst bekanntermassen nicht irreductibel sein würde; übrigens werden diejenigen Werthe von z, für welche sie gleiche Wurzeln besitzen sollte, durch eine Gleichung in z bestimmt, die auf eine begrenzte Anzahl von Auflösungen führt, so dass die ihnen entsprechenden Punkte sich in begrenzter Zahl vorfinden, ohne eine stetige Curve zu bilden.

5. Um die zu betrachtende Function genau zu definiren, lassen wir Z von einem Punkte C ausgehen, welcher dem Werthe c von z entspricht, nehmen ferner an, dass die Gleichung

$$f(u,c) = 0$$

eine oder mehrere einfache, endliche Wurzeln besitzt, von denen eine mit b_1 bezeichnet werden mag, während u_1 eine stetige Function von z vorstellt, welche der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

genügt und sich gerade beim Ausgange des Punktes Z von C auf b_1 reducirt.

Denken wir uns nun Z von dem $z = c$ entsprechenden Punkte C aus nach dem $z = k$ entsprechenden Punkte K auf einer Curve fortgehen, auf welcher die Function u_1 nirgends unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, c) = 0$$

coincidirt, und dass schliesslich u_1 im Punkte K einen Werth h_1 annimmt, welcher alsdann eine der Wurzeln der Gleichung

$$f(u, k) = 0$$

sein wird; so gelangen wir durch die folgenden Betrachtungen zu einem Fundamentalsatze unserer Theorie: dass dieser Werth h_1 ungeändert bleibt, sobald die Curve CMK zwischen den festen Punkten C und K in die unendlich nahe liegende Curve $CM'K$ übergeht (Fig. 2.).

Fig. 2.

Stellen wir uns nämlich vor, zwei bewegliche Punkte Z und Z' durchliefen diese beiden Curven zu gleicher Zeit, von dem Orte C gleichzeitig ausgehend und in K gleichzeitig zusammentreffend, während die simultanen Orte M und M', wo die Function u_1 die simultanen, continuirlich veränderlichen Werthe v_1 und v_1' besitzen mag, stets einander unendlich nahe bleiben: so wird die Veränderung der Differenz $v_1 - v_1'$ ebenfalls continuirlich erfolgen.

Beachten wir nun, dass die Wurzel u_1 der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

die ganze Curve CMK entlang keiner andern Wurzel gleich ist und sich daher eine endliche Grösse $\varDelta$ der Art angeben lässt, dass die Norm der Differenz zwischen u_1 und einer zweiten Wurzel entlang dieser Curve beständig grösser als $\varDelta$ ist; da ferner die Werthe von z für die Punkte M und M' unendlich wenig differiren und folglich jede der Wurzeln der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

für den Punkt M' von einer der Wurzeln der nämlichen Gleichung für den Punkt M unendlich wenig differirt: so ergibt sich, dass die Norm der Differenz $v_1 - v_1'$ entweder unendlich klein, oder grösser als Δ ist. Weil nun diese Differenz im Punkte C gleich Null und ausserdem continuirlich veränderlich ist, so muss sie fortwährend unendlich klein, folglich im Punkte K in aller Strenge gleich Null sein; die Function u_1 erhält demnach in K denselben Werth h_1, mag nun Z den Weg CMK, oder den Weg $CM'K$ zurückgelegt haben.

6. Wenn wir uns jetzt eine allmälige Verschiebung der Curve CMK, als absolut biegsamen und dehnbaren Faden gedacht, zwischen den festen Punkten C und K vorstellen, so bietet sich unmittelbar folgender Satz dar:

Sobald der Punkt Z von C nach K gelangt, mag nun der Weg CMK, oder der Weg CNK (Fig. 3) durchlaufen sein, erhält die Function u_1, die in C den Werth b_1 besass, jedesmal denselben Werth h_1, wenn sich nur die Curve CMK durch Verschiebung mit CNK zur Coincidenz bringen lässt, ohne dass dabei einer derjenigen Punkte überschritten wird, für welche die Funtion u_1 unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u,z) = 0$$

zusammenfällt.

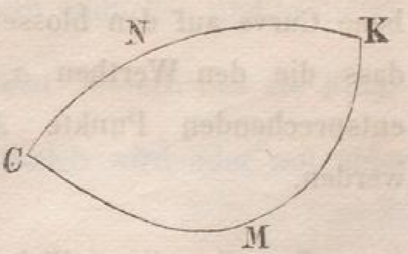


Fig. 3.

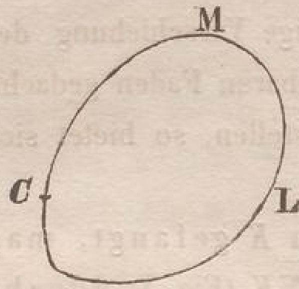
7. Da wir den Punkt K mit C zusammenfallen lassen können, so gelangen wir noch zu folgendem Satze:

Wenn der Punkt Z von C aus die Curve $CLMC$ bis zu demselben Punkte C zurück beschreibt (Fig. 4), so erhält die Function u_1, die anfänglich den Werth b_1 hatte, zuletzt wieder denselben Werth b_1, wofern sich nur die geschlossene Curve $CLMC$ auf den blossen Punkt C reduciren lässt, ohne dass einer derjenigen Punkte überschritten wird, für welche u_1 unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

zusammenfällt.

Fig. 4.



Es ist sehr zu beachten, dass diese geschlossene Curve $CLMC$ durchaus jede Gestalt annehmen, sich sogar schneiden, oder um den Punkt C beliebig viele Umläufe machen kann, wenn nur die in dem Satze ausgesprochene Bedingung erfüllt wird.

So z. B. nimmt die Function u_1, welche durch die Gleichung

$$u^m = z - a$$

definirt ist, ihren Anfangswerth wieder an, sobald der Punkt Z von C aus zu diesem Punkte C zurückkehrt, wenn sich die durchlaufene Curve auf den blossen Punkt C reduciren lässt, ohne dass der $z = a$ entsprechende Punkt A überschritten wird.

Eben so erhält die Function u_1, welche der Gleichung

$$(z - a)(z - a')(z - a'') \ldots . u^m = (z - \mathfrak{a})(z - \mathfrak{a}')(z - \mathfrak{a}'') \ldots$$

genügt, bei der Rückkehr des Punktes Z nach seinem Ausgangsorte C ihren Anfangswerth wieder, wenn die von Z beschriebene Curve auf den blossen Punkt C reducirt werden kann, ohne dass die den Werthen $a, a', a'', \ldots, \mathfrak{a}, \mathfrak{a}', \mathfrak{a}'' \ldots$ von z bezüglich entsprechenden Punkte $A, A', A'', \ldots \mathfrak{A}, \mathfrak{A}', \mathfrak{A}'', \ldots$ überschritten werden.

Dasselbe gilt endlich von der Function u_1, welche durch die Gleichung

$$u^3 - u + z = 0$$

definirt ist, wenn sich die von Z beschriebene geschlossene Curve auf den blossen Punkt C ohne Ueberschreitung eines der beiden

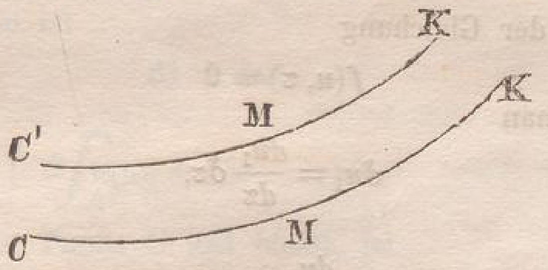
$z = +\frac{2}{3\sqrt{3}}$ und $z = -\frac{2}{3\sqrt{3}}$ entsprechenden Punkte A und A' reduciren lässt.

8. Wenn u_1 eine den vorhin angegebenen Bedingungen unterworfene algebraische Function von z bezeichnet, welche also stetig ist, der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

genügt und sich für $z = c$ auf die Grösse b_1 reducirt, so stellt $\int_c^k u_1 dz$ bekanntlich die Summe der Produkte aus den Werthen der Function u_1 und den unendlich kleinen Zuwächsen vor, welche die Variable z während ihres Uebergangs von der untern Grenze c zur obern Grenze k erhält. Da nun z von c bis k, oder mit andern Worten der Punkt Z von C nach K auf unendlich viele Arten fortgehen kann und jedem Wege CMK (Fig. 5),

Fig. 5.



welchen der Punkt Z etwa durchläuft, ein endlicher und bestimmter Werth des Integrals $\int_c^k u_1 dz$ entspricht, wofern nur die Function u_1 auf diesem Wege nirgends unendlich wird oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

zusammenfällt; so entsteht die Frage nach der Aenderung des Integrals $\int_c^k u_1 dz$, welche unendlich kleine Verschiebungen der Punkte C und K, so wie auch der Curve CMK zur Folge haben.

Weil nämlich diese Curve der Voraussetzung gemäss keinen Punkt enthält, für welchen die Function u_1 unendlich oder eine vielfache Wurzel ist, so gilt dasselbe auch von der unendlich nahe liegenden Curve $C'M'K'$, und es lässt sich dann wie in Nr. 5 beweisen, dass die Werthe von u_1 für zwei unendlich nahe liegende Punkte beider Curven unendlich wenig verschieden sind. Der Zuwachs des Integrals, welcher durch den Uebergang der einen in die andere hervorgebracht wird, kann daher nach den Regeln der Variationsrechnung gefunden werden, es ist nämlich

$$\delta \int_c^k u_1 dz = \int_c^k \delta (u_1 dz) = \int_c^k (u_1 d\delta z + \delta u_1 dz);$$

da nun aber die Ableitung $\frac{du_1}{dz}$ die Curve CMK entlang beständig einen endlichen Werth behält, wie die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial u_1} \frac{du_1}{dz} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

zeigt, wo nämlich $\frac{\partial f}{\partial u_1}$ nicht Null sein kann, so lange u_1 eine einfache Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

ist: so hat man

$$\delta u_1 = \frac{du_1}{dz} \delta z,$$

mithin

$$\delta u_1 dz = \frac{du_1}{dz} \delta z dz = du_1 \delta z,$$

und folglich

$$\delta \int_c^k u_1 dz = \int_c^k (u_1 d\delta z + du_1 \delta z) = \int_0^k d\, u_1\, \delta z),$$

oder auch, wenn b_1 und h_1 die Werthe von u_1 für die Punkte C und K sind,

$$\delta \int_c^k u_1 dz = h_1 \delta k - b_1 \delta c.$$

9. Aus diesen Gleichungen entspringen einige wichtige Folgerungen. Lässt man nämlich zuerst die Punkte C' und K' mit C und K zusammenfallen, so ist

$$\delta c = 0,\ \delta k = 0$$

und folglich

$$\delta \int_c^k u_1 dz = 0,$$

d. h.:

Das über die Curve CMK fortgeführte Integral $\int_c^k u_1 dz$ behält seinen Werth unverändert bei, wenn diese Curve zwischen den festen Punkten C und K eine Veränderung ihrer Gestalt erleidet, ohne dass jedoch einer von den Punkten, für welche die Function u_1 unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

coincidirt, überschritten wird.

10. Nehmen wir ferner an, dass der Punkt K mit C zusammenfällt, also der Weg CMK zur geschlossenen Curve $CLMC$ (Fig. 4) wird, so ist

$$\delta h = \delta c,$$

mithin

$$\delta \int_c^k u_1 dz = (h_1 - b_1)\delta c;$$

so lange aber der Punkt C fest bleibt, ist

$$\delta c = 0,$$

und folglich

$$\delta \int_c^k u_1 dz = 0,$$

d. h.:

Das vom Punkte C aus über die geschlossene Curve $CLMC$ fortgeführte Integral $\int u_1 dz$ behält denselben Werth, wenn diese Curve ausserhalb des festen Punktes C eine Veränderung ihrer Gestalt erleidet, ohne dass einer von denjenigen Punkten überschritten wird, für welche die Function u_1 unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

zusammenfällt.

11. Da das Product $(h_1 - b_1)\delta c$ auch für $h_1 = b_1$ verschwindet, so gilt unter der Voraussetzung, dass die Function u_1 denselben Werth wieder annimmt, sobald nur der Punkt Z zu demselben Orte C zurückkehrt, folgender Satz:

Ist die geschlossene Curve $CLMC$ von der Art, dass die Function u_1 nach vollbrachtem Umlauf des Punktes Z ihren Werth wieder erhält, so bleibt der Werth des über den ganzen Umfang dieser Curve fortgeführten Integrals $\int u_1 dz$ ungeändert, wenn sich die Verschiebung der Curve über keinen derjenigen Punkte hinaus erstreckt, für welche die Function u_1 unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

zusammenfällt.

Wenn wir nun diesen Satz mit dem in Nr. 7 aufgestellten vereinigen, so ergibt sich folgender Satz:

Ist die geschlossene Curve $CLMC$ von der Art, dass sie auf den blossen Punkt C reducirt werden kann, und zwar ohne Ueberschreitung eines derjenigen Punkte, für welche die Function u_1 unendlich wird, oder mit einer zweiten Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

zusammenfällt; so ist der Werth des über den ganzen Umfang dieser Curve fortgeführten Integrals $\int u_1 dz$ gleich Null.

12. Wenn die Function u_1 ihren Anfangswerth wieder annimmt, sobald Z auf der geschlossenen Curve $CLMC$ einen Umlauf vollbracht hat, so ist der Werth des über den ganzen Umfang dieser Curve ausgedehnten Integrals $\int u_1 dz$ unabhängig von der Lage des Anfangspunktes C desselben; denn es gilt immer die Voraussetzung, dass

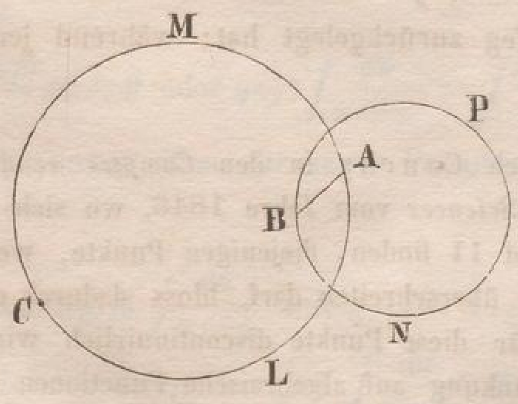
$$h_1 = b_1$$

ist, während der Punkt C auf der unbeweglich gedachten Curve $CLMC$ verschoben wird, mithin δc nicht gleich Null ist, und somit bleibt die Variation des Integrals $\int u_1 dz$ gleich Null.

Anders verhält es sich offenbar, wenn die Function ihren Anfangswerth nicht wieder annimmt, sobald Z auf der geschlossenen Curve einen Umlauf gemacht hat, weil alsdann nicht mehr die Differenz $h_1 - b_1$ gleich Null ist.

13. Damit nicht die Tragweite der vorstehenden Sätze unnütze Verkürzungen erleide, weil man unter *geschlossener Curve* eine Begrenzungslinie, die sich nicht selber schneidet, zu verstehen gewohnt ist, so mag nochmals darauf aufmerksam gemacht werden (Nr. 7), dass die geschlossene Curve, von welcher vorhin die Rede war, nicht der Umfang einer begrenzten Fläche, wie etwa eines Kreises, oder einer Ellipse zu sein braucht, sondern sich wie eine Lemniscate selber schneiden kann, und zwar beliebig vielmal; dass auch einer und derselbe Theil

Fig. 6.



dieser Curve, oder eine Zusammensetzung z. B. zweier Kreise $CLAM$, BNP und einer geraden Linie AB (Fig. 6) zu zwei-, oder mehrmaligem Umlauf des Punktes Z dienen kann, hier etwa der Reihe nach der Bogen CLA, die Linie AB, der Kreis $BNPB$, die Linie BA und zuletzt der Bogen AMC.*)

14. Wir können nun auch, ohne an den Beweisen etwas zu ändern, in den soeben aufgestellten Sätzen an Stelle von u_1 eine rationale Function von u_1 und z substituiren, wofern nur diese auf dem von Z durchlaufenen Wege nirgends unendlich wird, und sodann die Reihenentwickelung für u_1 herleiten.

Es seien nämlich $a, a', a'', \ldots$ die Werthe von z, für welche die Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

vielfache, oder unendlich grosse Wurzeln besitzt, und $A, A', A'' \ldots$ die ihnen entsprechenden Punkte; ferner seien diese mit dem Ausgangsorte C des beweglichen Punktes Z durch gerade Linien verbunden; endlich sei um C ein Kreis σ mit einem Radius beschrieben, dessen Länge einer positiven, und zwar die kleinste der Längen $CA, CA', CA'', \ldots$ nicht übersteigenden Grösse ϱ gleich ist, so dass alle jene Punkte $A, A', A'', \ldots$ ausserhalb des Kreises liegen.

Für einen innerhalb des Kreises oder auf der Peripherie desselben liegenden Punkt kann nun die Function u_1 verschiedene Werthe annehmen, je nachdem der Punkt Z von C aus diesen oder jenen Weg zurückgelegt hat; während jedoch die Function

---

*) Obgleich Cauchy in den *Comptes rendus des séances de l'Académie des Sciences* vom Jahre 1846, wo sich die Sätze der Nummern 9, 10 und 11 finden, diejenigen Punkte, welche der durchlaufene Weg nicht überschreiten darf, bloss dadurch charakterisirt, dass die Function für diese Punkte discontinuirlich wird; so erschien es bei der Beschränkung auf algebraische Functionen genauer zu sagen: die Function u wird für dieselben unendlich, oder eine vielfache Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0.$$

u_1 nur einen und zwar ganz bestimmten Werth annehmen kann, wenn man die Bedingung festhält, dass der Weg überall innerhalb des Kreises σ bleibt, weil sich alle dieser Bedingung unterworfenen Wege durch Verschiebung zur Coincidenz bringen lassen, ohne dass dabei einer der Punkte $A, A', A'' \ldots$ überschritten wird. Dieser Werth der Function u_1 sei $\varphi(z)$.

Um denselben nach der von Cauchy mehrfach angewandten Methode in eine Reihe zu entwickeln, nehmen wir zuvörderst innerhalb des Kreises σ irgend einen Punkt Γ an, für welchen z den correspondirenden Werth γ hat, und betrachten dann den Ausdruck

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma},$$

der nämlich eine rationale Function von z und $\varphi(z)$ darstellt, welche nicht unendlich wird, so lange der Punkt Z innerhalb des Kreises σ bleibt; auch wenn $z=\gamma$ wird, in welchem Falle sich dieselbe auf die endliche Grösse $\varphi'(\gamma)$ reducirt. Lassen wir nun Z auf dem Umfange des Kreises σ einen Umlauf machen, so wird jene Function denselben Werth wieder annehmen und alsdann das Integral

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma}\,dz,$$

über den ganzen Umfang ausgedehnt, nach Nr. 11 den Werth Null haben, d. h. es ist

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{z-\gamma}\,dz = 0 \text{ oder } \varphi(\gamma)\int \frac{dz}{z-\gamma} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{z-\gamma},$$

wo sich die Integrationen über die ganze Peripherie des Kreises erstrecken.

Da aber das Integral $\int \frac{dz}{z-\gamma}$ zufolge Nr. 11 auf das über einen andern Kreis ausgedehnte Integral $\int \frac{dz}{z-\gamma}$, für das Centrum Γ und einen sehr kleinen Radius ε zurückgeführt, also dann

$$z-\gamma = \varepsilon e^{\vartheta i}$$

gesetzt werden kann, wo nur ϑ variabel ist, und mithin

$$dz = \varepsilon e^{\vartheta i} d\vartheta i,$$

folglich

$$\int \frac{dz}{z-\gamma} = i \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi i;$$

so verwandelt sich obige Gleichung in

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{\varphi(z)\, dz}{z-\gamma}.$$

Beachten wir nun, dass die Norm ϱ von $z-c$ auf dem Umfange σ selbst grösser als die Entfernung $C\Gamma$ ist, d. h. als die Norm von $\gamma - c$; dass sich also der Ausdruck

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z-c} \cdot \frac{1}{1 - \frac{\gamma - c}{z-c}}$$

in eine convergente, nach den Potenzen von $\frac{\gamma-c}{z-c}$ aufsteigende Reihe:

$$\frac{1}{z-\gamma} = \frac{1}{z-c} + \frac{\gamma-c}{(z-c)^2} + \frac{(\gamma-c)^2}{(z-c)^3} + \ldots.$$

entwickeln lässt, so ergibt sich

$$\int \frac{\varphi(z)\, dz}{z-\gamma} = \int \frac{\varphi(z) dz}{z-c} + (\gamma - c) \int \frac{\varphi(z)\, dz}{(z-c)^2} +$$

$$(\gamma-c)^2 \int \frac{\varphi(z) dz}{(z-c)^3} + \ldots.$$

Da die rechte Seite dieser Gleichung ebenfalls convergent ist, so hat man endlich für $\varphi(\gamma)$ folgende convergente, nach den Potenzen von $\gamma - c$ fortschreitende Reihenentwickelung:

$$\varphi(\gamma) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int \frac{\varphi(z) dz}{z-c} + (\gamma - c) \int \frac{\varphi(z)\, dz}{(z-c)^2} + (\gamma-c)^2 \int \frac{\varphi(z) dz}{(z-c)^3} + \ldots \right].$$

15. Nachdem die Existenz dieser Reihe nachgewiesen, bedarf es noch der Berechnung der Coefficienten, welche sich mit Hilfe des Taylor'schen Satzes finden lassen. Es ist nämlich

$$\varphi(\gamma) = \varphi(c) + \frac{\varphi'(c)}{1} (\gamma - c) + \frac{\varphi''(c)}{1 \,.\, 2} (\gamma - c)^2 + \ldots,$$

wo nun

$$\varphi(c) = b_1$$

ist. Bestimmt man jetzt aus den Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dz} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial f}{\partial u}\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}\left(\frac{du}{dz}\right) + 2\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial z}\frac{du}{dz} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

die Werthe von $1 . \frac{du}{dz}$, $1 . 2 . \frac{d^2u}{dz^2}, \ldots$, die bezüglich mit $F_1(u,z)$, $F_2(u,z), \ldots$ bezeichnet werden mögen, so erhalten die Grössen $\frac{\varphi'(c)}{1}$, $\frac{\varphi''(c)}{1 . 2}, \ldots$ die Werthe $F_1(b_1, c)$, $F_2(b_1, c), \ldots$, folglich ist

$$(F)\ \varphi(\gamma) = b_1 + F_1(b_1, c).(\gamma - c) + F_2(b_1, c).(\gamma - c)^2 + \ldots..$$

Es unterliegt nach dieser Entwickelung keinem Zweifel, auf welche Wurzel der Gleichung

$$f(u, z) = 0$$

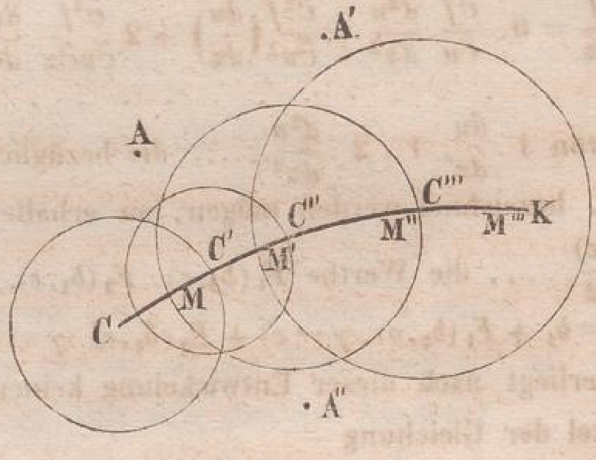
sich die Formel (F) bezieht; die auf der rechten Seite stehende Reihe gibt nämlich den $z = \gamma$ entsprechenden Werth derjenigen mit z continuirlich veränderlichen Wurzel, welche für $z = c$ den Werth b_1 erhält, vorausgesetzt, dass der Punkt Z von C nach Γ gelangt, ohne den Kreis σ zu verlassen, oder dass die Entfernung CZ immer kleiner als die kürzeste der Längen $CA, CA', CA'', \ldots$ bleibt. Die Formel findet nur für solche Werthe von γ Anwendung, für welche die Norm von $\gamma - c$ kleiner als diese kürzeste Länge ist, denn nur unter dieser Bedingung (N. 14) hat die Bezeichnung $\varphi(\gamma)$ einen bestimmten Sinn.

16. Bezeichnet jetzt k irgend einen Werth von z und K den ihm entsprechenden Punkt, welchen der bewegliche Punkt Z auf dem Wege CMK (Fig. 7) erreicht, ohne jedoch durch einen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ zu gehen; so lässt sich der Werth h_1 der Function u_1 für $z = k$ auf folgende Weise berechnen.

Man construire um C einen Kreis, welcher keinen der Punkte $A, A', A'', \ldots$ einschliesst; falls dieser Kreis die Curve CMK vollständig umfasst, ersetze man in der Formel (F) nur γ durch k, um h_1 zu erhalten. Im andern Falle wird der Kreis die Curve CMK ein- oder mehrmal schneiden, und zwar sei C' der erste

Schnittpunkt dieser Curve, dann c' der entsprechende Werth von z, so dass der Werth b_1' von u_1 für den Punkt C' gewonnen

Fig. 7.



wird, wenn man in der Formel (F) γ durch c' ersetzt. Da die Curve CMK in die beiden Theile CMC' und $C'M'K$ zerfällt, so construire man um C' einen zweiten Kreis, von welchem die Punkte $A, A' A''$,.... sämmtlich ausgeschlossen sind; falls dieser Kreis die Curve $C'M'K$ vollständig umfasst, ersetze man in der Formel (F) nur c durch c', b_1 durch b_1' und γ durch k, um h_1 zu erhalten. Im andern Falle wird der Kreis die Curve $C'M'K$ schneiden, und zwar sei C'' der erste Schnittpunkt dieser Curve, dann c'' der entsprechende Werth von z, so dass der Werth b_1'' von u_1 für den Punkt C'' gewonnen wird, wenn man in der Formel (F) c durch c', b_1 durch b_1' und γ durch c'' ersetzt. Da jetzt die Curve $C'M'K$ in die beiden Theile $C'M'C''$ und $C''M''K$ zerfällt, so construire man um C'' einen dritten Kreis, von welchem die Punkte A, A', A'',.... sämmtlich ausgeschlossen sind. Durch Wiederholung dieser Construction wird man schliesslich einen Kreis um den Punkt $C^{(n)}$ erlangen, welcher die Curve $C^{(n)}M^{(n)}K$ vollständig umfasst, und alsdann in der Formel (F) c durch $c^{(n)}$, b_1 durch $b_1^{(n)}$ und γ durch k ersetzen, um endlich h_1 zu erhalten.

Wenn man den Umstand benutzt, dass die Curve CMK zwischen den festen Punkten C und K bis zu den Punkten A, A', A'',....

verschoben werden kann, ohne dass die Grösse h_1 eine Aenderung erleidet, und ferner dass über die Radien der Kreise gar keine Bestimmung getroffen war, so kann man sich die Berechnung von h_1 erleichtern. Wir wollen indess bei diesem Gegenstande nicht länger verweilen.

17. Ausser der durch die Formel (F) gegebenen Entwickelung, welche nur so lange Anwendung findet, als der Punkt Z einen gewissen Kreis nicht verlässt, können noch viele andere, für den Umfang einer vom Kreise verschiedenen geschlossenen Curve anwendbare Entwickelungen aufgestellt werden.

Stellt $\psi(z)$ eine rationale Function von z vor, welche für $z=c$ verschwindet, während $z=x+yi$ ist, so ist die Norm von $\psi(z)$, die mit $n\psi(z)$ bezeichnet werden mag, eine Function von x und y, und die Gleichung

$$n\psi(z)=l$$

drückt für einen positiven constanten Werth von l eine algebraische Curve aus. Da alsdann für den Punkt C die Gleichung

$$n\psi(z)=0$$

gilt, so ergibt sich, dass ein Zweig dieser Curve für hinreichend kleine Werthe von l eine geschlossene Curve um den Punkt C bilden wird.*).

Nehmen wir jetzt an, dass die Curve s, welche sich für $l=0$ auf den Punkt C reducirt, während l von Null bis zu einem gewissen Werthe λ anwächst, an Umfang zunimmt, bis sie mit der geschlossenen Curve σ zusammenfällt; ferner dass für die Curve σ selbst, so wie für den eingeschlossenen Raum die Gleichung

$$\psi(z)=\psi(z')$$

nur für

$$z=z'$$

---

*) Cauchy hat in den *Comptes rendus de l'Académie*, *Tome* IV p. 777 Betrachtungen über die Verwandlungen und Vereinigungen der verschiedenen Zweige dieser Curve für den Fall angestellt, wenn die Norm l von Null bis ins Unendliche anwächst.

gültig ist; dass ausserdem die Ableitung von $\psi(z)$ innerhalb dieses Raumes nicht verschwindet; dass endlich die Punkte $A, A', A'', \ldots$ sämmtlich von der Curve ausgeschlossen bleiben: so genügt es nur λ hinreichend klein zu nehmen.

Unter der Bedingung nun, dass der Punkt Z die Curve σ nicht überschreiten darf, kann die Function u_1 für jeden Punkt nur einen Werth annehmen, welchen Lauf sie auch genommen haben mag, und zwar lässt sich dieser Werth gleich $\varphi(z)$, wie sogleich bewiesen werden soll, in eine convergente, nach den Potenzen von $\psi(z)$ fortschreitende Reihe entwickeln.

Weil der Ausdruck

$$\frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{\psi(z)-\psi(\gamma)}$$

für jeden Punkt Γ innerhalb der Curve σ, dem der Werth γ von z entspricht, eine rationale Function von z und $\varphi(z)$ darstellt, welche nicht unendlich wird, so lange der Punkt Z jene Curve nicht überschreitet, da sich dieselbe für $z=\gamma$ auf die endliche Grösse $\frac{\varphi'(\gamma)}{\psi'(\gamma)}$ reducirt; weil diese Function ausserdem denselben Werth wieder erhält, sobald Z auf der Curve einen Umlauf vollbracht hat; so ist das Integral

$$\int \frac{\varphi(z)-\varphi(\gamma)}{\psi(z)-\psi(\gamma)}\, dz,$$

über den ganzen Umfang der Curve ausgedehnt, gleich Null, mithin

$$\varphi(\gamma)\int \frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \int \frac{\varphi(z)\, dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)},$$

daher

$$\varphi(\gamma) = \frac{\displaystyle\int \frac{\varphi(z)\, dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}}{\displaystyle\int \frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}},$$

wo sich die Integrationen wieder über den ganzen Umfang der Curve σ erstrecken.

Der Werth des Integrals

$$\int \frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)}$$

lässt sich ohne Mühe ermitteln; denn es ist

$$\frac{1}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \frac{1}{\psi'(\gamma)} \cdot \frac{1}{z-\gamma} + \mathfrak{s}(z),$$

wo $\mathfrak{s}(z)$ eine rationale Function von z bezeichnet, welche überall innerhalb der Curve σ und auf deren Umfang selbst endlich bleibt, folglich

$$\int \frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \frac{1}{\psi'(\gamma)} \int \frac{dz}{z-\gamma} + \int \mathfrak{s}(z)dz.$$

Da hier zufolge Nr. 11:

$$\int \mathfrak{s}(z)dz = 0$$

ist; da ferner der Werth des Integrals $\int \frac{dz}{z-\gamma}$ ungeändert bleibt, wenn man dasselbe über einen um den Punkt Γ mit einem sehr kleinen Radius ε beschriebenen Kreis fortführt, da also

$$z-\gamma = \varepsilon e^{\vartheta i}$$

gesetzt werden kann, wo nur ϑ variabel ist, demnach

$$\int \frac{dz}{z-\gamma} = i \int_0^{2\pi} d\vartheta = 2\pi i;$$

so ergibt sich

$$\int \frac{dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \frac{2\pi i}{\psi'(\gamma)}.$$

Beachten wir andererseits, dass die Norm von $\psi(z)$ für die Curve σ gleich λ und folglich grösser als die Norm von $\psi(\gamma)$ ist, dass sich also

$$\frac{1}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \frac{1}{\psi(z)} \cdot \frac{1}{1-\frac{\psi(\gamma)}{\psi(z)}}$$

in eine convergente, nach den Potenzen von $\frac{\psi(\gamma)}{\psi(z)}$ aufsteigende Reihe:

$$\frac{1}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \frac{1}{\psi(z)} + \frac{\psi(\gamma)}{\psi^2(z)} + \frac{\psi^2(\gamma)}{\psi^3(z)} + \ldots.$$

entwickeln lässt; so ergibt sich noch

$$\int \frac{\varphi(z)dz}{\psi(z)-\psi(\gamma)} = \int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi(z)} + \psi(\gamma)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^2(z)}$$
$$+\psi^2(\gamma)\int \frac{\varphi(z)\,dz}{\psi^3(z)} + \cdots$$

und folglich

$$\varphi(\gamma) = \frac{\psi'(\gamma)}{2\pi i}\left[\int \frac{\varphi(z)dz}{\psi(z)} + \psi(\gamma)\int \frac{\varphi(z)dz}{\psi^2(z)} + \psi^2(\gamma)\int \frac{\varphi(z)dz}{\psi^3(z)} + \cdots\right],$$

wo nun die Integrationen über den Umfang einer beliebigen, innerhalb der Curve σ liegenden geschlossenen Curve mit nur einem Umgang um C ausgedehnt werden können.

Wenn man diese Curve auf einen sehr kleinen um den Punkt C beschriebenen Kreis zurückführt, so lässt sich leicht beweisen, dass das Integral $\int \frac{\varphi(z)dz}{\psi^m(z)}$ gleich $2\pi i r_m$ ist, wo r_m das Residuum der Function $\frac{\varphi(z)}{\psi^m(z)}$ in Bezug auf $z=c$ bezeichnet*); alsdann lautet die vorstehende Gleichung:

$$\varphi(\gamma) = \psi'(\gamma)\left[r_1 + r_2\psi(\gamma) + r_3\psi^2(\gamma) + \cdots\right].$$

Für

$$\psi(z) = z - c$$

entspringt hieraus die Formel (F). Oder setzt man, um eine andere Anwendung zu machen,

$$\psi(z) = (z-c)(z-c'),$$

wo c' den Werth von z für den Punkt C' bezeichnet, so entspricht die Gleichung

$$n(z-c)(z-c') = l$$

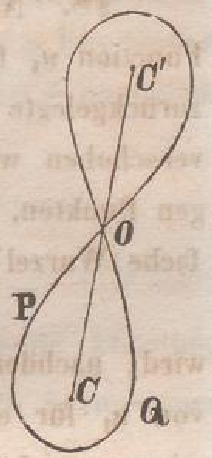
dem Orte derjenigen Punkte, deren Entfernungen von den Punkten C und C' das Product l geben. Für Werthe von l, welche kleiner als $\frac{1}{4}\Delta^2$ sind, wo Δ die Länge CC' vorstellt, zerfällt der in

---

*) Siehe Moigno, *Leçons de calcul différentiel rédigées d'après les méthodes et les ouvrages publiés ou inédits de Mr. A. L.* Cauchy. *Paris* 1840. (41^e *leçon*).

Rede stehende Ort in zwei geschlossene Curven, von denen eine den Punkt C umgibt, mit wachsendem l an Umfang zunimmt und für $l=\frac{1}{4}\Delta^2$ der Hälfte POQ (Fig. 8) einer Lemniscate mit den Brennpunkten C und C' gleich ist. Sollten die Punkte $A, A', A'', \ldots$ sämmtlich auf diesem Theile der Lemniscate, oder ausserhalb desselben liegen, so könnte man an Stelle der Curve σ die unendlich nahe liegende, $l=\frac{1}{4}\Delta^2-\varepsilon$ entsprechende Curve, wo ε eine positive unendlich kleine Grösse bezeichnet, annehmen, weil offenbar auch dann noch alle oben angeführten Bedingungen erfüllt werden: denn die Ableitung $2z-c-c'$ von $\psi(z)$ verschwindet nur für den Werth $z=\frac{c+c'}{2}$, welcher dem ausserhalb der Curve σ liegenden Punkte O entspricht; ferner liefert die Gleichung

Fig 8.



$$\psi(z) = \psi(z')$$

für z' die beiden Werthe $z'=z$, $z'=c+c'-z'$, welche zwei Punkten entsprechen, von denen einer innerhalb der Curve σ liegt, während sich der andere ausserhalb derselben befindet, weil beide in Bezug auf den Punkt O symmetrische Lage haben.

Somit gilt die Gleichung

$$\varphi(\gamma)=(2\gamma-c-c')[r_1+r_2(\gamma-c)(\gamma-c')+r_3(\gamma-c)^2(\gamma-c')^2+\ldots.],$$

wo r_m das Residuum von $\frac{\varphi(z)}{(z-c)^m(z-c')^m}$ in Bezug auf $z=c$ vorstellt, und zwar so lange der $z=\gamma$ entsprechende Punkt Γ innerhalb der Lemniscatenhälfte POQ bleibt.

Schliesslich mag noch bemerkt werden, dass man sich, um die Function u_1 für den Endpunkt einer gegebenen Curve auf dem in Nr. 16 bezeichneten Wege zu berechnen, ebenfalls dieser neuen Entwickelungen bedienen kann.